

Ασαφής Λογική

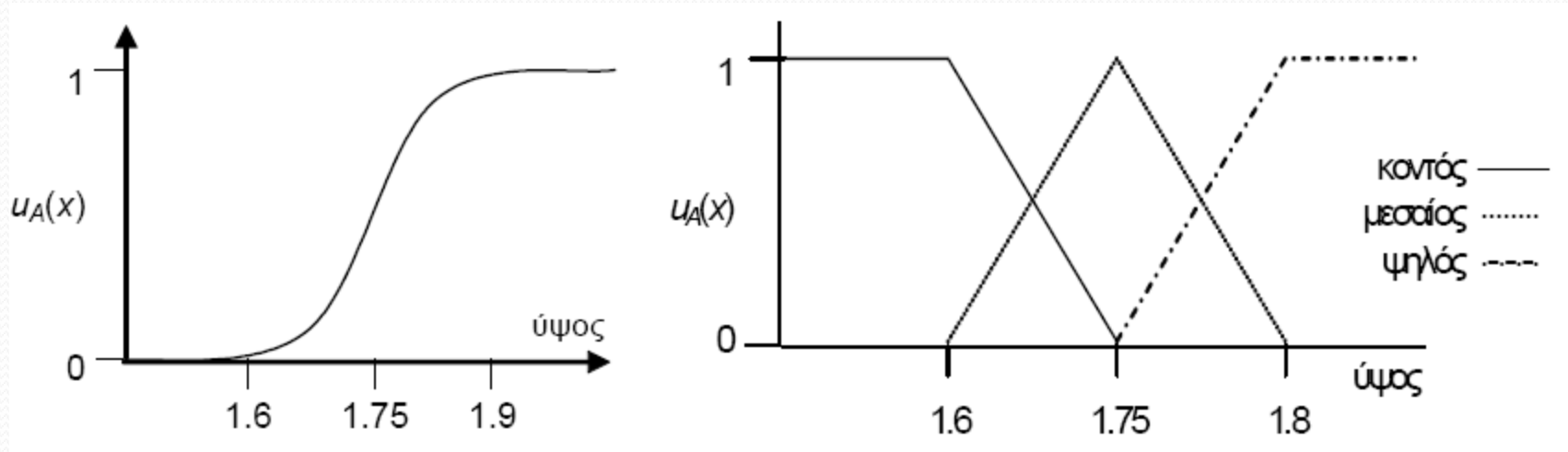
Ασάφεια (Fuzziness)

- Έννοια που σχετίζεται με την ποσοτικοποίηση της πληροφορίας και οφείλεται κυρίως σε μη-ακριβή (*imprecise*) δεδομένα.
- "Ο Νίκος είναι ψηλός"
- Το πρόβλημα οφείλεται στην αντίληψη που έχει ο καθένας για λεκτικούς προσδιορισμούς ποσοτικών μεγεθών (σημασιολογική ασάφεια)
- Εγγενές χαρακτηριστικό της γλώσσας.
- Ασαφής Λογική (*fuzzy logic*): υπερσύνολο της κλασικής λογικής
 - χειρίζεται τιμές αληθείας μεταξύ του "απολύτως αληθούς" και του "απολύτως ψευδούς".
- Θεωρία Ασαφών Συνόλων (*Fuzzy Set Theory*) - Lofti Zadeh '60

Βασικές Έννοιες Ασαφών Συνόλων

- *Ασαφές Σύνολο (fuzzy set) A*: ένα σύνολο διατεταγμένων ζευγών $(x, u_A(x))$ όπου $x \in X$ και $u_A(x) \in [0,1]$.
 - Το σύνολο X περιλαμβάνει όλα τα αντικείμενα στα οποία μπορεί να γίνει αναφορά.
 - $u_A(x)$: βαθμός αληθείας (*degree of truth*) - τιμές στο διάστημα $[0,1]$.
 - Η συνάρτηση u_A ονομάζεται *συνάρτηση συγγένειας (membership function)*.
- Προέλευση u_A :
 - Υποκειμενικές εκτιμήσεις
 - Προκαθορισμένες (ad hoc) μορφές
 - Συχνότητες εμφανίσεων και πιθανότητες
 - Φυσικές μετρήσεις
 - Διαδικασίες μάθησης και προσαρμογής (νευρωνικά δίκτυα)

Αναπαράσταση Ασαφών Συνόλων



- Αναλυτική έκφρασης της u_A
- Απλούστευση: τμηματικώς γραμμικής απεικόνιση της u_A
- Σύνολο ζευγών της μορφής $u_A(x)/x$
 - Π.χ. ψηλός = $\{0/1.7, 0/1.75, 0.33/1.8, 0.66/1.85, 1/1.9, 1/1.95\}$
- Με ζεύγη της μορφής $(x, u_A(x))$:
 - Π.χ. ψηλός = $\{ (1.7, 0), (1.75, 0), (1.8, 0.33), (1.85, 0.66), (1.9, 1), (1.95, 1) \}$

Ασαφείς Σχέσεις 1/2

- Ασαφή σύνολα ορισμένα σε πεδία αναφοράς ανώτερης διάστασης.
 - Παράδειγμα: $R = "x \text{ είναι βαρύτερο από } y"$ $x \in X, y \in Y$ και $R \in X \times Y$
- Αναπαράσταση της R , σε μορφή πίνακα:

$$R = \begin{bmatrix} u_R(x_1, y_1) & u_R(x_1, y_2) & \cdots & u_R(x_1, y_n) \\ u_R(x_2, y_1) & u_R(x_2, y_2) & \cdots & u_R(x_2, y_n) \\ \vdots & & & \\ u_R(x_m, y_1) & u_R(x_m, y_2) & \cdots & u_R(x_m, y_n) \end{bmatrix}$$

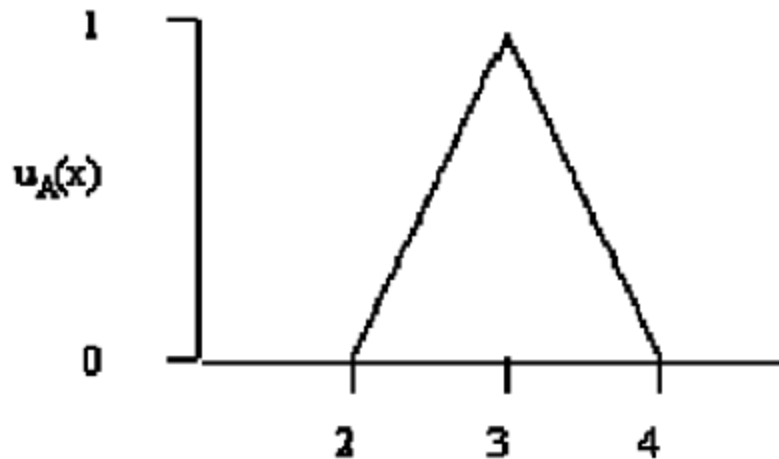
- **Σύνθεση (composition)** Ασαφών Σχέσεων: συνδυασμός ασαφών σχέσεων.
 - Πρέπει να προσδιοριστεί η συνάρτηση συγγένειας $u_R(x, z)$ της R , με χρήση των συναρτήσεων συγγένειας των R_1 και R_2 , δηλαδή των $u_{R_1}(x, y)$ και $u_{R_2}(y, z)$.

