Βελτιστοποίηση

Ιωάννης Γ. Τσούλος

Τμήμα Πληροφορικής και τηλεπικοινωνιών
Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

2022

Περίληψη

Ορισμοί

1. Είναι εξελικτική μέθοδος.
2. Βασίζεται σε έναν πληθυσμό από υποψήφιες λύσεις, που βελτιώνεται με την πάροδο του χρόνου.
3. Για να είναι αποδοτική θα πρέπει να συνδυαστεί και με μεθόδους τοπικής βελτιστοποίησης.

Βασικά στοιχεία

1. Στην βιβλιογραφία ο πληθυσμός των υποψηφίων λύσεων ονομάζεται πράκτορες (**agents**).
2. Το μέγεθος του πληθυσμού **NP**. Για το μέγεθος του πληθυσμού θα πρέπει να ισχύει $NP \geq 4$. Συνήθως $NP = 10 \times n$
3. Ο συντελεστής κλιμάκωσης (η και differential weight) **F** με $F \in [0, 2]$.
4. Ο συντελεστής διαστάυρωσης **CR** με $CR \in [0, 1]$.
5. Τυπικές τιμές: $F = 0.8$ $CR = 0.9$

Ο βασικός αλγόριθμος

1. **Αρχικοποίηση** όλων των πρακτόρων.
2. **Θέσε** k=0
3. **Για** κάθε πράκτορα x_i, $i = 1, .., NP$ **κάνε**
    1. **Επιλογή** τριών πρακτόρων a,b,c από το σύνολο των πρακτόρων. Οι επιλεχθέντες πράκτορες πρέπει να είναι διαφορετικοί μεταξύ τους.
    2. **Επιλογή** ενός τυχαίου ακεραίου $R \in [1, n]$, n είναι διάσταση του προβλήματος.
    3. **Υπολογισμός** του νέου πράκτορα $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ ως εξής:
        1. Επιλογή τυχαίου αριθμού $r_i \in (0, 1)$, $i = 1, ..., n$
        2. Αν $r_j < CR$ ή $j = R$, $y_j = a_j + F \times (b_j - c_j)$, αλλιώς $y_j = x_{i,j}$
    4. **Αν** $f(y) \leq f(x_i)$ **Θέσε** $x_i = y$
4. **Τέλος Επανάληψης**
5. Θέσε k=k+1
6. **Αν** ισχύει το κριτήριο τερματισμού **τερματισμός**, **αλλιώς** μετάβαση στο βήμα 2.

Τροποποιήσεις

- Έχουν προταθεί αρκετές τροποποιήσεις από ερευνητές όπως Ali, Storey, Tsoulos et al.
- Σε κάποιες τροποποιήσεις απαιτείται η χρήση του tournement selection:
  - Επιλογή N ατόμων από ένα πληθυσμό με τυχαίο τρόπο
  - Διατήρηση του ατόμου που έχει την καλύτερη συναρτησιακή τιμή στον υποπληθυσμό των N ατόμων

Ο αλγόριθμος DERL

1. **Αρχικοποίηση** όλων των πρακτόρων.
2. **Θέσε** k=0
3. Εύρεση καλύτερου και χειρότερου πράκτορα x_{min} και x_{max}
4. Αν $|f_{max} - f_{min}| \leq \epsilon$, τερματισμός.
5. Για κάθε πράκτορα x_i κάνε
    1. Επιλογή με tournament selection του σημείου x_{tb}
    2. Τυχαία επιλογή δύο πρακτόρων $a,\ b$
    3. $\hat{x}_i = x_{tb} + F \times (a - b)$ (μετάλλαξη)
    4. **Υπολογισμός** του νέου πράκτορα $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ ως εξής:
        1. Επιλογή τυχαίου αριθμού $r_j \in (0, 1)$, $j = 1, ..., n$
        2. Αν $r_j < CR$ ή $j = R$, $y_j = x_{i,j} + F \times (x_{i,j} - \hat{x}_{i,j})$, αλλιώς $y_j = x_{i,j}$
    5. **Αν** $f(y) \leq f(x_i)$ Θέσε $x_i = y$
6. Τέλος - Επανάληψης
7. Θέσε k=k+1
8. Μετάβαση στο βήμα 3.

