

# Βελτιστοποίηση

Ιωάννης Γ. Τσούλος

Τμήμα Πληροφορικής και τηλεπικοινωνιών  
Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

2022

## Περίληψη

- 1 Μέθοδοι τυχαίας αναζήτησης
- 2 Controlled Random Search
- 3 Τροποποιήσεις στην μέθοδο PSO
- 4 Τροποποιήσεις σε Γενετικούς αλγόριθμους

## Random Search

- 1 Η πιο απλή τεχνική εύρεσης ελαχίστου
- 2 Αποτελεί την βάση πάνω στην οποία έχουν στηριχτεί σύγχρονες τεχνικές όπως CRS, Simulated Annealing κτλ.
- 3 Είναι και από τις λίγες για τις οποίες αποδεικνύεται θεωρητικά πως συγκλίνουν, δηλαδή αν τα ληφθέντα δείγματα πάνε στο άπειρο τότε το ελάχιστο της συνάρτησης θα βρεθεί.

# Γραμμική αναζήτηση (αλγόριθμος)

- 1 Ορίζεται ένας αριθμός δειγμάτων  $N$ 
  - 1 Αρχικοποίηση αριθμού επαναλήψεων  $k=0$
  - 2 Ορισμός  $f^* = \infty$
  - 3 Για  $i=1, \dots, N$  κάνε
    - 1 Λήψη ενός νέου δείγματος  $x_i$
    - 2 Αν  $f(x_i) \leq f^*$ ,  $x^* = x_i$ ,  $f^* = f(x_i)$
  - 4 Τέλος - Επανάληψης
  - 5  $k=k+1$
  - 6 Έλεγχος κριτηρίου τερματισμού. Αν δεν ισχύει τότε μετάβαση στο βήμα 4.

- Πρέπει να ληφθούν πολλά δείγματα για να καλυφθεί ο χώρος έρευνας
- Τις περισσότερες φορές τα δείγματα  $x_i$  δεν είναι τοπικά ελάχιστα.
- Εναλλακτικά ένα σημείο  $x_i$  θα ελέγχεται αν  $\|g(x_i)\| \leq \epsilon$ , όπου  $g(x)$  η παράγωγος της συνάρτησης.

## Τυχαία αναζήτηση με γραμμική αναζήτηση

- 1 Αποτελεί βελτίωση της απλής τεχνικής γραμμικής αναζήτησης.
- 2 Κάθε φορά που ανακαλύπτεται μια νέα καλύτερη τιμή εφαρμόζεται γραμμική αναζήτηση για την βελτίωση της.

## Η μέθοδος GRS

- 1 Το πρόβλημα με την μέθοδο Random Search είναι πως δεν υπάρχει κάποια κατεύθυνση αναζήτησης.
- 2 Επιπλέον και στις γραμμικές αναζητήσεις πολλές φορές το βήμα μπορεί να είναι αρκετά μικρό ή πολύ μεγάλο.
- 3 Αυτά τα προβλήματα λύνονται με την Genetic Random Search.
- 4 Τα βήματα κατασκευάζονται σαν συναρτήσεις του τρέχοντος σημείου.
- 5 Για την κατασκευή των σημείων γίνεται χρήση Γενετικών Αλγορίθμων (Γραμματική Εξέλιξη).

# Η μέθοδος GRS (γραμματική)

```
<start> ::= <expr>
<expr> ::= (<expr><binary_op><expr>)
          | <func_op>(<expr>)
          | <terminal>x
<binary_op> ::= + | - | * | /
<func_op> ::= sin | cos | exp | log
<terminal> ::= <digitlist>.<digitlist>
              | x
<digitlist> ::= <digit> | <digit><digit>
               | <digit><digit><digit>
<digit> ::= 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9
```



## Δημιουργία κατευθύνσεων με GRS

- 1 Έστω οι αρχικές τιμές  $x_b, y_b = f(x_b)$
- 2 Τμηματοποίηση του χρωμοσώματος σε  $n$  τμήματα,  $p_i, i = 1, \dots, n$ .
- 3 Δημιουργία με την Γραμματική Εξέλιξη του διανύσματος  $d = (g_1(x_1), g_2(x_2), \dots, g_n(x_n))$
- 4 Θέσε  $x_+ = x_b + d$
- 5 Αν  $x_+ \notin S$  ή  $f(x_+) > y_b$  τότε
  - 1 Θέσε  $x_- = x_b - d$
  - 2 Αν  $x_- \notin S$  ή  $f(x_-) > y_b$  τότε απόρριψη του χρωμοσώματος
  - 3 Αλλιώς  $x_b = x_-, y_b = f(x_-)$
- 6 Αλλιώς  $x_b = x_+, y_b = f(x_+)$
- 7 Τέλος AN

- 1 Είναι στοχαστική και ευρετική τεχνική
- 2 Δημιουργεί ένα αρχικό σύνολο  $N$  σημείων στον χώρο  $S$
- 3 Το σύνολο των σημείων συστέλλεται σταδιακά αντικαθιστώντας το τρέχον χειρότερο σημείο σε αυτό με ένα καλύτερο σημείο, που ονομάζεται σημείο δοκιμής.

