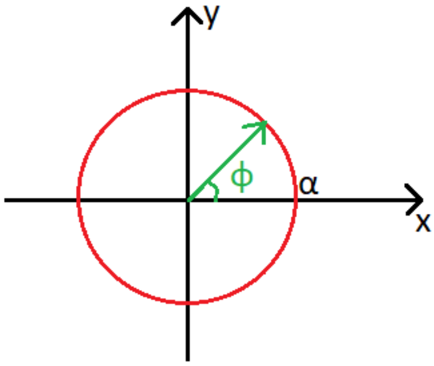
<u>Άσκηση 1</u>

Έστω κυκλικός δίσκος ακτίνας α που φέρει επιφανειακό φορτίο με πυκνότητα $\sigma = \sigma_o \left(\frac{r}{\alpha}\right)^2 cos^2\varphi$ όπου 0≤r≤α και 0≤φ≤2π. Να βρεθεί το ολικό φορτίο του δίσκου.

<u>Λύση</u>



Έστω ο κυκλικός δίσκος του σχήματος.

Το ολικό φορτίο του δίσκου θα δίνεται αν υπολογίσω το ολοκλήρωμα επιφάνειας:

$$Q = \iint_S \sigma dS$$

Το dS πρέπει να το χρησιμοποιήσω σε κυκλικές συντεταγμένες καθώς και το σ μου δίνεται σε κυκλικές συντεταγμένες συναρτήσει της ακτίνας r και της γωνίας φ. Το dS σε σφαιρικές συντεταγμένες είναι dS=rdrdφ. Αντικαθιστώ λοιπόν το σ και το dS στο ολοκλήρωμα:

$$Q = \iint_S \sigma_o \left(\frac{r}{a}\right)^2 \cos^2(\varphi) r dr d\varphi = \iint_S \sigma_o \left(\frac{r^3}{a^2}\right) \cos^2(\varphi) dr d\varphi$$

Αντικαθιστώ τα όρια ολοκλήρωσης 0≤r≤α και 0≤φ≤2π και μετατρέπω το ολοκλήρωμα επιφάνειας σε απλό ολοκλήρωμα

$$Q = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_0^{\alpha} \sigma_o \left(\frac{r^3}{a^2}\right) \cos^2(\varphi) dr d\varphi$$

Τα σ_o και $1/\alpha^2$ είναι σταθερά και μπορούν να βγουν εκτός ολοκληρώματος

$$Q = \frac{\sigma_o}{a^2} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_0^{\alpha} r^3 \cos^2(\varphi) dr d\varphi$$

Τα r και φ είναι ανεξάρτητες μεταβλητές και μπορώ να τις ολοκληρώσω ξεχωριστά

Επειδή $\int \cos^2(\varphi) d\varphi = \frac{\varphi}{2} + \frac{\sin(2\varphi)}{4}$

Έχω $Q = \frac{\sigma_o}{a^2} \int_{r=0}^{\alpha} r^3 dr \int_{\varphi=0}^{2\pi} \cos^2(\varphi) d\varphi = \frac{\sigma_o}{a^2} \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^{\alpha} \left[\frac{\varphi}{2} + \frac{\sin(2\varphi)}{4}\right]_0^{2\pi}$

Που με πράξεις μου δίνει $Q = \frac{\pi \sigma_o a^2}{4}$

Άσκηση 2

Έστω γραμμική πυκνότητα φορτίου λ=24y²mC/m. Να βρεθεί το ολικό φορτίο για y=-5 ως y=5.