Αλλες προτάσεις για το differential weight

- Στον αλγόριθμο DERL μπορεί να είναι μεταβαλλόμενος ώστε να μην παράγονται σημεία με την μετάλλαξη που να είναι εκτός ορίων της συνάρτησης.
- Προτεινόμενος μηχανισμός από ALI:

$$F = \begin{cases} \max\left(l_{\min}, 1 - \left|\frac{f_{\max}}{f_{\min}}\right|\right) & , \quad \text{if} \quad \left|\frac{f_{\max}}{f_{\min}}\right| \le 1 \\ \max\left(l_{\min}, 1 - \left|\frac{f_{\min}}{f_{\max}}\right|\right) & , \quad \text{otherwise} \end{cases} \tag{1}$$

Ο αλγόριθμος GENDE

- Προτάθηκε ο μηχανισμός για το differential weight:

$$F = -\frac{1}{2} + 2 \times R \tag{2}$$

- Προτάθηκε ο εξής κανόνας τερματισμού:
  - Υπολογισμός της ποσότητας

$$\delta^{(t)} = \left| \sum_{i=1}^{\mathrm{NP}} \left| f_i^{(t)} \right| - \sum_{i=1}^{\mathrm{NP}} \left| f_i^{(t-1)} \right| \right| \tag{3}$$

  - Τερματισμός αν $\delta^{(t)} \leq \epsilon$ για μια σειρά από M επαναλήψεις πχ $M = 20$

Αριθμητικά αποτελέσματα

1. Στα πειραματικά αποτελέσματα χρησιμοποιήθηκε και μέθοδος τοπικής ελαχιστοποίησης μετά το τέλος της DE.
2. Χωρίς το κριτήριο τερματισμού υπήρξε μείωση υπολογιστικού χρόνου της τάξης 50% σε σχέση με το κριτήριο του ALI
3. Με το προτεινόμενο κριτήριο τερματισμού υπήρξε μείωση σε ακόμα μεγαλύτερο βαθμό.
4. Εναλλακτικά κανείς μπορεί να δουλέψει και πάνω στον παράγονται CR.

Βασικά στοιχεία PSO

1. Βασίζεται και αυτός σε παρατήρηση της φύσης
2. Προσπαθεί να προσομοιώσει την κίνηση ενός σμήνους προς αναζήτηση τροφής
3. Εδώ τα χρωμοσώματα ονομάζονται σωμάτια
4. Κάθε σωμάτιο έχει τρέχουσα θέση και ταχύτητα
5. Χρησιμοποιείται κυρίως σε προβλήματα δεκαδικής ελαχιστοποίησης
6. Προτάθηκε το 1995 από τους Kennedy, Eberhart.

Μεταβλητές PSO

1. S τα συνολικά σωμάτια
2. f(x), η καταλλήλοτητα κάθε σωμάτιου x
3. x_i κάθε σωμάτιο του πληθυσμού
4. u_i η ταχύτητα κάθε σωματίου
5. y_i η καλύτερη θέση κάθε σωμάτιου στον πληθυσμό
6. x^b το συνολικά καλύτερο σωμάτιο στον πληθυσμό

Τυπικός αλγόριθμος PSO

1. Για κάθε σωμάτιο i = 1, ..., S
   1. Αρχικοποίηση της θέσης x_i κάθε σωματιού
   2. Αρχικοποίηση της ταχύτητας u_i κάθε σωματίου
   3. $x^b = \operatorname{argmin}(f(x))\,, y_i = x_i$
2. Μέχρι να ισχύσει ένα κριτήριο τερματισμού
3. Για κάθε σωμάτιο i = 1, ..., S
   1. Για κάθε διάσταση d = 1, ..., n
      1. Ενημέρωση της ταχύτητας $u_{i,d} = \omega u_{i,d} + r_1\left(x_{i,d} - y_{i,d}\right) + r_2\left(x_{i,d} - x_d^b\right)$
      2. Ενημέρωση θέσης $x_{i,d} = x_{i,d} + u_{i,d}$
   2. Αν $f\left(x_i\right) < f((y_i))\,, y_i = x_i$
   3. Αν $f\left(x_i\right) < f\left(x^b\right), x^b = x_i$

Η ποσότητα inertia ω

1. Είναι ποσότητα που μπορεί να είναι σταθερή ή να μεταβάλλεται
2. Συνήθως ω<1
3. Ελέγχει ποιος είναι ο ρόλος της προηγούμενης ταχύτητας στην δημιουργία της καινούριας
4. Παράδειγμα μεταβολής σε κάθε γενιά k:

$$\omega = \omega_{\mathrm{MAX}} - \frac{k}{k_{MAX}} \left(\omega_{MAX} - \omega_{MIN}\right)$$

Έκρηξη ταχύτητας

1. Προκαλείται όταν η ταχύτητα παίρνει πολύ μεγάλες ή πολύ μικρές τιμές, και το σωμάτιο βγαίνει εκτός ορίων
2. Λύση: όρια στις αλλαγές της ταχύτητας
3. Λύση: απόρριψη αλλαγών στην ταχύτητα που θα οδηγήσουν σε έκρηξη
4. Λύση: κανονικοποίηση τιμών της ταχύτητας σε συγκεκριμένο διάστημα

Random Inertia

$$\omega_{\text{iter}} = 0.5 + \frac{r}{2} \tag{4}$$

όπου r τυχαίος αριθμός και $r \in [0, 1]$.

