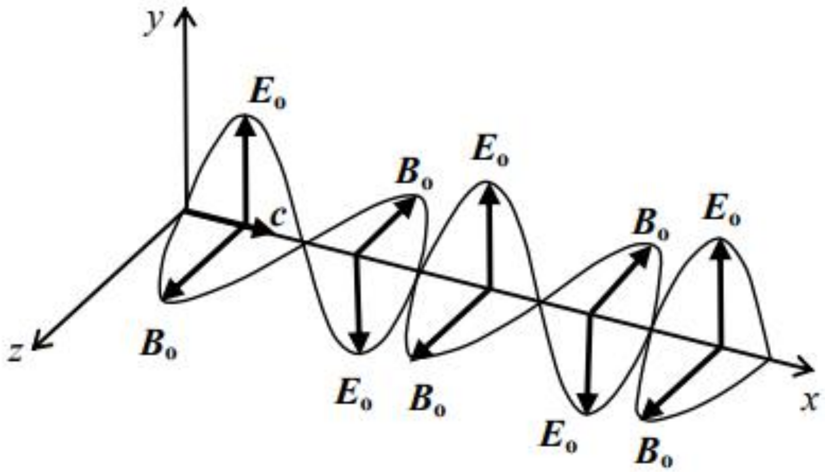
Παράδειγμα 1

Ένα ημιτονοειδές επίπεδο ΗΜ κύμα συχνότητας 40 MHz διαδίδεται προς την θετική κατεύθυνση x, όπως δείχνει το σχήμα. Σε κάποιο σημείο μια δεδομένη στιγμή, το ηλεκτρικό πεδίο E έχει τη μέγιστη τιμή των 750 N/C και είναι παράλληλο προς τον άξονα y. α) Υπολογίστε το μήκος και την περίοδο του κύματος. β) Υπολογίστε τη μέγιστη τιμή και την κατεύθυνση του μαγνητικού πεδίου. γ) Γράψτε τις εξισώσεις που περιγράφουν την μεταβολή του ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου του κύματος ως προς τον χώρο και τον χρόνο.

Λύση



α) Για την ταχύτητα του ΗΜ κύματος ισχύει

$$c = \lambda f \Rightarrow \lambda = \frac{c}{f} \Rightarrow \lambda = \frac{3\times10^{8}\,\mathrm{m/s}}{40\times10^{6}\,\mathrm{s^{-1}}} \Rightarrow \lambda = 7.50\mathrm{m}$$

Η περίοδος του κύματος είναι

$$T = \frac{1}{f} \Rightarrow T = \frac{1}{40\times10^{6}\,\mathrm{s^{-1}}} \Rightarrow T = 2.50\times10^{-8}\,\mathrm{s}$$

$$c = \lambda f \Rightarrow \lambda = \frac{c}{f} \Rightarrow \lambda = \frac{3\times10^{8}\,\mathrm{m/s}}{40\times10^{6}\,\mathrm{s}^{-1}} \Rightarrow \lambda = 7.50\mathrm{m}$$

Η περίοδος του κύματος είναι

$$T = \frac{1}{f} \Rightarrow T = \frac{1}{40\times10^{6}\,\mathrm{s}^{-1}} \Rightarrow T = 2.50\times10^{-8}\,\mathrm{s}$$

β) Για τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα ισχύει

$$c = \frac{E_o}{B_o} \Rightarrow B_o = \frac{E_o}{c} \Rightarrow B_o = \frac{750\mathrm{N/C}}{3\times10^{8}\,\mathrm{m/s}} \Rightarrow B_o = 2.50\times10^{-6}\,\mathrm{T}$$

Επειδή το ***B*** είναι κάθετο στο ***E*** με το επίπεδό τους να είναι κάθετο στην κατεύθυνση διάδοσης x, και εφόσον το ***E*** έχει την κατεύθυνση του άξονα y, το διάνυσμα ***B*** πρέπει να έχει την κατεύθυνση του άξονα z.
γ) Οι εξισώσεις του ημιτονοειδούς ΗΜ κύματος είναι

$$E = E_o \sin(kx - \omega t) \quad \text{και} \quad B = B_o \sin(kx - \omega t),$$

όπου E_o=750 N/C και B_o=2.50×10^{-6} T.