Λύση

Το ολικό φορτίο γραμμικής πυκνότητας φορτίου δίνεται από το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα:

$$Q=\int_C \lambda dl$$

Μετατρέπω το λ σε μονάδες SI άρα $\lambda=24y^2 mC/m=24\times10^{-3}C/m$

Αντικαθιστώ το λ μέσα στο ολοκλήρωμα:

$$Q=\int_C 24\times10^{-3}y^2 dl$$

Η μόνη μεταβλητή που μεταβάλλεται είναι η y από -5 ως 5. Οπότε αντικαθιστώ μέσα στο ολοκλήρωμα και μετατρέπω το ολοκλήρωμα από ολοκλήρωμα καμπύλης σε απλό ολοκλήρωμα:

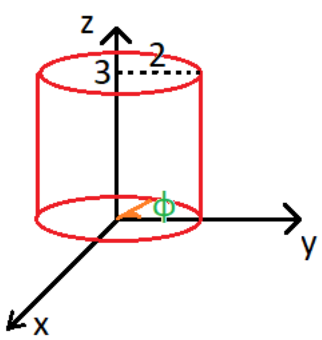
$$Q=\int_{y=-5}^{5} 24\times10^{-3}y^2 dy=24\times10^{-3}\left[\frac{y^3}{3}\right]_{-5}^{5}=24\times10^{-3}\left[\frac{5^3}{3}-\frac{(-5)^3}{3}\right]=$$

$$=24\times10^{-3}\left[\frac{125}{3}-\frac{-125}{3}\right]=2Cb$$

Άσκηση 3

Να βρεθεί το ολικό φορτίο που περιέχεται σε κύλινδρο που ορίζεται από τις συντεταγμένες ρ≤2 και 0≤z≤3 όταν η χωρική πυκνότητα δίνεται από τη σχέση ρ'=20ρz

Λύση



Προσοχή, έχουμε γράψει τη χωρική πυκνότητα φορτίου με ρ' και την ανεξάρτητη μεταβλητή των κυλινδρικών συντεταγμένων ως απλό ρ.

Το ολικό φορτίο σε αυτήν την περίπτωση δίνεται από το ολοκλήρωμα όγκου:

$$Q=\iiint_V \rho' dV$$

Το dV στις κυλινδρικές συντεταγμένες δίνεται από τη σχέση: **dV=ρdρdφdz.**

Αντικαθιστώ στο ολοκλήρωμα τη χωρική πυκνότητα ρ’ και το dV:

$Q=\iiint_V 20\rho z\rho d\rho d\varphi dz$ για να κάνω το ολοκλήρωμα όγκου απλό ολοκλήρωμα βάζω τα όρια ολοκλήρωσης:

$$Q=\int_{\rho=0}^{2}\int_{z=0}^{3}\int_{\varphi=0}^{2\pi} 20\rho z\rho d\rho d\varphi dz$$

Το φ το έβαλα από 0 ως 2π καθώς έχω έναν κανονικό κύλινδρο.

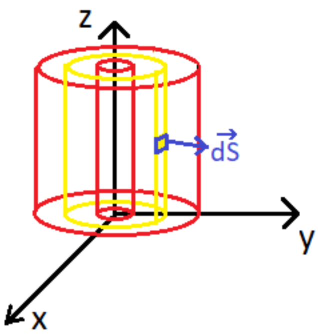
Η λύση του ολοκληρώματος είναι:

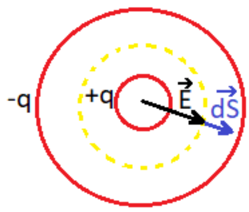
$$Q=\int_{\rho=0}^{2}\int_{z=0}^{3}\int_{\varphi=0}^{2\pi} 20\rho^2 zd\rho d\varphi dz=20\left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^2\left[\frac{z^2}{2}\right]_0^3\left[\varphi\right]_0^{2\pi}=\frac{1540\pi}{3}Cb$$

<u>Άσκηση 4</u>

Σε κυλινδρικό πυκνωτή ύψους h που οι οπλισμοί του φέρουν φορτίο q, να υπολογισθεί το ηλεκτρικό πεδίο ανάμεσα στους οπλισμούς του.

<u>Λύση</u>





Ο κύλινδρος στο σχήμα διαμορφώνεται ανάμεσα στις κόκκινες γραμμές, ενώ η κίτρινη γραμμή διαμορφώνει μια επιφάνεια Gauss, δηλαδή μια τυχαία κυλινδρική επιφάνεια ανάμεσα στους 2 οπλισμούς εντός του πυκνωτή, στον χώρο που θέλουμε να υπολογίσουμε το ηλεκτρικό πεδίο.