Ασαφείς Σχέσεις 2/2

- Σύνθεση *max-min* (*max-min composition*)
- Σύνθεση *max-product* (*max-product composition*).
- Αν $R_1(x,y)$ και $R_2(y,z)$ είναι δύο ασαφείς σχέσεις ορισμένες στα σύνολα $X \times Y$ και $Y \times Z$ αντίστοιχα, τότε η σύνθεσή τους δίνει μία νέα σχέση $R_1 \circ R_2$ ορισμένη στο $X \times Z$ με συνάρτηση συγγένειας:
 - Σύνθεση *max-min*:
$$u_{R_1 \circ R_2}(x,z) = \bigvee_y [u_{R_1}(x,y) \wedge u_{R_2}(x,y)]$$
 - Σύνθεση *max-product*:
$$u_{R_1 \circ R_2}(x,z) = \bigvee_y [u_{R_1}(x,y) \cdot u_{R_2}(x,y)]$$

Ασαφείς Μεταβλητές και Ασαφείς Αριθμοί

- *Ασαφής Μεταβλητή (fuzzy variable)*: οι τιμές τις ορίζονται με ασαφή σύνολα.
 - Π.χ. τα ασαφή σύνολα {κοντός, μεσαίος, ψηλός} θα μπορούσαν να είναι το πεδίο τιμών της ασαφούς μεταβλητής "ύψος".
 - "ύψος": λεκτική (*linguistic*) μεταβλητή.
- *Ασαφείς αριθμοί (fuzzy numbers)*: ασαφή υποσύνολα του συνόλου των πραγματικών αριθμών. Π.χ. "Ασαφές 3" στο σχήμα.
- μη ασαφείς τιμές: *crisp* (σαφείς, συγκεκριμένες).



Η Αρχή της Επέκτασης _{1/2}

- Επέκταση των εννοιών και των υπολογιστικών τεχνικών των κλασσικών μαθηματικών στο πλαίσιο των ασαφών.
- συνάρτηση f : ορίζει απεικόνιση του $X=\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ στο $Y=\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$, έτσι ώστε $y_1=f(x_1), y_2=f(x_2), \dots, y_n=f(x_n)$.
- ασαφές σύνολο A ορισμένο στα στοιχεία του X
$$A = \{ u_A(x_1)/x_1, u_A(x_2)/x_2, \dots, u_A(x_n)/x_n \}$$
- Αν η είσοδος x της συνάρτησης f γίνει ασαφής μέσω του συνόλου A , τότε τι συμβαίνει με την έξοδο y ;

- **Αρχή Επέκτασης:** υπολογισμός ασαφούς συνόλου B με εφαρμογή της f στο A .

$$B = f(A) = \{ u_A(x_1)/f(x_1), u_A(x_2)/f(x_2), \dots, u_A(x_n)/f(x_n) \}$$

- δηλαδή, κάθε $y_i=f(x_i)$ γίνεται ασαφές σε βαθμό $u_A(x_i)$
- πρακτικά, η $u_B(y)$ προκύπτει από την $u_A(x)$ όπου το x αντικαθίσταται με την έκφραση που προκύπτει για αυτό από την επίλυση της f ως προς x

Η Αρχή της Επέκτασης 2/2

- Ειδικές Περιπτώσεις
 - αν περισσότερα του ενός διαφορετικά x (έστω τα x_m και x_n) δίνουν μέσω της συνάρτησης f το ίδιο y (έστω το y_0), τότε: $u_B(y_0) = u_A(x_m) \vee u_A(x_n)$.
 - η μέγιστη τιμή συγγένειας των x_m και x_n στο A επιλέγεται ως βαθμός συγγένειας του y_0 στο B
 - αν για κάποιο y_0 του B δεν υπάρχει x_0 του A τέτοιο ώστε $y_0 = f(x_0)$, τότε η τιμή συγγένειας του B στο y_0 είναι μηδέν.
- Γενίκευση σε περισσότερες διαστάσεις:
 - αν υπάρχουν οι μεταβλητές $u, v, \dots, w$ ορισμένες στα σύνολα $U, V, \dots, W$ αντίστοιχα
 - m διαφορετικά ασαφή σύνολα $A_1, A_2, \dots, A_m$ ορισμένα στο $U \times V \times \dots \times W$
 - η πολυπαραμετρική συνάρτηση $y = f(u, x, \dots, w)$
- τότε η ασαφοποίηση του χώρου των y , δηλαδή η συνάρτηση συγγένειας του συνόλου B , ορίζεται ως εξής:

$$u_B(y) = \bigvee_{U \times V \times \dots \times W} [u_{A_1}(u) \wedge u_{A_2}(v) \wedge \dots \wedge u_{A_m}(w)] / f(u, y, \dots, w)$$

Παράδειγμα Χρήσης Αρχής Επέκτασης $1/2$

- Πρόσθεση των αριθμών A:"ασαφές 3" και B:"ασαφές 7"
 - A: "ασαφές 3" = { 0/1, 0.5/2, 1/3, 0.5/4, 0/5 }
 - B: "ασαφές 7" = { 0/5, 0.5/6, 1/7, 0.5/8, 0/9 }
- Κατασκευάζεται ο πίνακας:

A		x=1	x=2	x=3	x=4	x=5
B		$\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 0 & 0.5 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 0 & 0.5 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}$
	y=5	$\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 0 & 0.5 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 0 & 0.5 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}$
	y=6	$\begin{smallmatrix} 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 0.5 & 1 \\ 0.5 & 0 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0 \end{smallmatrix}$
	y=7	$\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 1 & 0.5 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 1 & 0.5 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}$
	y=8	$\begin{smallmatrix} 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 0.5 & 1 \\ 0.5 & 0 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0 \end{smallmatrix}$
	y=9	$\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 0 & 0.5 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 0 & 0.5 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}$

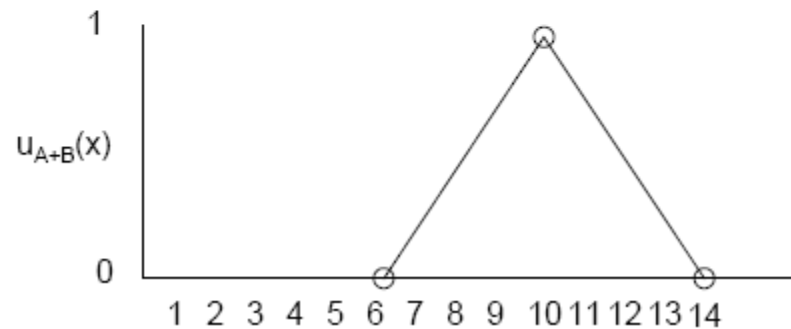
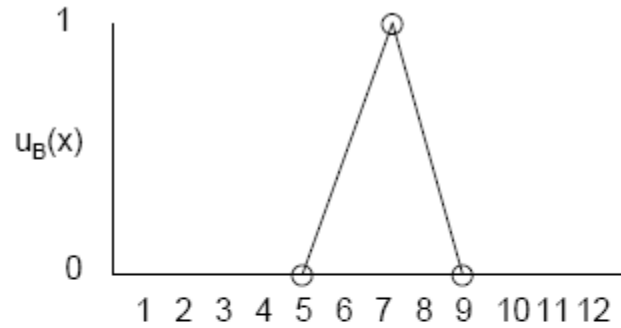
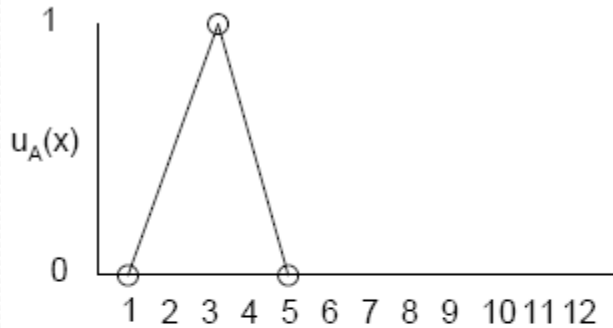
- Σύμφωνα με την αρχή της επέκτασης θα είναι:

$$u_{C=A+B}(z) = \bigvee_{z=x+y} [u_A(x) \wedge u_B(y)] / (x + y)$$

Παράδειγμα Χρήσης Αρχής Επέκτασης _{2/2}

- Έστω $z=9$. Υπάρχουν δύο συνδυασμοί x και y που μας δίνουν άθροισμα 9.
- αρχή της επέκτασης:
$$u_{A+B}(9) = \max(\min(u_A(4), u_B(5)), \min(u_A(3), u_B(6)), \min(u_A(2), u_B(7)), \min(u_A(1), u_B(8))) =$$
$$\max(\min(0.5, 0), \min(1, 0.5), \min(0.5, 1), \min(0, 0.5)) =$$
$$\max(0, 0.5, 0.5, 0) = 0.5$$
- Άρα: ο βαθμός συγγένειας του $z=9$ στο ασαφές σύνολο $C=A+B$ είναι 0.5.
- όμοια για τα υπόλοιπα στοιχεία του πίνακα, οπότε προκύπτει:
$$u_{A+B}(z) = \{ 0/7, 0.5/8, 0.5/9, 1/10, 0.5/11, 0.5/12, 0/13 \}$$

