

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Τα ATM των τραπεζών επιτρέπουν την ανάληψη είτε του ελάχιστου ποσού των 20 ευρώ με ένα χαρτονόμισμα είτε οποιουδήποτε ποσού μετρητών πολλαπλάσιου των 10 Ευρώ και μεγαλύτερου ή ίσου των 40 ευρώ, δηλαδή ποσά των 40, 50, 60, 70, κλπ. Αποδείξτε με χρήση της μαθηματικής επαγωγής ότι για να λειτουργήσουν τα ATM αρκεί να χρησιμοποιηθούν μόνο χαρτονομίσματα των 20 και 50 Ευρώ.

2. Με χρήση της μαθηματικής επαγωγής αποδείξτε ότι για κάθε $n \geq 1$ ισχύει η ακόλουθη πρόταση:

$$P(n) \equiv \text{ο αριθμός } 3^n - 1 \text{ διαιρείται ακριβώς με το } 2$$

3. Δοθέντος ότι η τιμή της πρότασης $p \Rightarrow q$ είναι ψευδής, προσδιορίστε την τιμή της σύνθετης πρότασης $\bar{p} \vee \bar{q} \Rightarrow q$

4. Αν σας δίνεται ότι η τιμή του $p \Rightarrow q$ είναι αληθής, μπορείτε να προσδιορίσετε την τιμή της σύνθετης πρότασης $\bar{p} \vee (p \Leftrightarrow q)$;

5. Κατασκευάστε τον πίνακα αληθείας για τη σύνθετη πρόταση $(p \Leftrightarrow \bar{q}) \Leftrightarrow (q \Rightarrow p)$

6. Έστω το σύνολο $A = \{1,2,3\}$ και $R = \{(1,1), (1,3), (3,1), (3,3)\}$ μία σχέση επί του A .

(a) Είναι η R σχέση ισοδυναμίας επί του A ;

(b) Αν δεν ισχύει η προηγούμενη ορίστε κάποιο υποσύνολο του A του οποίου η σχέση R να είναι σχέση ισοδυναμίας.

(c) Σχεδιάστε το κατευθυνόμενο γράφημα που αντιστοιχεί στη σχέση R επί του A και υπολογίστε το βαθμό κάθε καρυφής.

7. Έστω R μια διμελής σχέση επί κάποιου συνόλου A . Έστω η σχέση $S = \{(a, b) | (a, c) \in R \text{ και } (b, c) \in R \text{ για κάποιο } c\}$. Δείξτε ότι αν η σχέση R είναι μια σχέση ισοδυναμίας, τότε και η σχέση S είναι μια σχέση ισοδυναμίας.

8. Δίνονται τα σύνολα $A = \{1,3,5,7,9\}$ και $B = \{4,8,12,16,20\}$. Περιγράψτε μια διμελή σχέση $R \subseteq A \times B$ η οποία να είναι συνάρτηση και να είναι αντιστρέψιμη.