ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ
Β' ΕΞΑΜΗΝΟ ΣΠΟΥΔΩΝ

ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Εισαγωγή στη Συνδιαστική Ανάλυση

Διδάσκων: ΣΤΑΥΡΟΣ ΑΔΑΜ

ΕΑΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2023-2024

Τύπος προβλήματος που στοχεύουμε

Απαρίθμηση συνόλων με συγκεκριμένα χαρακτηριστικά

Έστω Ω ένα υπερσύνολο αναφοράς και $\mathscr{D}(\Omega)$ το σύνολο όλων των υποσυνόλων του

- Αν $|\Omega| = \mathrm{n}$ τότε $|\mathscr{D}(\Omega)| = 2^{\mathrm{n}}$
- Έστω Ω το σύνολο των φοιτητών ενός Τμήματος και $|\Omega| = 120$

Ερωτήματα:

1. Κατά τη διάρκεια του μαθήματος 10 φοιτητές συνηθίζουν να κάθονται στην πρώτη σειρά. Με πόσους δυνατούς τρόπους είναι δυνατόν να καθίσουν οι φοιτητές αυτοί στην πρώτη σειρά;
2. Πόσες διαφορετικές ομάδες των 20 φοιτητών μπορούμε να σχηματίσουμε για τη συμμετοχή σε μια δειγματοληπτική έρευνα;

- Στο 1ο ερώτημα αν A είναι το σύνολο των φοιτητών που κάθονται στην πρώτη σειρά τότε,

  $|A| = 10$
- Αναζητάμε το πλήθος των διαφορετικών 10-δων που μπορούν κατασκευαστούν με τα στοιχεία του A.

➢ ΠΡΟΒΛΗΜΑ: ΤΑΚΤΟΠΟΙΗΣΗ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ - ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΩΝ

- Στο 2ο ερώτημα αναζητάμε το πλήθος των διαφορετικών 20-δων που μπορούν σχηματιστούν με διαφορετικά στοιχεία του Ω.
- Αναζητάμε το πλήθος όλων των υποσυνόλων του Ω με 20 στοιχεία.

➢ ΠΡΟΒΛΗΜΑ: ΕΠΙΛΟΓΗ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ - ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΩΝ

- Πείραμα μια διαδικασία (φυσική ή μη) που παράγει ένα σύνολο από παρατηρήσιμα αποτελέσματα
- Η διεξαγωγή του πειράματος αποτελείται από ενέργειες ή διαφορετικά στάδια που μπορούν να εκτελούνται:
  a) Σειριακά (Α και Β και Γ)
  b) Εναλλακτικά (Α ή Β ή Γ)
- Τα αντικείμενα στην επιλογή ή στην τακτοποίηση μπορούν να εμφανίζονται:
  c) Χωρίς επανάληψη (κάθε αντικείμενο μία φορά)
  d) Με επανάληψη (κάθε αντικείμενο πολλές φορές)

- Περίπτωση (a) Κανόνας ή Αρχή του Γινομένου

  Αν για τη διεξαγωγή ενός πειράματος απαιτούνται δύο στάδια Α και Β που εκτελούνται σειριακά (το ένα μετά το άλλο) και κάθε ένα παράγει, αντίστοιχα, m και n αποτελέσματα τότε η εκτέλεση του πειράματος παράγει συνολικά m x n δυνατά αποτελέσματα.

  Ο κανόνας γενικεύεται και για πειράματα με περισσότερα από δύο στάδια.

- Παράδειγμα: Σχεδιάζετε ένα ταξίδι για Ρώμη, Παρίσι και Λονδίνο στη σειρά. Έχετε 3 τρόπους να πάτε στη Ρώμη, από τη Ρώμη στο Παρίσι υπάρχουν 2 τρόποι και άλλοι 3 τρόποι για να πάτε από το Παρίσι στο Λονδίνο.
  Πόσοι συνολικά τρόποι υπάρχουν για να κάνετε το ταξίδι αυτό;

  Απάντηση: $3 \times 2 \times 3 = 18$

- Περίπτωση (b) Κανόνας ή Αρχή του Αθροίσματος

  Αν η διεξαγωγή ενός πειράματος είναι εφικτή σε δύο στάδια A και B που εκτελούνται εναλλακτικά (το ένα ή το άλλο) και κάθε ένα παράγει, αντίστοιχα, $\mathbf{m}$ και $\mathbf{n}$ δυνατά αποτελέσματα τότε η εκτέλεση του πειράματος παράγει $\mathbf{m+n}$ δυνατά αποτελέσματα.