Θα κάνουμε χρήση του νόμου του Gauss:

$$\frac{Q}{\varepsilon_o}=\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}$$

Σύμφωνα με τον ορισμό για το εσωτερικό γινόμενο $\vec{E}\cdot d\vec{S}=\left|\vec{E}\right|\left|d\vec{S}\right|\cos\theta$. Προσοχή το θ είναι η γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα E και dS. Εδώ αυτή η γωνία είναι 0 άρα το συνημίτονο είναι 1. Άρα $\vec{E}\cdot d\vec{S}=\left|\vec{E}\right|\left|d\vec{S}\right|1=\left|\vec{E}\right|\left|d\vec{S}\right|$

$$\frac{Q}{\varepsilon_o} = \oiint_S \left|\vec{E}\right|\left|d\vec{S}\right| = \oiint_S \mathrm{E}dS$$

Στις κυλινδρικές συντεταγμένες, αφού το ρ είναι σταθερό, το dS δίνεται από τη σχέση: dS=ρdθdz. Προσοχή εδώ, το θ είναι η ανεξάρτητη μεταβλητή που χρησιμοποιώ στις κυλινδρικές συντεταγμένες και δεν έχει σχέση με το θ που χρησιμοποίησα παραπάνω που προκύπτει από τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου, άρα

$$\frac{Q}{\varepsilon_o} = \oiint_S \mathrm{E}\rho d\theta dz$$

Για να απαλλαγώ από το κλειστό ολοκλήρωμα επιφάνειας αντικαθιστώ τα όρια ολοκλήρωσης των θ και z οπότε:

$$\frac{Q}{\varepsilon_o} = \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{z=0}^{h} \mathrm{E}\rho d\theta dz = E\rho\left[\theta\right]_0^{2\pi}\left[z\right]_0^{h} = E\rho 2\pi h$$

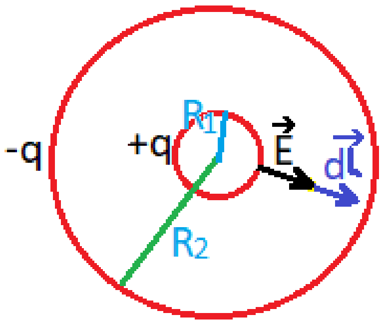
Λύνω ως προς Ε κα έχω

$$E = \frac{Q}{2\pi\rho h\varepsilon_o}$$

Άσκηση 5

Σε κυλινδρικό πυκνωτή με ακτίνα εσωτερικού πυκνωτή R_1 και εξωτερικού R_2 να υπολογισθεί η διαφορά δυναμικού μεταξύ των οπλισμών του πυκνωτή.

Λύση



Η διαφορά δυναμικού δίνεται από τη σχέση:

$$\Delta V = \int_C \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

Το εσωτερικό γινόμενο μεταξύ των δυο διανυσμάτων, επειδή τα διανύσματα είναι παράλληλα μεταξύ τους, είναι

$\vec{E}\cdot d\vec{l} = \left|\vec{E}\right|\left|d\vec{l}\right|\cos\theta = \left|\vec{E}\right|\left|d\vec{l}\right|\cos 0 = \mathrm{E}dl$, άρα

$$\Delta V = \int_C \mathrm{E}dl$$

Το dl είναι κατά μήκος της ακτίνας ρ που μεταβάλλεται από R_1 ως R_2, οπότε για να απαλλαγώ από το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα αντικαθιστώ το dl με τη μεταβλητή dρ και παίρνω το ηλεκτρικό πεδίο όπως το υπολόγισα στην προηγούμενη άσκηση.