Linear time varying inertia

$$\omega_{\text{iter}} = \frac{\text{iter}_{\text{max}} - \text{iter}}{\text{iter}_{\text{max}}} \left(\omega_{\text{max}} - \omega_{\text{min}}\right) + \omega_{\text{min}} \tag{5}$$

όπου ω_{min} είναι η ελάχιστη τιμή για τον συντελεστή αδράνειας και ω_{max} είναι η μέγιστη επιτρεπτη τιμή για την αδράνεια.

Κανόνας τερματισμού ALI

- Σε κάθε επανάληψη υπολογισμός των ποσοτήτων f_{max} και f_{min}
- Τερματισμός αν $|f_{max} - f_{min}| \leq$e
- Δύσκολο να ικανοποιηθεί καθώς δεν συγκλίνουν πάντοτε μεταξύ τους αυτές οι τιμές.

- Η διακύμανση $\sigma^{(iter)}$ της ποσότητας f_{min} υπολογίζεται σε κάθε επανάληψη iter.
- Αν ο αλγόριθμος δεν μπορεί να εντοπίσει μια νέα καλύτερη τιμή για την f_{min} για μια σειρά από επαναλήψεις, τότε η μέθοδος θα πρέπει να τερματιστεί.
- Τερματισμός αν:

$$\sigma^{(\text{iter})} \leq \frac{\sigma^{\left(\text{iter}_{\text{last}}\right)}}{2} \tag{6}$$

όπου $\text{iter}_{\text{last}}$ είναι η τελευταία επανάληψησ στην οποία βρέθηκε μια νέα καλύτερη τιμή για το f_{min}

Κανόνας τερματισμού από Charilogis and Tsoulos

- Υπολογισμός της διαφοράς $\left|f_{\min}^{(k)} - f_{\min}^{(k-1)}\right|$ σε κάθε επανάληψη k.
- Αν $\left|f_{\min}^{(k)} - f_{\min}^{(k-1)}\right| \leq e$ για ένα αριθμό συνεχόμενων επαναλήψεων $k_{\max}$, τότε η μέθοδος τερματίζει.

Σύνοψη

- Η μέθοδος Differential Evolution
- Η μέθοδος PSO

Βιβλιογραφία I

- Βελτιστοποίηση τεχνικών συστημάτων, Άγγελος Πρωτοπαπάς, 2015, Κάλλιπος, ISBN: 978-960-603-493-0
- Καθολική βελτιστοποίηση: μέθοδοι λογισμικό και εφαρμογές, Ιωάννης Γ. Τσούλος, διδακτορική διατριβή, εθνικό αρχείο διδακτορικών διατριβών.
- Αριθμητικές μέθοδοι βελτιστοποίησης, Ισαάκ Λαγαρής, ιστοσελίδα σημειώσεων διαθέσιμη από http://www.cs.uoi.gr/~lagaris/OPT_UNDER/
- Τεχνικές βελτιστοποίησης, Γεώργιος Α. Ροβιθάκης, 2007, εκδόσεις Τζιόλα, ISBN-13: 978-960-418-141-4 .

Βιβλιογραφία II

- Μαθηματική θεωρία βελτιστοποίησης , DingZhu Du, Panos M. Pardalos, Weili Wu, 2005, Εκδόσεις Νέων Τεχνολογιών, ISBN 960-8105-79-X, ISBN-13 978-960-8105-79-9
- Boender, C.G.E., Rinnooy Kan, A.H.G. Bayesian stopping rules for multistart global optimization methods. Mathematical Programming 37, 59–80 (1987)
- Rinnooy Kan, A. H. G., & Timmer, G. T. (1985). The Multi Level Single Linkage Method For Unconstrained And Constrained Global Optimization (No. 2099-2018-3232).
- Ioannis G. Tsoulos, Isaac E. Lagaris, MinFinder: Locating all the local minima of a function, Computer Physics Communications 174, pp. 166-179, 2006.