  Ο κανόνας γενικεύεται και για πειράματα με περισσότερα από δύο στάδια

- Παράδειγμα: Σχεδιάζετε ένα ταξίδι για Ρώμη ή Παρίσι ή Λονδίνο. Έχετε 3 τρόπους να πάτε στη Ρώμη, 2 τρόπους για το Παρίσι και 3 τρόπους για να πάτε στο Λονδίνο.
  Πόσοι συνολικά τρόποι υπάρχουν για να κάνετε το ταξίδι αυτό ανεξάρτητα από τον προορισμό;

  Απάντηση: $3+2+3=8$

- ΤΑΚΤΟΠΟΙΗΣΗ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ - ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΩΝ
  - ΜΕΤΑΘΕΣΕΙΣ (PERMUTATIONS)
  - ΔΙΑΤΑΞΕΙΣ (ARRANGEMENTS)
- ΕΠΙΛΟΓΗ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ - ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΩΝ
  - ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΙ (COMBINATIONS)

- Χωρίς επανάληψη των στοιχείων - αντικειμένων
- Με επανάληψη των στοιχείων - αντικειμένων

Από ένα σύνολο με n στοιχεία θεωρούμε τα k

i. Χωρίς επανάληψη

ii. Με επανάληψη

- ΤΑΚΤΟΠΟΙΗΣΗ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ - ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΩΝ
  - ΜΕΤΑΘΕΣΕΙΣ (Permutations) - $k = n$, χωρίς επανάληψη
  - ΔΙΑΤΑΞΕΙΣ (Arrangements) - $k < n$, χωρίς επανάληψη
  - ΔΙΑΤΑΞΕΙΣ (Επαναληπτικές) - $k < n$, με επανάληψη
- ΕΠΙΛΟΓΗ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ - ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΩΝ
  - ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΙ (Combinations) - $k < n$, χωρίς επανάληψη

Απαρίθμηση Μεταθέσεων n στοιχείων έστω $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$

Δύο δυνατοί τρόποι:

- Άμεσος με την Αρχή του Γινομένου

  Μια μετάθεση n αντικειμένων εκτελείται σε n στάδια:

  - 1ο στάδιο n επιλογές
  - 2ο στάδιο n-1 επιλογές
  - …
  - (n-1)-οστό στάδιο 2 επιλογές
  - n-οστό στάδιο 1 επιλογή

  Επειδή τα n στάδια εκτελούνται σειριακά από την Αρχή του Γινομένου προκύπτει ότι το πλήθος των μεταθέσεων είναι:

$$1\cdot 2\cdots(n-1)\cdot n = n!$$

- Αναδρομικός
  - n=1 1 1 μετάθεση
  - n=2 1,2 - 2,1 $2 = 1 \cdot 2$ μεταθέσεις
  - n=3 1,2,3 - 1,3,2 - 2,1,3 - 2,3,1 - 3,1,2 - 3,2,1
    $6 = 3 \cdot 2 \cdot 1$ μεταθέσεις
  - n=4
  - $1,2,3 \leftarrow 4 \Rightarrow$ 1,4,2,3 - 1,2,4,3 - 4,1,2,3 - 1,2,3,4
  - $1,3,2 \leftarrow 4 \Rightarrow$ 1,4,3,2 - 1,3,4,2 - 4,1,3,2 - 1,3,2,4
  - …
  - $3,2,1 \leftarrow 4 \Rightarrow$ 3,4,2,1 - 3,2,4,1 - 4,3,2,1 - 3,2,1,4

- Σύνολο: $6 \cdot 4 = 24$ μεταθέσεις

Κατά συνέπεια:

- Αν στα $(n\text{-}1)$ στοιχεία προστεθεί το n-οστό τότε επειδή το αντικείμενο αυτό μπορεί να τοποθετηθεί στις $(n\text{-}2)$ θέσεις μεταξύ των $(n\text{-}1)$ στοιχείων $+2$ για τις άκρες τότε προκύπτουν n μεταθέσεις.
- Άρα, αν $a(n\text{-}1)$ συμβολίζει το πλήθος των μεταθέσεων των $n\text{-}1$ στοιχείων τότε από αυτές προκύπτουν $n \cdot a(n\text{-}1)$ μεταθέσεις.