Παράδειγμα Γραφικής Επίλυσης



Παράδειγμα Άμεσης Εφαρμογής Αρχής Επέκτασης

- Έστω η $y=f(x)$:

$$y = f(x) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}$$

- Έστω ότι το x γίνεται ασαφές μέσω της: $u_A(x) = 1/2 \cdot x$

- Η έξοδος y της f γίνεται ασαφής με το $u_B(y)$ να προκύπτει με επίλυση της f ως προς x :

$$x = 2\sqrt{1 - y^2}$$

και αντικατάσταση στην $u_A(x)$:

$$u_B(y) = u_A(2\sqrt{1 - y^2}) = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{1 - y^2} = \sqrt{1 - y^2}$$

Ασαφείς Προτάσεις και Ασαφείς Κανόνες

- *Ασαφής πρόταση* είναι αυτή που θέτει μια τιμή σε μια ασαφή μεταβλητή.
- *Ασαφής κανόνας (fuzzy rule)*: είναι μία υπό συνθήκη έκφραση που συσχετίζει δύο ή περισσότερες ασαφείς προτάσεις.
 - "Εάν η ταχύτητα είναι μέτρια τότε η πίεση στα φρένα να είναι μέτρια"
- Η αναλυτική περιγραφή ενός ασαφούς κανόνα if-then είναι μία ασαφής σχέση $R(x,y)$ που ονομάζεται *σχέση συνεπαγωγής (implication relation)*.
- Γενική της μορφή της σχέσης (συνάρτησης) συνεπαγωγής:

$$R(x,y) \equiv u(x,y) = \varphi(u_A(x), u_B(y))$$

- φ : τελεστής συνεπαγωγής (implication operator)

Μερικοί Ασαφείς Τελεστές Συνεπαγωγής

Ονομασία Τελεστή	Αναλυτική Έκφραση του $\phi[u_A(x), u_B(y)]$
ϕ_m : Zadeh Max-Min	$(u_A(x) \wedge u_B(y)) \vee (1 - u_A(x))$
ϕ_c : Mandani Min	$u_A(x) \wedge u_B(y)$
ϕ_p : Larsen Product	$u_A(x) \bullet u_B(y)$
ϕ_a : Arithmetic	$1 \wedge (1 - u_A(x) + u_B(y))$
ϕ_b : Boolean	$(1 - u_A(x)) \vee u_B(y)$

Συλλογιστικές Διαδικασίας GMP και GMT

- Γενική μορφή προβλημάτων κατά τη συλλογιστική με ασαφείς κανόνες:
 - **if x is A then y is B**
 - **x is A' y is B' (?) μέσω της συλλογιστικής διαδικασίας GMP (Generalized Modus Ponens - GMP): $B' = A' \circ R(x, y)$**
 - **if x is A then y is B**
 - **x is A' (?) y is B' μέσω της συλλογιστικής διαδικασίας GMT (Generalized Modus Tollens - GMT): $A' = R(x, y) \circ B'$**
- Η σχέση συνεπαγωγής $R(x, y)$ που έχει επιλεγεί να χρησιμοποιηθεί, πρέπει να συνδυαστεί (σύνθεση) με την κατά περίπτωση γνωστή παράμετρο (A' ή B') ώστε να υπολογιστεί η άγνωστη παράμετρος.

Σύνοψη Ασαφούς Συλλογιστικής Διαδικασίας

- Με βάση έναν ασαφή κανόνα της μορφής:

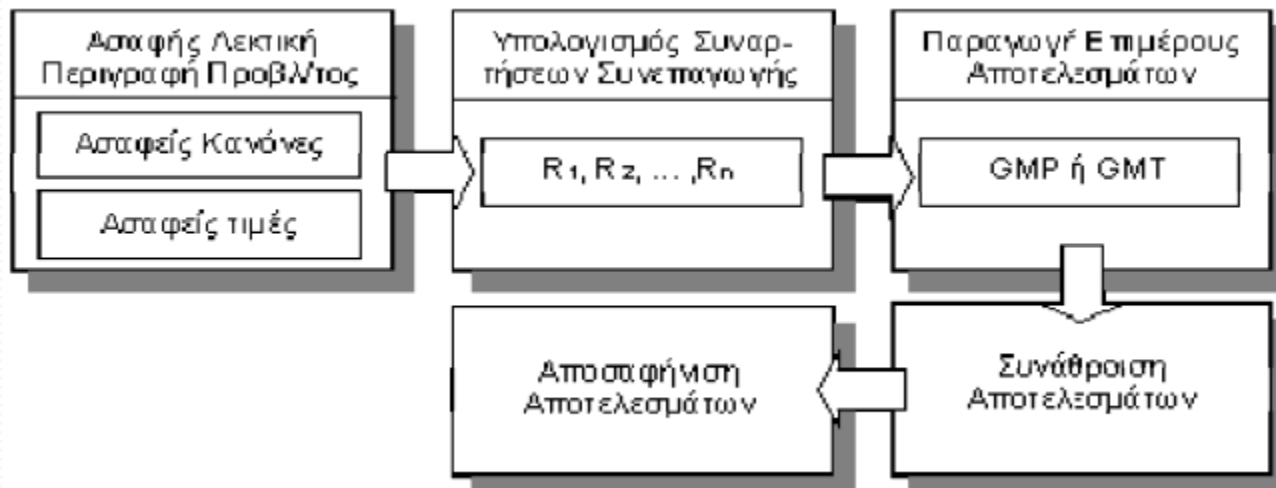
"if x is A then y is B "

- και έστω συλλογιστική διαδικασία GMP (δηλαδή γνωστό το A' ως τιμή του x και ζητούμενο το B' ως τιμή του y), τα ασαφή σύνολα A και B συνδυάζονται με κάποιον από τους τελεστές συνεπαγωγής και παράγουν τη σχέση συνεπαγωγής $R(x,y)$.
- Από την $R(x,y)$ μέσω σύνθεσης (έστω *max-min* σύνθεση) με το A' προκύπτει η άγνωστη ποσότητα B' :

$$B' = A' \circ R(x,y)$$

Ασαφής Συλλογιστική

- Εξαγωγή συμπερασμάτων με χρήση ασαφών κανόνων.
- Τέσσερα στάδια:
 - ❑ Υπολογισμός της συνάρτησης συνεπαγωγής για κάθε εμπλεκόμενο κανόνα.
 - ❑ Παραγωγή επιμέρους αποτελεσμάτων μέσω κάποιας συλλογιστικής διαδικασίας.
 - ❑ Συνάθροιση των επιμέρους αποτελεσμάτων.
 - ❑ Αποσαφήνιση αποτελεσμάτων.