Για τον κυματαριθμό έχουμε

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{7.50\mathrm{m}} \Rightarrow k = 0.838\mathrm{m}^{-1},$$

ενώ για την κυκλική συχνότητα ισχύει

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{40\times10^{6}\,\mathrm{s}^{-1}} \Rightarrow \omega = 1.57\times10^{-7}\,\mathrm{rad/s}$$

Τελικά παίρνουμε τις εξισώσεις κύματος

$$E = 750\sin(0.838x - 1.57\times10^{-7}t),$$

και

$$B = 2.50\times10^{-6}\sin(0.838x - 1.57\times10^{-7}t)$$

Παράδειγμα 2

Ένα ηλεκτρομαγνητικό κύμα διαδίδεται στο χώρο και έχει ηλεκτρικό πεδίο $\boldsymbol{E} = -(3.10\times10^{5}\,\mathrm{V/m})\sin[ky-(12.65\times10^{12}\,\mathrm{rad.s^{-1}})t]\hat{\mathbf{z}}$. α) Προς ποια διεύθυνση διαδίδεται το κύμα; β) Ποιο είναι το μήκος κύματός του; γ) Διατυπώστε την κυματική εξίσωση για το πεδίο $\boldsymbol{B}(y,t)$.

Λύση

α) Όπως βλέπουμε το πεδίο $\boldsymbol{E}$ είναι παράλληλο προς τον άξονα z μιας και το πλάτος του είναι $\boldsymbol{E}_{o} = -(3.10\times10^{5}\,\mathrm{V/m})\hat{\mathbf{z}}$, δηλ. εκφράζεται με το μοναδιαίο διάνυσμα $-\hat{\mathbf{z}}$ του z άξονα. Επίσης, από την συνάρτηση του $\boldsymbol{E}$ βλέπουμε ότι υπάρχει στο ημίτονο χωρική εξάρτηση από την μετατόπιση y, επομένως συμπεραίνουμε ότι η διάδοση του κύματος γίνεται κατά μήκος του y άξονα.

β) Το μήκος κύματος δίνεται από την σχέση

$$c = \lambda f \Rightarrow \lambda = \frac{c}{f} \qquad (1)$$

όπου f είναι η συχνότητα του κύματος. Από την εξίσωση του $\boldsymbol{E}$ έχουμε ότι η γωνιακή συχνότητα του κύματος είναι $\omega = 12.65\times10^{12}\,\mathrm{rad.s^{-1}}$. Έτσι μπορούμε να γράψουμε

$$\omega = 2\pi f \Rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} \qquad (2)$$

Η εξ. 2 στην 1 δίνει

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega} \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi\times3\times10^{8}\,\mathrm{m/s}}{12.65\times10^{12}\,\mathrm{rad.s^{-1}}} \Rightarrow \lambda = 1.5\times10^{-4}\,\mathrm{m}$$

γ) Η κυματική εξίσωση του μαγνητικού πεδίου $\boldsymbol{B}(y,t)$ είναι ανάλογη αυτής του $\boldsymbol{E}(y,t)$. Καταρχήν γνωρίζουμε ότι το μαγνητικό πεδίο είναι κάθετο πάντα στο ηλεκτρικό και διαδίδεται στην ίδια κατεύθυνση και με τα ίδια ω και k με αυτό. Επομένως, συμπεραίνουμε ότι το $\boldsymbol{B}$ είναι παράλληλο στον άξονα x και διαδίδεται στην κατεύθυνση y. Από τα παραπάνω μπορούμε να γράψουμε ότι

$$\boldsymbol{B} = B_{o}\sin[ky-(12.65\times10^{12}\,\mathrm{rad.s^{-1}})t]\hat{x} \qquad (3)$$