$E = \dfrac{Q}{2\pi\rho h\varepsilon_o}$, οπότε

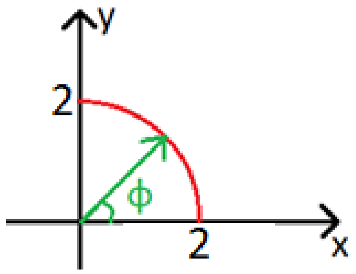
$$\Delta V = \int_C \mathrm{E}dl = \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{2\pi\rho h\varepsilon_o}d\rho = \frac{Q}{2\pi h\varepsilon_o}\int_{R_1}^{R_2}\frac{1}{\rho}d\rho =$$

$$= \frac{Q}{2\pi h\varepsilon_o}\left[\ln\rho\right]_{R_1}^{R_2} = \frac{Q\left(\ln R_2 - \ln R_1\right)}{2\pi h\varepsilon_o}$$

Άσκηση 6

Να υπολογισθεί το φορτίο τόξου κύκλου του σχήματος που φέρει γραμμική πυκνότητα φορτίου λ=3x Cb/m.

Λύση



Το ολικό φορτίο γραμμικής πυκνότητας φορτίου δίνεται από το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα:

$$Q = \int_C \lambda dl$$

Το dl στις κυκλικές συντεταγμένες με σταθερό r δίνεται από τη σχέση dl=rdφ. Αντικαθιστώ στο ολοκλήρωμα το λ και το dl και έχω:

$$Q = \int_C 3xrd\varphi$$

Εδώ πρέπει να προσέξω ότι εμπλέκονται μεταβλητές από 2 διαφορετικά συστήματα συντεταγμένων. Το x είναι από τις καρτεσιανές και τα r και φ είναι από τις πολικές. Πρέπει όλες να τις φέρω στο ίδιο σύστημα. Εδώ με συμφέρει να τα μετατρέψω όλα σε πολικές. Οπότε ισχύει ότι x=rcosφ και y=rsinφ. Αντικαθιστώ το x στο ολοκλήρωμα:

$$Q = \int_C 3r\cos\varphi rd\varphi$$

Καθώς το φ μεταβάλλεται από 0 ως π/2 διώχνω το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα:

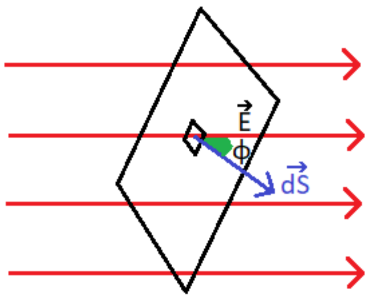
$$Q = 3r^2\int_0^{\pi/2}\cos\varphi d\varphi = 3r^2\left[\sin\varphi\right]_0^{\pi/2} = 3r^2\left[\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right] = 3r^2$$

Όπως φαίνεται στο σχήμα r=2m. Οπότε Q=12Cb.

Άσκηση 7

Να υπολογισθεί η ηλεκτρική ροή που διέρχεται από ορθογώνια επιφάνεια με πλευρές 2m και 3m που βρίσκεται μέσα σε σταθερό ομογενές πεδίο E=100N/Cb όταν η γωνία μεταξύ του διανύσματος της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου και του διανύσματος της επιφάνειας είναι 90° και 60°.

Λύση



Η ηλεκτρική ροή δίνεται από το ολοκλήρωμα επιφάνειας

$$\Phi_{\mathrm{E}} = \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

Θα κάνω χρήση του ορισμού εσωτερικού γινομένου,

Επομένως:

$$\Phi_{\mathrm{E}} = \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_S \left|\vec{E}\right|\left|d\vec{S}\right| \cos\varphi$$

Όπου φ είναι η γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου και το διάνυσμα της επιφάνειας. Αφού έχω ένα σταθερό ηλεκτρικό πεδίο το παραπάνω ολοκλήρωμα μπορεί να γραφτεί:

$$\Phi_{\mathrm{E}} = \iint_S \left|\vec{E}\right|\left|d\vec{S}\right| \cos\varphi = \iint_S \mathrm{E} dS \cos\varphi = \mathrm{E}\cos\varphi \iint_S dS$$

