Ασκήσεις σε αριθμητική ανάλυση και γραμμική αναζήτηση

Ιωάννης Γ. Τσούλος

2024

1. Έστω οι εκφράσεις $P(x) = x\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)$ και $Q(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}+x}$ οι οποίες είναι αριθμητικά ισοδύναμες. Υπολογίστε με τον αντίστοιχο κώδικα τις τιμές $P(1200),\ P(-1200),\ Q(1200),\ Q(-1200)$ και παρουσιάστε τα συμπεράσματα σας και τον κώδικα που υλοποιήσατε.

2. Μια βελτιωμένη εκδοχή της μεθόδου Newton για την εύρεση ριζών είναι η μέθοδος Helley, στην οποία το νέο σημείο δίνεται από τον τύπο:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f\left(x_n\right)}{f'\left(x_n\right) - \frac{f(x_n)f''(x_n)}{2f'(x_n)}}$$

   Χρησιμοποιήστε την μέθοδο Newton και την μέθοδο Helley για τον εντοπισμό ριζών της εξίσωσης $f(x) = x^5 - 1.5$ και καταγράψτε τα συμπεράσμάτά σας και τον κώδικα που υλοποιήσατε.

3. Η συνάρτηση test2n διαθέτει 2^n τοπικά ελάχιστα (όπου n η διάσταση του προβλήματος) και ορίζεται από την εξίσωση:

$$f(x) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^4 - 16x_i^2 + 5x_i\right)\ \ x \in [-5,5]^2$$

   Να υπολογίστε και να εμφανίσετε την παράγωγο αυτής της συνάρτησης για διάφορα τυχαία σημεία στο διάστημα [-5,5] με αναλυτικό τρόπο αλλά και με πεπερασμένες διαφορές για $n = 2, 4, 8, 16, 20$ και υπολογίστε το σφάλμα που κάνει η μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών. Καταγράψετε τις παρατηρήσεις και τον κώδικα που χρησιμοποιήσατε.

4. Να γραφεί κώδικας για την προσέγγιση με σειρα Taylor της συναρτήσεις $f(x) = x\sin\left(x^2\right)$ και με $x_0 = 0$ και να γίνουν τα εξής γραφήματα:

   (a) Για την πραγματική συνάρτηση $f(x)$ στο διάστημα [-4,4].

   (b) Για την προσέγγιση της συνάρτησης με 5 όρους στην σειρά Taylor.

   (c) Για την προσέγγιση της συνάρτησης με 10 όρους στην σειρά Taylor.

5. Εφαρμόστε την μέθοδο της Χρυσής τομής στην συνάρτηση $f(x) = x \times (x-1) + x^2 \times (x-3)$ και εκτυπώστε τα βήματα της μεθόδου για τα διαστήμα

   (a) a=1, b = 5

   (b) a=-5, b= 10