Παράδειγμα Προβλήματος Ασαφούς Συλλογιστικής $_{1/2}$

- Έστω σύστημα που ρυθμίζει τη δόση D μιας φαρμακευτικής ουσίας που πρέπει να χορηγηθεί σε ασθενή, με βάση τη θερμοκρασία του T .
- Έστω ότι το σύστημα βασίζεται στους εξής δύο ασαφείς κανόνες:

K_1 : if T is HIGH then D is HIGH

K_2 : if T is LOW then D is LOW

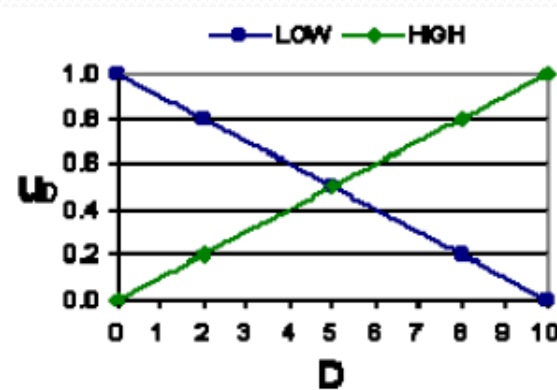
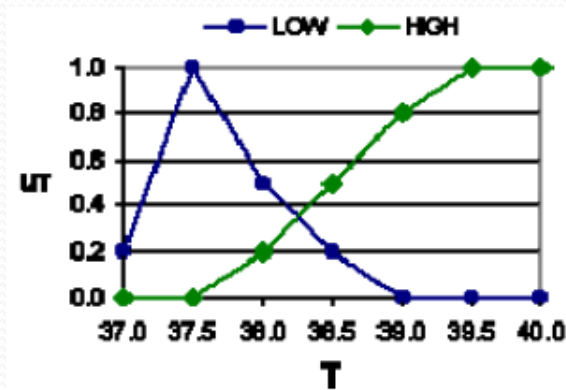
- Δίνονται επίσης τα ασαφή σύνολα HIGH και LOW για τα μεγέθη T και D :

$$T_{\text{LOW}} = \{ 0.2/37, 1/37.5, 0.5/38, 0.2/38.5, 0/39, 0/39.5, 0/40 \}$$

$$T_{\text{HIGH}} = \{ 0/37, 0/37.5, 0.2/38, 0.5/38.5, 0.8/39, 1/39.5, 1/40 \}$$

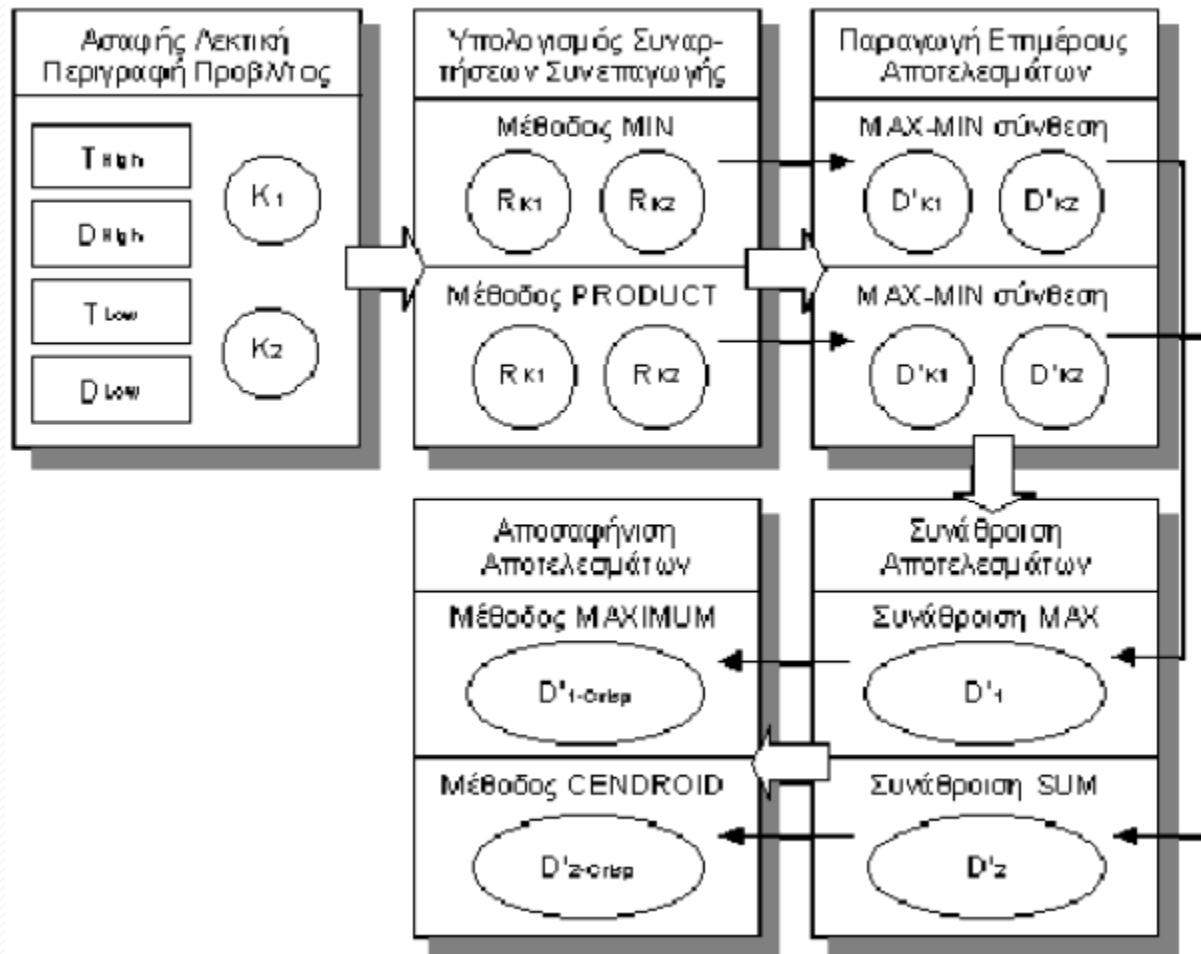
$$D_{\text{LOW}} = \{ 1/0, 0.8/2, 0.5/5, 0.2/8, 0/10 \}$$

$$D_{\text{HIGH}} = \{ 0/0, 0.2/2, 0.5/5, 0.8/8, 1/10 \}$$



- Αν $T'=38.5$, να υπολογιστεί η τιμή του D' με συλλογιστική διαδικασία GMP.

Παράδειγμα Προβλήματος Ασαφούς Συλλογιστικής 2/2



Βήμα A₁: Υπολογισμός συνάρτησης συνεπαγωγής

Μέθοδος MIN

- 2 κανόνες: δύο τελεστές συνεπαγωγής, οι R_{K1} και R_{K2} .
- Χρησιμοποιείται ο τελεστής συνεπαγωγής Mandani min (ή απλά MIN).

K_1 : if T is HIGH then D is HIGH - K_2 : if T is LOW then D is LOW

- Έστω ο $K1$. Κατασκευάζεται ο πίνακας αριστερά:

R_{K1}	D	0	2	5	8	10
T	0	0	0.2	0.5	0.8	1
37.0		0	0	0	0	0
37.5	0	0	0	0	0	0
38.0	0.2	0	0.2	0.2	0.2	0.2
38.5	0.5	0	0.2	0.5	0.5	0.5
39.0	0.8	0	0.2	0.5	0.8	0.8
39.5	1	0	0.2	0.5	0.8	1
40.0	1	0	0.2	0.5	0.8	1

R_{K2}	D	0	2	5	8	10
T	0.2	1	0.8	0.5	0.2	1
37.0		0.2	0.2	0.2	0.2	0
37.5	1	1	0.8	0.5	0.2	0
38.0	0.5	0.5	0.5	0.5	0.2	0
38.5	0.2	0	0.2	0.2	0.2	0
39.0	0	0	0	0	0	0
39.5	0	0	0	0	0	0
40.0	0	0	0	0	0	0

- Κάθε κελί του εσωτερικού πίνακα περιέχει το $\min(uT_{HIGH}, uD_{HIGH})$ για τα T και D της γραμμής και στήλης στην οποία βρίσκεται.
- Όμοια προκύπτει και η $R_{K2}(T_{LOW}, D_{LOW})$ για τον κανόνα K_2 (πίνακας δεξιά)
- Γενίκευση: αν N εκφράσεις στο if τμήμα τότε προκύπτει πίνακας N+1 διαστάσεων.