Μπορώ κατευθείαν να αντικαταστήσω το $\iint_S dS$ με το εμβαδόν του παραπάνω ορθογωνίου ή μπορώ να το τοποθετήσω στην αρχή των αξόνων και να το γράψω ως

$$\Phi_{\mathrm{E}} = \mathrm{E}\cos\varphi \int_{x=0}^{2} \int_{y=0}^{2} dxdy = \mathrm{E}\cos\varphi \left[x\right]_0^2 \left[y\right]_0^3 = E\cos\varphi 2\times 3 = 6E\cos\varphi$$

Διακρίνω 2 περιπτώσεις:

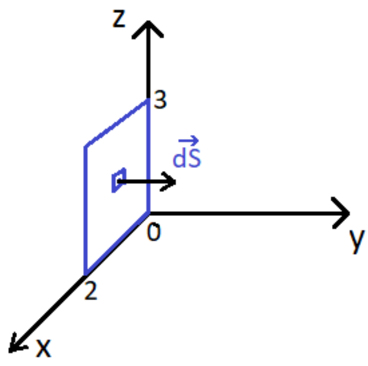
Α) φ=90° οπότε cosφ=0 άρα Φ_E=0 Nm^2/Cb

Β) φ=60° οπότε cosφ=1/2 άρα Φ_E=6×100/2=300 Nm^2/Cb

__Άσκηση 8__

Να βρεθεί το συνολικό ρεύμα που διαρρέει την επιφάνεια του σχήματος όταν η πυκνότητα φορτίου ισούται με $\vec{J} = az\hat{x} + bxy\hat{y}$

__Λύση__



Το ολικό ρεύμα θα δίνεται από το ολοκλήρωμα επιφάνειας

$$I = \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

Το διάνυσμα της πυκνότητας ρεύματος μας δίνεται. Το $\vec{dS}$=dxdz$\hat{y}$ καθώς είναι ένα διάνυσμα παράλληλο στον άξονα y και το μέτρο του είναι dxdz. Από το παραπάνω ολοκλήρωμα προκύπτει επομένως:

$$I = \iint_S \left(az\hat{x} + bxy\hat{y}\right) \cdot \left(dxdz\hat{y}\right)$$

αυτό είναι ένα εσωτερικό γινόμενο 2 διανυσμάτων οπότε από τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου έχω:

$$I = \iint_S bxydxdz$$

Για να απαλλαγώ από το ολοκλήρωμα επιφάνειας βάζω τα όρια ολοκήρωσης των αξόνων x και z, οπότε:

$$I = \iint_S bxydxdz = \int_{x=0}^{2}\int_{z=0}^{3} bxydxdz = by\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 [z]_0^3 = by \times \frac{4}{2} \times 3 = 6by\ A$$

__Άσκηση 9__

Να βρεθεί το συνολικό ρεύμα που διαρρέει τμήμα σφαιρικής επιφάνειας που οριοθετείται από τους εξής περιορισμούς: r=0.8m, π/2≤θ≤π και 0≤φ≤π όταν η πυκνότητα φορτίου στο μέσο δίνεται από την έκραση: $\vec{J} = \frac{400 sin\varphi}{2\pi(r^2+4)}\hat{r}$.

__Λύση__

Το ολικό ρεύμα θα δίνεται από το ολοκλήρωμα επιφάνειας

$$I = \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

Το διάνυσμα της πυκνότητας ρεύματος μας δίνεται. Το $\overrightarrow{dS}$ στην περίπτωση των σφαιρικών συντεταγμένων με σταθερό r αφού έχω τμήμα σφαιρικής επιφάνειας δίνεται από την έκφραση $\overrightarrow{dS}$=r^{2}sinθdθdφ$\hat{r}$. Επομένως το παραπάνω ολοκλήρωμα διαμορφώνεται ως:

$$I = \iint_S \left(\frac{400\sin\varphi}{2\pi\left(r^2+4\right)} \hat{r} \right) \cdot \left(r^2 \sin\theta d\theta d\varphi \hat{r} \right)$$