## Ο βασικός αλγόριθμος

- 1 Δημιουργία ενός δείγματος  $N$  σημείων από το πρόβλημα.  
Συνήθως  $N = 25n$
- 2 Υπολογισμός των ποσοτήτων  $f_{max}$ ,  $f_{min}$
- 3 Αν  $|f_{max} - f_{min}| \leq \epsilon$  τότε τερματισμός.
- 4 Επιλογή  $n + 1$  τυχαίων σημείων από το σύνολο των σημείων:  $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ .
- 5 Υπολογισμός κεντροειδούς:  $G = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j$
- 6 Υπολογισμός δοκιμαστικού σημείου:  $\tilde{x} = 2G - x_{n+1}$
- 7 Αν  $\tilde{x} \notin S$  μετάβαση στο βήμα 5. Αν  $f(\tilde{x}) > f_{max}$  μετάβαση στο 5.
- 8 Προσθήκη του  $\tilde{x}$  στο σύνολο των σημείων με αντικατάσταση του χειρότερου σημείου και μετάβαση στο βήμα 2.

- Για την βελτίωση των αποτελεσμάτων που παράγονται με το δοκιμαστικό σημείο έχει προταθεί η χρήση μετάλλαξης πριν την προσθήκη στο σύνολο των σημείων (πριν το βήμα 8).
- Εναλλακτικά θα μπορούσε να εφαρμοστεί και μέθοδος τοπικής αναζήτησης πχ. gradient descent, bfgs κτλ.
- Στην μετάλλαξη συμμετέχει το καλύτερο σημείο του πληθυσμού  $x_{min}$
- Η μετάλλαξη γίνεται με την διαδικασία:

$$y = (1 + \omega) x_{min} - \omega \tilde{x}$$

- Οι συντελεστές  $\omega$  είναι τυχαίοι αριθμοί στο διάστημα  $[0, 1]$ .
- Η μετάλλαξη συμβαίνει με πιθανότητα  $p_m \in [0, 1]$ .

## Η μέθοδος GCRS

- 1 Μοιάζει με την μέθοδο “Controlled Random Search με Mutation”, αλλά αντί για μετάλλαξη χρησιμοποιεί την GRS.
- 2 Με αυτόν τον τρόπο ενισχύει τα σημεία που παράγονται.
- 3 Η μέθοδος έχει ακόμα ένα βήμα μετά την λήξη, στο οποίο εφαρμόζει μια μέθοδο τοπικής ελαχιστοποίησης όπως είναι η BFGS.

## Η μέθοδος GCRS(αλγόριθμος)

- 1 Δημιουργία  $N$  δειγμάτων και αποθήκευση στο σύνολο  $T$ .
- 2 Υπολογισμός καλύτερου και χειρότερου σημείου  $x_{min}$ ,  $x_{max}$  στο σύνολο  $T$ .
- 3 Αν  $|f_{max} - f_{min}| \leq e$  μετάβαση στο 11.
- 4 Επιλογή του συνόλου  $\tilde{T} = \{z_1, z_2, \dots, z_{n+1}\}$  από το  $T$ .
- 5 Υπολογισμός του κεντροειδούς:  $G = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i$
- 6 Υπολογισμός δοκιμαστικού σημείου:  $\tilde{z} = 2G - z_{n+1}$
- 7 Αν  $\tilde{z} \notin S$  ή  $f(\tilde{z}) \geq f_{max}$  μετάβαση στο 4.
- 8 Εφαρμογή GRS στο σημείο  $\tilde{z}$
- 9  $T = T \cup \tilde{z} - x_{max}$
- 10 Μετάβαση στο βήμα 2.
- 11 Εφαρμογή μεθόδου τοπικής ελαχιστοποίησης στο  $x_{min}$ .

- 1 Προσθήκη ενός νέου μηχανισμού δημιουργίας δοκιμαστικών σημείων για να αποφευχθούν τα σημεία εκτός πεδίου ορισμού.
- 2 Προσθήκη ενός νέου κανόνα τερματισμού παρόμοιου με το DoubleBox.

## Το κριτήριο τερματισμού στην ICRS

- Σε κάθε επανάληψη υπολογίζεται η ποσότητα  $f_{min}$
- Επιπλέον υπολογίζεται η ποσότητα  $\sigma^{(k)}$  που είναι η διακύμανση της  $f_{min}$  στην επανάληψη  $k$ .
- Η μέθοδος τερματίζει όταν  $\sigma^{(k)} \leq \frac{\sigma^{(klast)}}{2}$ , όπου  $klast$  είναι η τελευταία φορά που ανακαλύφτηκε καλύτερη τιμή για το  $f_{min}$ .