Το πλάτος του μαγνητικού πεδίου B_o το ευρίσκουμε από την σχέση

$$E = cB \Rightarrow E_o = cB_o \Rightarrow B_o = \frac{E_o}{c} \Rightarrow B_o = \frac{3.10\times10^5\,\mathrm{V/m}}{3\times10^8\,\mathrm{m/s}} \Rightarrow B_o = 1.03\times10^{-3}\,\mathrm{T}$$

Επειδή το $\boldsymbol{B}_o \perp \boldsymbol{E}_o$ και το $\boldsymbol{E}_o$ κείται στον $-z$ ημιάξονα, το $\boldsymbol{B}_o$ θα κείται στον $-x$ ημιάξονα. Επίσης ο κυματαριθμός μπορεί να υπολογιστεί ως

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{1.5\times10^{-4}\,\mathrm{m}} \Rightarrow k = 4.2\times10^4\,\mathrm{m}^{-1}$$

Τελικά καταλήγουμε για την εξίσωση $\boldsymbol{B}(y,t)$

$$\boldsymbol{B} = -(1.03\times10^{-3}\,\mathrm{T})\sin[(4.2\times10^4\,\mathrm{m}^{-1})\,y - (12.65\times10^{12}\,\mathrm{rad.s}^{-1})\,t]\,\hat{x}$$

Παράδειγμα 3

Ποιο είναι το μήκος κύματος σε μέτρα και νανόμετρα α) ακτίνων-γ συχνότητας 6.50×10^{21}Hz, και β) ορατού φωτός συχνότητας 5.75×10^{14} Hz; Σε κάθε περίπτωση θεωρείστε την ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία διαδιδόμενη στον αέρα.

Λύση

α) Για την διάδοση ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων στον αέρα ισχύει

$$c = \lambda f \Rightarrow \lambda = \frac{c}{f} \Rightarrow \lambda = \frac{3\times10^{8}\,\mathrm{m/s}}{6.50\times10^{21}\,\mathrm{s^{-1}}} \Rightarrow \lambda = 4.61\times10^{-14}\,\mathrm{m}$$

Η ίδια ποσότητα εκφράζεται σε νανόμετρα ως $\lambda = 4.61\times10^{-5}\,\mathrm{nm}$

β) Ομοίως για f=5.75×10^{14} Hz ευρίσκουμε

$$\lambda = \frac{3\times10^{8}\,\mathrm{m/s}}{5.75\times10^{14}\,\mathrm{s^{-1}}} \Rightarrow \lambda = 5.21\times10^{-7}\,\mathrm{m} \quad \text{ή} \quad \lambda = 521\ \mathrm{nm}.$$

Παράδειγμα 4

Το ηλεκτρικό πεδίο ενός ηλεκτρομαγνητικού κύματος δίνεται από την υπέρθεση 2 κυμάτων:

$$\vec{\mathrm{E}} = \mathrm{E}_o \cos(kz - \omega t)\hat{x} + \mathrm{E}_o \cos(kz + \omega t)\hat{x}$$

Να βρεθεί το διάνυσμα Poynting.

Λύση

Το διάνυσμα Poynting δίνεται από τη σχέση: $\vec{S} = \dfrac{1}{\mu_o}\vec{\mathrm{E}} \times \vec{\mathrm{B}}$

Καθώς γνωρίζουμε το ηλεκτρικό πεδίο θα υπολογίσουμε το μαγνητικό πεδίο από τη εξίσωση Maxwell: $\vec{B} = -\int \vec{\nabla} \times \vec{E}\,\mathrm{dt}$

Το διάνυσμα της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου μπορεί να γραφτεί: $\vec{\mathrm{E}} = \mathrm{E}_x\hat{x} + \mathrm{E}_y\hat{y} + \mathrm{E}_z\hat{z}$

Όπου $\mathrm{E}_x = \mathrm{E}_o \cos(kz - \omega t) + \mathrm{E}_o \cos(kz + \omega t), \quad \mathrm{E}_y = 0, \quad \mathrm{E}_z = 0$