Έχω 2 παράλληλα διανύσματα, επομένως το εσωτερικό τους γινόμενο γίνεται:

$$I = \iint_S \frac{400\sin\varphi}{2\pi\left(r^2+4\right)} r^2 \sin\theta d\theta d\varphi = \frac{400r^2}{2\pi\left(r^2+4\right)} \iint_S \sin\varphi \sin\theta d\theta d\varphi$$

Βάζω τα όρια ολοκλήρωσης για να απαλλαγώ από το ολοκλήρωμα επιφάνειας:

$$I = \frac{400r^2}{2\pi\left(r^2+4\right)} \int_{\varphi=0}^{\pi} \int_{\theta=\pi/2}^{\pi} \sin\varphi \sin\theta d\theta d\varphi = \frac{400r^2}{2\pi\left(r^2+4\right)} \left[-\cos\varphi\right]_0^{\pi} \left[-\cos\theta\right]_{\pi/2}^{\pi}$$

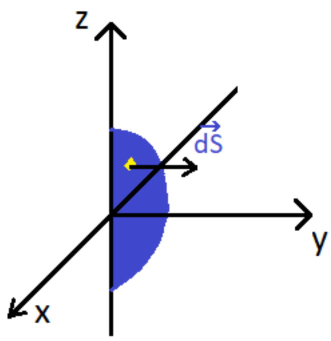
$$= \frac{400r^2}{2\pi\left(r^2+4\right)} 2\times 1 = \frac{400r^2}{\pi\left(r^2+4\right)}$$

Αφού το r=0.8m αντικαθιστώ και παίρνω: I=256/(4.64π) A.

Άσκηση 10

Να βρεθεί το συνολικό ρεύμα που διαρρέει τον κυκλικό δίσκο ακτίνας 1m που βρίσκεται στο xz επίπεδο του σχήματος όταν η πυκνότητα ρεύματος δίνεται από την έκφραση $\vec{J} = 3\hat{x} + 4\hat{y} + 10x^2z\hat{z}$.

Λύση



Το ολικό ρεύμα θα δίνεται από το ολοκλήρωμα επιφάνειας

$$I = \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

Το διάνυσμα της πυκνότητας ρεύματος μας δίνεται. Το $\overrightarrow{dS}$ στην περίπτωση των σφαιρικών συντεταγμένων αφού είναι παράλληλο στον άξονα y και πρόκειται για κυκλικό δίσκο δίνεται από την έκφραση $\overrightarrow{dS}$=rsinφdrdφ$\hat{y}$. Επομένως το παραπάνω ολοκλήρωμα διαμορφώνεται ως:

$$I = \iint_S \left(3\hat{x} + 4\hat{y} + 10x^2z\hat{z}\right) \cdot \left(r\sin\varphi dr d\varphi \hat{y}\right)$$

Εφαρμόζοντας τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου παίρνω:

$$I=\iint_S 4r\sin\varphi dr d\varphi = 4\iint_S r\sin\varphi dr d\varphi$$

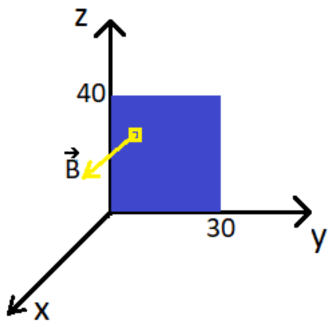
Τα όρια ολοκλήρωσης είναι 0≤φ≤π και 0≤r≤1:

$$I=4\int_{r=0}^{1}\int_{\varphi=0}^{\pi} r\sin\varphi dr d\varphi = 4\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^1 \left[-\cos\varphi\right]_0^{\pi} = 8\,\mathrm{A}$$

<u>Άσκηση 11</u>

Να υπολογισθεί η μαγνητική ροή που διέρχεται από την ορθογώνια επιφάνεια του σχήματος που βρίσκεται μέσα σε μαγνητικό πεδίο με μαγνητική επαγωγή $\vec{B}=3x\hat{x}+4z^2\hat{y}$