Βήμα A₂: Παραγωγή επιμέρους αποτελεσμάτων ^{1/2}

- Με εφαρμογή της συλλογιστικής διαδικασίας GMP:
 - Κανόνας K₁: $D'_{K1} = T' \circ R_{K1}(T_{HIGH}, D_{HIGH})$
 - Κανόνας K₂: $D'_{K2} = T' \circ R_{K2}(T_{LOW}, D_{LOW})$
- Απαιτείται η γραφή της θερμοκρασίας $T' = 38.5$ σε μορφή ασαφούς συνόλου, δηλαδή:

$$T' = 38.5 = \{ 0/37, 0/37.5, 0/38, 1/38.5, 0/39, 0/39.5, 0/40 \}$$
- Χρησιμοποιείται η μέθοδος σύνθεσης (ο) *max-min* (η συνηθέστερη περίπτωση).
- Τεχνική όμοια με πολλαπλασιασμό πινάκων: χρησιμοποιείται min αντί πολλαπλασιασμού και max αντί πρόσθεσης.
- 1^{ος} πίνακας το ασαφές σύνολο T' (1x7) και 2ος ο αριστερά του βήματος A₁ (7x5)
- Το αποτέλεσμα θα είναι ένας πίνακας 1x5 που θα αποτελεί και την ποσότητα D'_{K1} .

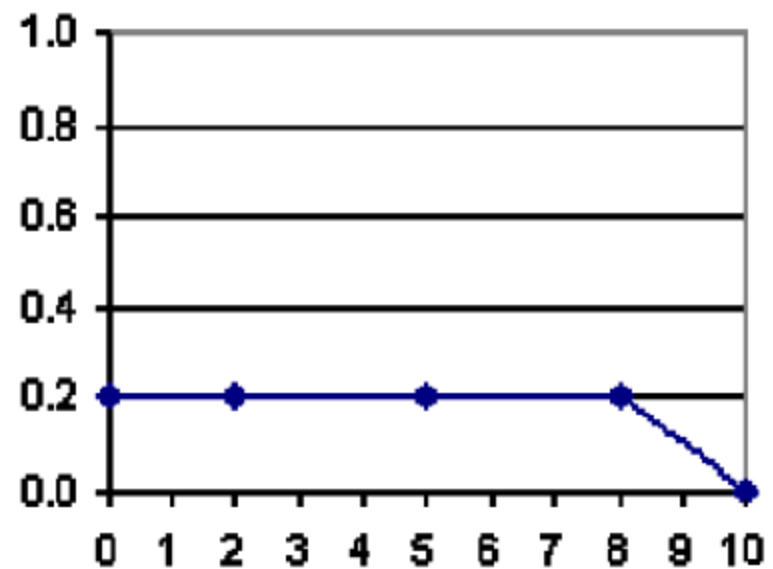
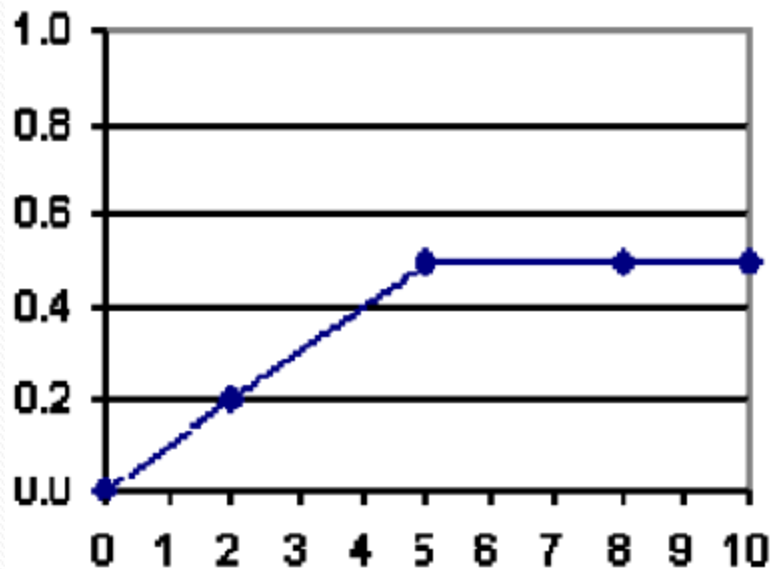
$D'_{K1} = [0/37, 0/37.5, 0/38, 1/38.5, 0/39, 0/39.5, 0/40]$ ο

$D'_{K1} = \{ 0/0, 0.2/2, 0.5/5, 0.5/8, 0.5/10 \}$

D →	0	2	5	8	10
↓ T					
37.0	0	0	0	0	0
37.5	0	0	0	0	0
38.0	0	0.2	0.2	0.2	0.2
38.5	0	0.2	0.5	0.5	0.5
39.0	0	0.2	0.5	0.8	0.8
39.5	0	0.2	0.5	0.8	1
40.0	0	0.2	0.5	0.8	1

Βήμα Α₂: Παραγωγή επιμέρους αποτελεσμάτων _{2/2}

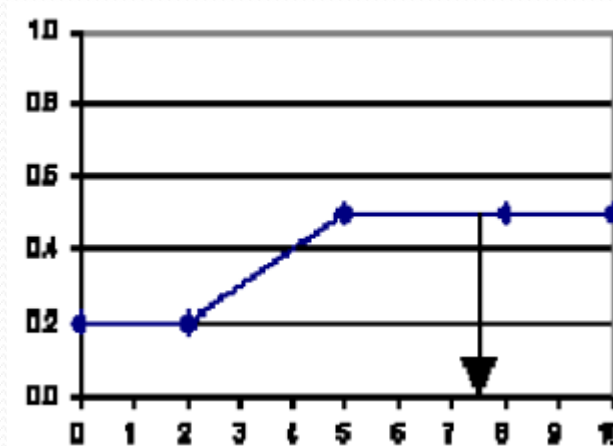
- Όμοια, ο κανόνας K_2 δίνει: $D'_{K2} = \{ 0.2/0, 0.2/2, 0.2/5, 0.2/8, 0/10 \}$
- D'_{K1} (αριστερά) και D'_{K2} (δεξιά).



Βήμα A₃: Συνάθροιση αποτελεσμάτων

Μέθοδος MAX

- Υπολογίζει τη συνδυασμένη έξοδο των κανόνων παίρνοντας τη μέγιστη τιμή συγγένειας από τις παραμέτρους εξόδου κάθε κανόνα, σημείο προς σημείο (pointwise maximum - $\max_{p/w}$).



- Δεδομένου ότι έχει υπολογιστεί:

$$D_{1'K1} = \{ 0/0, 0.2/2, 0.5/5, 0.5/8, 0.5/10 \}$$

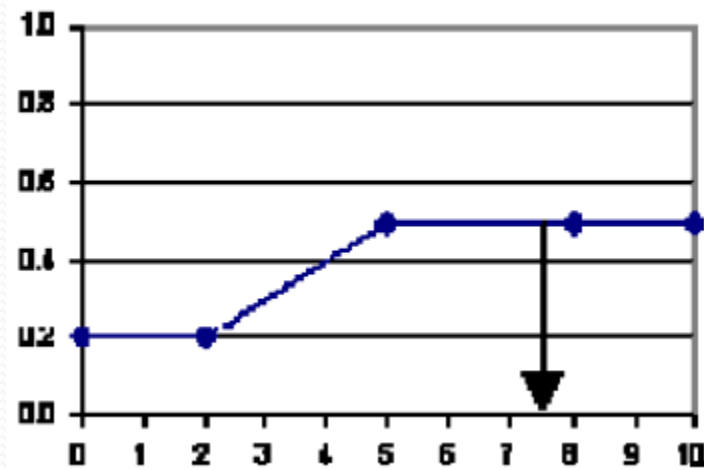
$$D_{1'K2} = \{ 0.2/0, 0.2/2, 0.2/5, 0.2/8, 0/10 \}$$

η συνάθροισή τους κατά MAX δίνει

$$D_{1'} = \{ \max(0, 0.2)/0, \max(0.2, 0.2)/2, \max(0.5, 0.2)/5, \max(0.5, 0.2)/8, \max(0.5, 0)/10 \} = \{ 0.2/0, 0.2/2, 0.5/5, 0.5/8, 0.5/10 \}$$

Βήμα Α₄: Αποσαφήνιση

- Μέθοδος αποσαφήνισης MAXIMUM
 - διακριτή τιμή: μέγιστη τιμή συγγένειας του τελικού αποτελέσματος.
 - με average-of-maxima αποσαφήνιση: $D_1 = (5+8+10)/3=7.7$