Αναλύοντας την ορίζουσα

$$\vec{B} = -\int \vec{\nabla} \times \vec{E}\,\mathrm{dt} = -\int \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ E_x & 0 & 0 \end{vmatrix} \mathrm{dt} = -\int -\left(\frac{\partial 0}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z}\right)\hat{y}\,\mathrm{dt} = \int -\left(\frac{\partial E_x}{\partial z}\right)\hat{y}\,\mathrm{dt} =$$

Παραγώγιση ως προς z

$$-\hat{y}\int \frac{\partial E_x}{\partial z}dt = -\hat{y}\int \frac{\partial(E_o\cos(kz-\omega t)+E_o\cos(kz+\omega t))}{\partial z}dt = -\hat{y}\int (kE_o\cos(kz-\omega t)+kE_o\cos(kz+\omega t))dt =$$

$$-\hat{y}\left(-\frac{kE_o}{\omega}\cos(kz-\omega t)+\frac{kE_o}{\omega}\cos(kz+\omega t)\right)\Rightarrow \vec{B}=\left(\frac{kE_o}{\omega}\cos(kz-\omega t)-\frac{kE_o}{\omega}\cos(kz+\omega t)\right)\hat{y}$$

$$\acute{A}\rho\alpha \quad \vec{B}=B_y\hat{y} \quad \acute{o}\pi o\upsilon \quad B_y=\frac{kE_o}{\omega}\cos(kz-\omega t)-\frac{kE_o}{\omega}\cos(kz+\omega t)$$

Άρα το διάνυσμα του μαγνητικού πεδίου ταλαντώνεται στον άξονα y.

Αναλύοντας την ορίζουσα

Το διάνυσμα Poynting δίνεται από τη σχέση $\vec{S}=\frac{1}{\mu_o}\vec{E}\times\vec{B}=\frac{1}{\mu_o}\begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ E_x & 0 & 0\\ 0 & B_y & 0\end{vmatrix}=\frac{1}{\mu_o}(E_xB_y)\hat{z}=$

$$=\frac{1}{\mu_o}(E_o\cos(kz-\omega t)+E_o\cos(kz+\omega t))\left(\frac{kE_o}{\omega}\cos(kz-\omega t)-\frac{kE_o}{\omega}\cos(kz+\omega t)\right)\hat{z}$$

Παράδειγμα 5

Το 10% της ισχύος ενός λαμπτήρα 100 W, ακτινοβολείται ομοιόμορφα προς όλες τις κατευθύνσεις ως φως. Υπολογίστε τα μεγέθη των μεγίστων ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου E_o και B_o αυτής της ορατής ακτινοβολίας σε απόσταση 3.00 m από την φωτεινή πηγή. Δίδεται $\mu_o = 4\pi\times10^{-7}$ W/A·m.

Λύση

Η ένταση του φωτεινού κύματος σε απόσταση r από την πηγή είναι

$$I = \frac{\bar{P}}{4\pi r^2} \qquad (1)$$

όπου P=0.1×100 W, και r=3.00 m.

Όμως η ένταση I είναι η μέση τιμή του διανύσματος Poynting $\bar{S}$, άρα

$$I = \bar{S} = \frac{1}{2c\mu_o}E_o^2 \Rightarrow E_o^2 = 2c\mu_o I \Rightarrow E_o = \sqrt{2c\mu_o I} \qquad (2)$$

Η εξ. 1 στην 2 δίνει

$$E_o = \sqrt{2c\mu_o\frac{\bar{P}}{4\pi r^2}} \Rightarrow E_o = \sqrt{c\mu_o\frac{\bar{P}}{2\pi r^2}} = \sqrt{3\times10^8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\times4\pi\times10^{-7}\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{A\cdot m}}\,\frac{0.1\times100\mathrm{W}}{2\pi(3\mathrm{m})^2}} \Rightarrow E_o = 8.16\mathrm{V/m}$$

Για να υπολογίσουμε το B_o, γνωρίζουμε ότι ισχύει

$$E_o = cB_o \Rightarrow B_o = \frac{E_o}{c} \Rightarrow B_o = \frac{8.16\mathrm{V/m}}{3\times10^8\,\mathrm{m/s}} \Rightarrow B_o = 2.72\times10^{-8}\,\mathrm{T}$$