<u>Λύση</u>



Η μαγνητική ροή θα δίνεται από το ολοκλήρωμα επιφάνειας

$$\Phi_B=\iint_S \vec{B}\cdot d\vec{S}$$

Αντικαθιστώ τη μαγνητική επαγωγή και το διάνυσμα επιφάνειας $\overrightarrow{dS}$=dydz$\hat{x}$.

$$\Phi_B=\iint_S \left(3x\hat{x}+4z^2\hat{y}\right)\cdot\left(dydz\hat{x}\right)$$

Κάνοντας την πράξη του εσωτερικού γινομένου παίρνω:

$\Phi_B=\iint_S 3xdydz$ που επειδή δεν ολοκληρώνω ως προς x βγαίνει έξω από το ολοκλήρωμα $\Phi_B=3x\iint_S dydz$

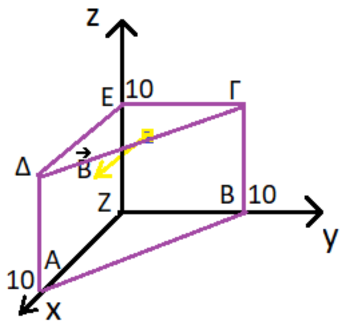
Τα όρια ολοκλήρωσης προκύπτουν από το σχήμα, οπότε:

$$\Phi_B=3x\int_{y=0}^{30}\int_{z=0}^{40} dydz = 3x\left[y\right]_0^{30}\left[z\right]_0^{40} = 3600x\ \mathrm{T}m^2$$

<u>Άσκηση 12</u>

Να υπολογισθεί η μαγνητική ροή που διέρχεται από τις πλευρές του παρακάτω πρίσματος όταν η μαγνητική ροή είναι σταθερή και ίση με $\vec{B}=40\hat{x}$

<u>Λύση</u>



Η μαγνητική ροή θα δίνεται από το ολοκλήρωμα επιφάνειας

$$\Phi_B = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

Εν προκειμένω με εξυπηρετεί να κάνω χρήση του ορισμού του εσωτερικού γινομένου

$\Phi_B = \iint_S |\vec{B}||d\vec{S}|\cos\theta$ όπου θ η γωνία μεταξύ της μαγνητικής επαγωγής και του διανύσματος $\overrightarrow{dS}$ της εκάστοτε πλευράς του πρίσματος. Πρέπει να διακρίνω 5 περιπτώσεις. Οι 3 πρώτες αφορούν τις πλευρές ΕΔΑΖ, ΕΔΓ, ΖΑΒ που το $\overrightarrow{dS}$ είναι κάθετο στο διάνυσμα της μαγνητικής επαγωγής $\vec{B}$ οπότε το cosθ=cos90º=0 και επομένως η μαγνητική ροή είναι ίση με μηδέν.

Η τέταρτη περίπτωση αφορά την πλευρά ΕΓΒΖ οπότε: cosθ=cos0=1, οπότε

$$\Phi_B = \iint_S |\vec{B}||d\vec{S}|\cos\theta = \iint_S B dS = \iint_S 40 dS = 40\iint_S dS = 40\times 100 = 4000Tm^2$$

Την πέμπτη περίπτωση αφορά την πλευρά ΑΒΓΔ που σχηματίζει γωνία με το διάνυσμα της μαγνητικής επαγωγής ίση με 45 μοίρες όπως προκύπτει με απλή γεωμετρία, οπότε:

$$\Phi_B = \iint_S |\vec{B}||d\vec{S}|\cos\theta = \iint_S B dS\cos\theta = \iint_S B dS\cos 45 = \frac{B\sqrt{2}}{2}\iint_S dS$$

Το $\iint_S dS$ αφορά το εμβαδόν της πλευράς ΑΒΓΔ που είναι ορθογώνιο με μια πλευρά ίση με 10m και η άλλη είναι υποτείνουσα τριγώνου ίση με $10\sqrt{2}m$. Οπότε το εμβαδόν είναι ίσο με $100\sqrt{2}m^2$. Οπότε η ροή είναι

$$\Phi_B = \frac{B\sqrt{2}}{2}100\sqrt{2} = 40*100 = 4000\,Tm^2$$