Βήμα Β₁: Υπολογισμός συνάρτησης συνεπαγωγής

Μέθοδος PRODUCT

- δύο κανόνες: δύο τελεστές συνεπαγωγής, οι R_{K1} και R_{K2} .
- Έστω ο τελεστής συνεπαγωγής Larsen Product (ή απλά PRODUCT).
 - K_1 : if T is HIGH then D is HIGH - K_2 : if T is LOW then D is LOW
- Κανόνας K_1 . Κατασκευάζεται ο πίνακας αριστερά:

R_{K1}	D	0	2	5	8	10
T		0	0.2	0.5	0.8	1
37.0	0	0	0	0	0	0
37.5	0	0	0	0	0	0
38.0	0.2	0	0.04	0.1	0.16	0.2
38.5	0.5	0	0.1	0.25	0.4	0.5
39.0	0.8	0	0.16	0.4	0.64	0.8
39.5	1	0	0.2	0.5	0.8	1
40.0	1	0	0.2	0.5	0.8	1

R_{K2}	D	0	2	5	8	10
T		1	0.8	0.5	0.2	1
37.0	0.2	0.2	0.16	0.1	0.04	0
37.5	1	1	0.8	0.5	0.2	0
38.0	0.5	0.5	0.4	0.25	0.1	0
38.5	0.2	0.2	0.16	0.1	0.04	0
39.0	0	0	0	0	0	0
39.5	0	0	0	0	0	0
40.0	0	0	0	0	0	0

- Κάθε κελί του εσωτερικού πίνακα (σχέση συνεπαγωγής R_{K1}) περιέχει το (u_{THIGH} • u_{DHIGH}) για τα T και D της γραμμής και στήλης στην οποία βρίσκεται.
- Όμοια προκύπτει και η $R_{K2}(T_{LOW}, D_{LOW})$ για τον κανόνα K_2 (πίνακας δεξιά)

Βήμα B₂: Παραγωγή επιμέρους αποτελεσμάτων ^{1/2}

- Με εφαρμογή της συλλογιστικής διαδικασίας GMP:
 - Κανόνας K₁: $D'_{K1} = T' \circ R_{K1}(T_{HIGH}, D_{HIGH})$
 - Κανόνας K₂: $D'_{K2} = T' \circ R_{K2}(T_{LOW}, D_{LOW})$
- Απαιτείται η γραφή της θερμοκρασίας T'=38.5 σε μορφή ασαφούς συνόλου:

$$T' = 38.5 = \{ 0/37, 0/37.5, 0/38, 1/38.5, 0/39, 0/39.5, 0/40 \}$$
- Χρησιμοποιείται η μέθοδος σύνθεσης (ο) *max-min* (η συνηθέστερη περίπτωση).
- 1^{ος} πίνακας το ασαφές σύνολο T' (1x7) και 2^{ος} ο εσωτερικός του βήματος B₁ (7x5)
- Το αποτέλεσμα θα είναι ένας πίνακας 1x5 που θα αποτελεί και την ποσότητα D'_{K1}.

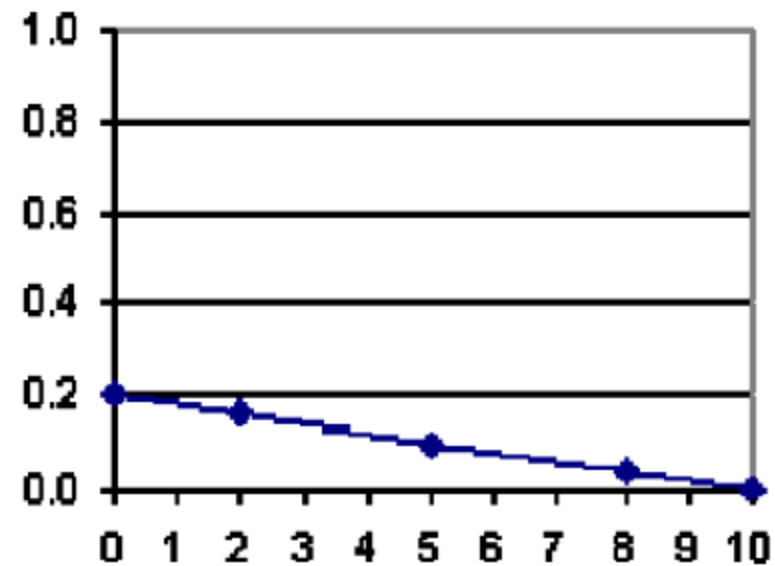
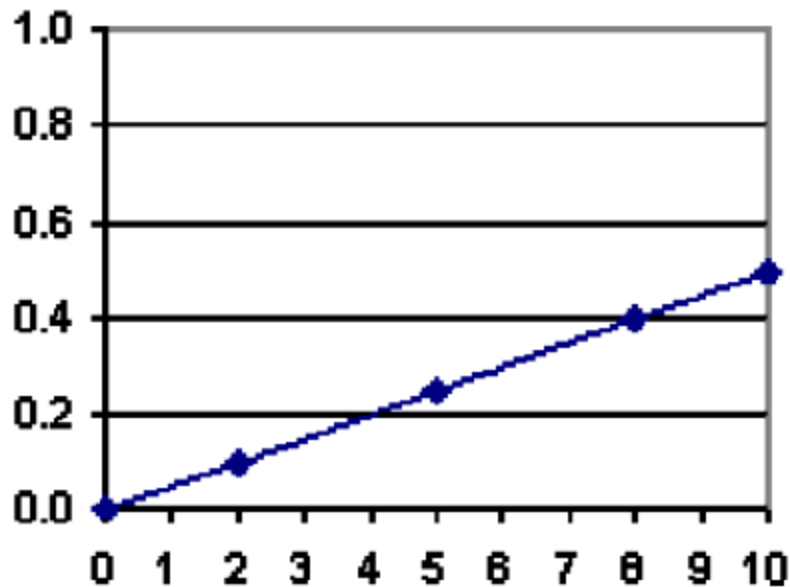
$D'_{K1} = [0/37, 0/37.5, 0/38, 1/38.5, 0/39, 0/39.5, 0/40]$ ο ➔

$D'_{K1} = \{ 0/0, 0.1/2, 0.25/5, 0.4/8, 0.5/10 \}$ ←

D → T	0	2	5	8	10
37.0	0	0	0	0	0
37.5	0	0	0	0	0
38.0	0	0.04	0.1	0.16	0.2
38.5	0	0.1	0.25	0.4	0.5
39.0	0	0.16	0.4	0.64	0.8
39.5	0	0.2	0.5	0.8	1
40.0	0	0.2	0.5	0.8	1

Βήμα Β₂: Παραγωγή επιμέρους αποτελεσμάτων _{2/2}

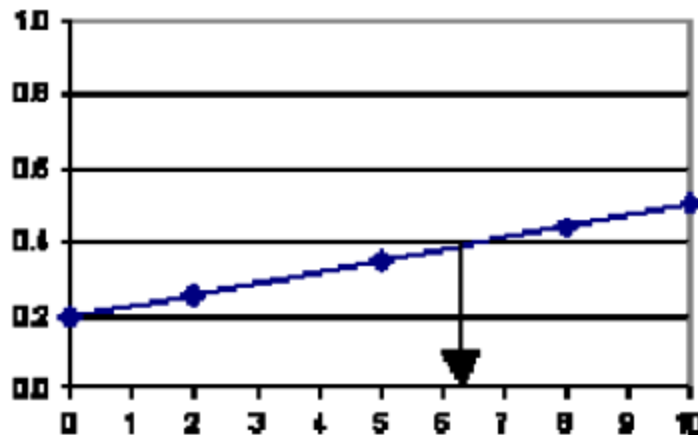
- Όμοια προκύπτει ότι ο κανόνας K_2 δίνει: $D'_{K2} = \{ 0.2/0, 0.16/2, 0.1/5, 0.04/8, 0/10 \}$
- Γραφική απεικόνιση των D'_{K1} (αριστερά) και D'_{K2} (δεξιά).