## Η μέθοδος δημιουργίας δοκιμαστικών σημείων στην ICRS

- 1 Επιλογή του συνόλου  $\tilde{T} = \{z_1, z_2, \dots, z_{n+1}\}$  από το  $T$ .
- 2 Υπολογισμός του κεντροειδούς:  $G = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i$
- 3  $G = G + \frac{1}{n} x_{min}$
- 4  $\tilde{z} = G - \frac{1}{n} z_{n+1}$

- Παρουσιάστηκε από τους I.G. Tsoulos και A. Stavrakoudis το 2010.
- Παρουσιάστηκαν τρεις τροποποιήσεις της κλασικής τεχνικής PSO
  - 1 Εφαρμογή του κανόνα DoubleBox για τερματισμό της μεθόδου.
  - 2 Εισαγωγή του κριτηρίου ομοιότητας για αποφυγή εκτέλεσης αχρείαστων συναρτησιακών κλήσεων. Σε αυτό το κριτήριο αν ένα σωματίο δεν μεταβάλλεται αρκετά, τότε δεν καλείται πάνω σε αυτό η αντικειμενική συνάρτηση.
  - 3 Προτάθηκε η περιοδική εφαρμογή μιας μεθόδου τοπικής ελαχιστόποίησης σε κάποια από τα σωματίια για τον αποτελεσματικότερο εντοπισμό του ολικού ελαχίστου.

## Η μέθοδος Center PSO

- Προτάθηκε το 2007 από τον Liu.
- Σε κάθε επανάληψη υπολογίζεται το κεντροειδες  $x_c$  από όλα τα σωμάτια του αλγορίθμου.
- Το σωμάτιο αυτό μετέχει στον υπολογισμό της ταχύτητας σύμφωνα με τον τύπο:

$$u_{i,d} = \omega u_{i,d} + r_1 (x_{i,d} - y_{i,d}) + r_2 (x_{i,d} - x_d^b) + r_3 (x_{i,d} - x_{i,c})$$

- Προτάθηκε το 2022 από Charilogis and Tsoulos.
- Χρησιμοποιεί τον επόμενο τύπο για την συντελεστή αδράνειας:

$$\omega_{\text{iter}} = 0.5 + \frac{r}{2} \quad (1)$$

- Χρησιμοποιεί τον επόμενο κανόνα τερματισμού:
  - Υπολογισμός της διαφοράς  $\left| f_{\min}^{(k)} - f_{\min}^{(k-1)} \right|$  σε κάθε επανάληψη  $k$ .
  - Αν  $\left| f_{\min}^{(k)} - f_{\min}^{(k-1)} \right| \leq e$  για ένα αριθμό συνεχόμενων επαναλήψεων  $k_{\max}$ , τότε η μέθοδος τερματίζει.

## Η μέθοδος GenMin

- Παρουσιάστηκε το 2008 από Tsoulos and Lagaris.
- Είναι συνδυασμός Γραμματικής Εξέλιξης και Γενετικών Αλγορίθμων.
- Κάθε χρωμόσωμα είναι και ένα σημείο της συνάρτησης κωδικοποιημένο σαν σειρά ακέραιων αριθμών.
- Κάθε χρωμόσωμα αποτελείται από  $n$  τμήματα.

- Προτάθηκε το 2008 από Tsoulios.
- Τρεις σημαντικές αλλαγές
  - Χρήση κανόνα τερματισμού DoubleBox
  - Περιοδική εφαρμογή μεθόδων τοπικής βελτιστοποίησης
  - Χρήση μετάλλαξης παρόμοιας λογικής με την PSO, δηλαδή χρήση και των καλύτερων θέσεων των χρωμοσωμάτων.

## Η μέθοδος ParallelDoublePop



- Παράλληλη υλοποίηση της DoublePop με χρήση MPI.
- Επικέντρωση στην χρήση παράλληλων τεχνικών τερματισμού
  - Η μία εκδοχή είναι να αποφασίζει ο κεντρικός κόμβος (μάστερ) για τον τερματισμό της βελτιστοποίησης
  - Η δεύτερη εκδοχή είναι την απόφαση να την παίρνουν οι εργάτες.
  - Τελικά καλύτερα αποτελέσματα έχουμε όταν την απόφαση την λαμβάνουν οι εργάτες.

## Σύνοψη

- Τυχαίες τεχνικές
- Controlled Random Search



# Βιβλιογραφία I

-  Rosenblatt, Frank (1958), The Perceptron: A Probabilistic Model for Information Storage and Organization in the Brain, Cornell Aeronautical Laboratory, Psychological Review, v65, No. 6, pp. 386–408.
-  Freund, Y. and Schapire, R. E. 1998. Large margin classification using the perceptron algorithm. In Proceedings of the 11th Annual Conference on Computational Learning Theory (COLT' 98). ACM Press.