Βήμα B₃: Συνάθροιση αποτελεσμάτων

Μέθοδος SUM

- Υπολογίζει τη συνδυασμένη έξοδο των κανόνων παίρνοντας το άθροισμα των τιμών συγγένειας των παραμέτρων εξόδου κάθε κανόνα, σημείο προς σημείο (*pointwise sum - sum_{p/w}*).
- Δεδομένου ότι έχει υπολογιστεί:
 - $D_{2'K1} = \{ 0/0, 0.1/2, 0.25/5, 0.4/8, 0.5/10 \}$
 - $D_{2'K2} = \{ 0.2/0, 0.16/2, 0.1/5, 0.04/8, 0/10 \}$
- ...η συνάθροισή τους κατά *MAX* δίνει....
 - $D_2' = \{ (0+0.2)/0, (0.1+0.16)/2, (0.25+0.1)/5, (0.4+0.04)/8, (0.5+0)/10 \} = \{ 0.2/0, 0.26/2, 0.35/5, 0.44/8, 0.5/10 \}$



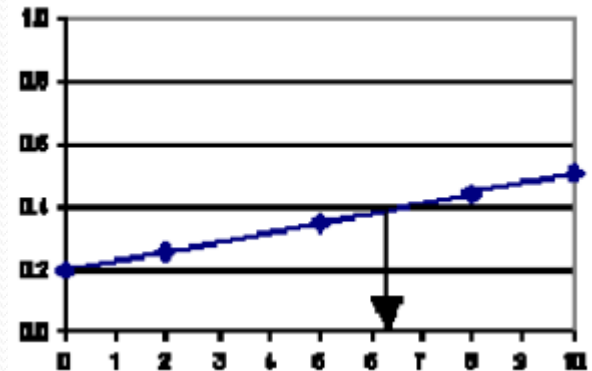
Βήμα B₄: Αποσαφήνιση

- Μέθοδος αποσαφήνισης CENDROID

- Η διακριτή τιμή είναι αυτή που προκύπτει από το κέντρο βάρους της τελικής συνάρτησης συγγένειας για την ασαφή παράμετρο εξόδου.
- Το κέντρο βάρους επιφάνειας που ορίζεται από μία συνάρτηση $f(t)$: σχέση (1)
- Για διακριτού συνόλου αναφοράς: διακριτό άθροισμα με δειγματοληψία N σημείων (σχ.2).

$$(1) \quad t_{\kappa\beta} = \frac{\int_{t1}^{t2} t \cdot f(t) dt}{\int_{t1}^{t2} f(t) dt}$$

$$(2) \quad t_{\kappa\beta} = \frac{\sum_{i=1}^N t_i \cdot u_{OUT}(t_i)}{\sum_{i=1}^N u_{OUT}(t_i)}$$

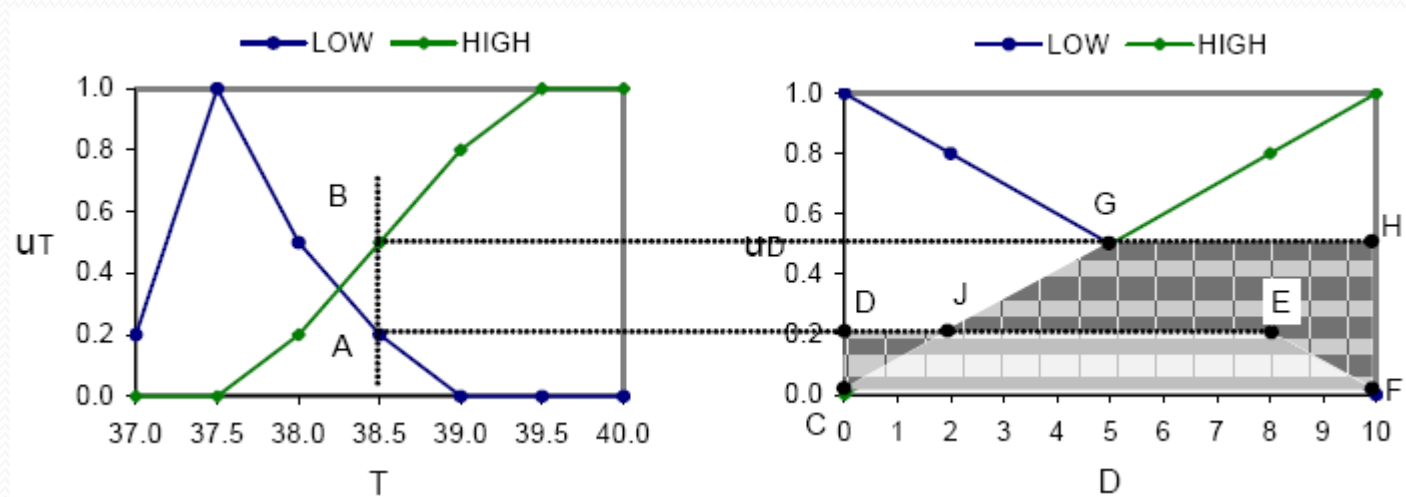


- Με CENDROID αποσαφήνιση στα αποτελέσματα της συνάθροισης SUM, προκύπτει:

$$t_{D2'} = \frac{\sum_{i=1}^5 t_i \cdot u_{D2'}(t_i)}{\sum_{i=1}^5 u_{D2'}(t_i)} = \frac{0 \cdot 0.2 + 2 \cdot 0.26 + 5 \cdot 0.35 + 8 \cdot 0.44 + 10 \cdot 0.5}{0.2 + 0.26 + 0.35 + 0.44 + 0.5} = 6.2$$

Διαγραμματική Επίλυση _{1/2}

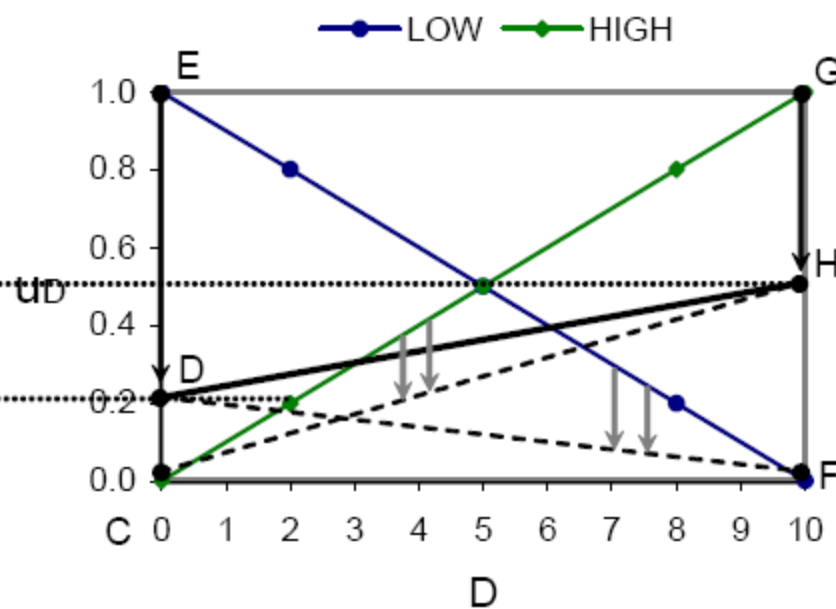
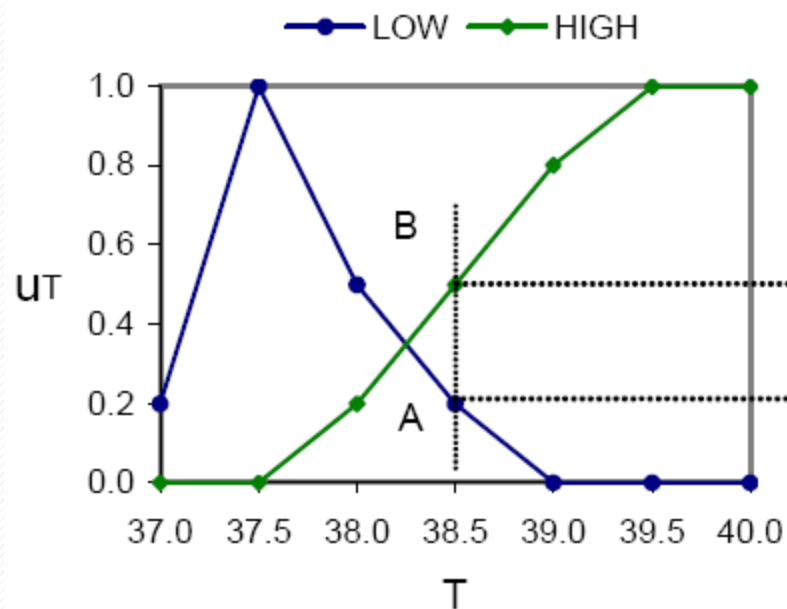
- **Προϋπόθεση:** οι συναρτ. συγγένειας να είναι συνεχείς καμπύλες - όχι ζεύγη $(x, u(x))$
- **Πρόβλημα:** υπολογισμός της δόσης D' μιας φαρμακευτικής ουσίας με βάση την θερμοκρασία T' και τους ασαφείς κανόνες:
 - K_1 : if T is HIGH then D is HIGH - K_2 : if T is LOW then D is LOW
- με μέθοδο MIN για τον υπολογισμό των συναρτήσεων συνεπαγωγής:



- κανόνας K_2 : DEF
- κανόνας K_1 : CGH
- *Λύση:* αποσαφήνιση στην "καμπύλη" DJGH

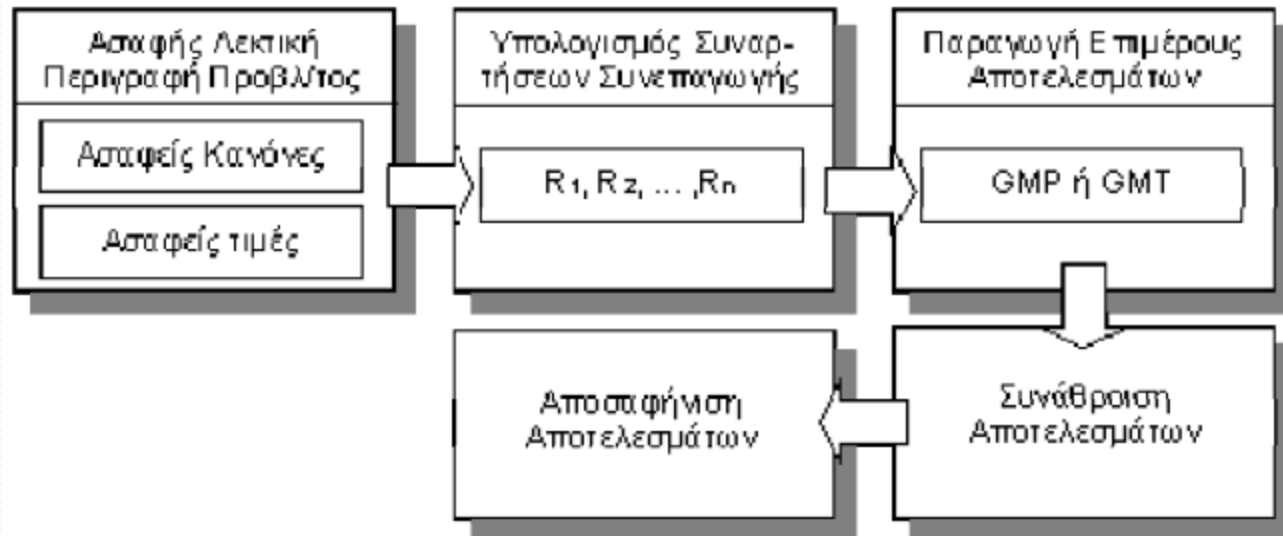
Διαγραμματική Επίλυση _{2/2}

- Θεωρώντας μέθοδο PRODUCT για τον υπολογισμό των συναρτήσεων συνεπαγωγής:



- κανόνας K_2 : DF
- κανόνας K_1 : CH
- Λύση: αποσαφήνιση στην "καμπύλη" DH

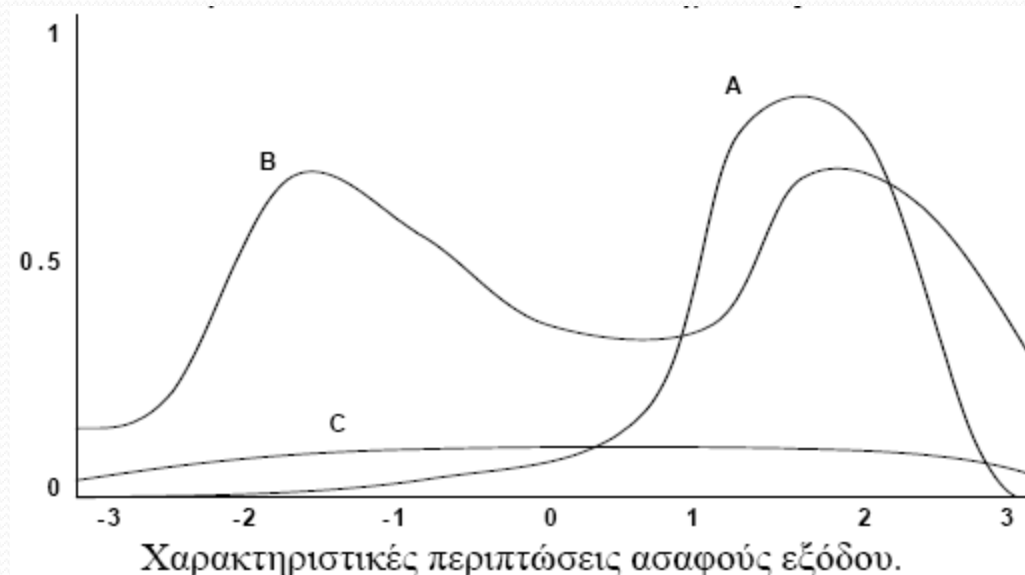
Συστήματα Ασαφούς Συλλογιστικής



- **Δυσκολότερο σημείο:** επιλογή ασαφών μεταβλητών, των τιμών τους και των κανόνων με τους οποίους θα συνδυαστούν.
- Συναρτήσεις συγγένειας: χρήση νευρωνικών δικτύων.
- σημεία προσοχής: επιλογή τελεστή συνεπαγωγής, μεθόδου αποσαφήνισης.

Σταθερότητα/Ποιότητα Ασαφούς Συστήματος

- **Σταθερότητα:** η ικανότητα να εμφανίζει καλή συμπεριφορά σε όλο το φάσμα τιμών εισόδου.
- Η μορφή του τελικού αποτελέσματος πολλές φορές δίνει μία καλή ένδειξη για την ποιότητα του συνολικού συστήματος.



□ Παράδειγμα

- α) ύπαρξη ενός "ισχυρού" κανόνα (επιθυμητό χαρακτηριστικό).
- β) δύο κορυφές: αντιφατική συμπεριφορά (απαιτείται βελτίωση του συστήματος κανόνων).
- γ) μεγάλο πλατό: το σύστημα των κανόνων είναι ελλιπές.

Εφαρμογές Ασαφούς Λογικής

- Σύστημα Linkman (ιστορικά η πρώτη εφαρμογή): βιομηχανίες τσιμέντου.
- Υπόγειος σιδηρόδρομος Sendai στην Ιαπωνία.
- Φωτογραφικές μηχανές.
- Πλυντήρια ρούχων.
- Συσκευές video-camera.
- Συστήματα πέδησης (fuzzy ABS).
- Συστήματα ελέγχου λαβής σε ρομποτικούς βραχίονες.
- Συσκευές κλιματισμού.
- Βαλβίδες για έλεγχο ροής.
- Κατανομή καυσίμου ανάλογα με το φάκελο πτήσης σε δεξαμενές πολεμικών αεροσκαφών.
- Έμπειρα συστήματα με ασαφείς κανόνες.