  Τελικά,
- $a(n) = n \cdot a(n\text{-}1)$, όπου $n \geq 2$

$$= n \cdot (n\text{-}1) \cdot (n\text{-}2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$$

$$= n!$$

Άσκηση 1

Με πόσους τρόπους τοποθετούνται σε μία σειρά 20 άνδρες και 10 γυναίκες αν ληφθεί υπόψη ότι:

a) Δεν τίθεται κάποιος περιορισμός
b) Όλες οι γυναίκες είναι στην αρχή και μετά τοποθετούνται οι άνδρες
c) Στις 5 πρώτες θέσεις είναι γυναίκες
d) Όλες οι γυναίκες τοποθετούνται συνεχόμενα

Λύση:

Έστω ότι το σύνολο αποτελείται από τα εξής στοιχεία,

- **A_1, A_2, A_3,..., A_{20}, $Γ_1$, $Γ_2$, $Γ_3$,..., $Γ_{10}$**

a) Δεν τίθεται κάποιος περιορισμός

- Πόσα στάδια χρειάζονται;
- Επιλογή ατόμου για την $1^η$ θέση 30 τρόποι ($1^ο$ στάδιο)
- Επιλογή ατόμου για την $2^η$ θέση 29 τρόποι ($2^ο$ στάδιο)
- Επιλογή ατόμου για την $3^η$ θέση 28 τρόποι ($3^ο$ στάδιο)
- ...
- Επιλογή ατόμου για την $29^η$ θέση 2 τρόποι ($29^ο$ στάδιο)
- Επιλογή ατόμου για την $30^η$ θέση 1 τρόπος ($30^ο$ στάδιο)
- Τελικά : 30! τρόποι

b) Όλες οι γυναίκες είναι στην αρχή και μετά τοποθετούνται οι άνδρες

- Πόσα στάδια χρειάζονται;
- 2 στάδια :
- $1^{\text{ο}}$ στάδιο τοποθέτηση των γυναικών στις 10 πρώτες θέσεις
- $\to 10!$ τρόποι
- $2^{\text{ο}}$ στάδιο τοποθέτηση των ανδρών στις 20 τελευταίες θέσεις
- $\to 20!$ τρόποι
- Τα δύο στάδια εκτελούνται το ένα μετά το άλλο
- Άρα χρήση της Αρχής του Γινομένου
- Τελικά : $10!\cdot 20!$ τρόποι
- Το αποτέλεσμα είναι το ίδιο αν τοποθετηθούν πρώτα οι άνδρες και μετά οι γυναίκες, δηλ. αν τα στάδια αλλάξουν σειρά

c) Στις 5 πρώτες θέσεις τοποθετούνται γυναίκες

- Πόσα στάδια χρειάζονται;
- 5 στάδια για να τοποθετηθούν γυναίκες στις 5 πρώτες θέσεις
- $+$ 25 στάδια για να τοποθετηθούν γυναίκες ή άνδρες στις επόμενες 25 θέσεις
- Στα 5 πρώτα στάδια
- $1^{ο}$ στάδιο 10 τρόποι
- $2^{ο}$ στάδιο 9 τρόποι
- $3^{ο}$ στάδιο 8 τρόποι
- $4^{ο}$ στάδιο 7 τρόποι
- $5^{ο}$ στάδιο 6 τρόποι
- Συνολικά: $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$ τρόποι

c) (συνέχεια)

- Στα επόμενα 25 στάδια τοποθετούνται 25 γυναίκες ή άνδρες χωρίς διάκριση σε 25 θέσεις
- Άρα, 25! τρόποι
- Συνολικά: $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 25!$ τρόποι

ΜΕΤΑΘΕΣΕΙΣ – ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΙ - ΔΙΑΤΑΞΕΙΣ

c) (συνέχεια)

- Στα επόμενα 25 στάδια τοποθετούνται 25 γυναίκες ή άνδρες χωρίς διάκριση σε 25 θέσεις
- Άρα, 25! τρόποι
- Συνολικά: $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 25!$ τρόποι

$$\frac{10!}{5!}(30-5)!$$

d) Όλες οι γυναίκες τοποθετούνται συνεχόμενα

- Πόσα στάδια χρειάζονται;
- 1ο στάδιο: Έστω ότι τοποθετούνται οι 20 άνδρες
- 2ο στάδιο: Σε σχέση με τις θέσεις των ανδρών πόσες δυνατότητες υπάρχουν να τοποθετηθούν συνεχόμενα οι γυναίκες;

$\rightarrow$ $19+2=21$ δυνατότητες

- Για το 1ο στάδιο 20! τρόποι
- Για το 2ο στάδιο 10! τρόποι
- 21 εναλλακτικές δυνατότητες για το 2ο στάδιο
- Αρχή του Αθροίσματος : $10!+10!+\cdots+10!$ (21 φορές)
- Συνολικά: $20!\cdot 21\cdot 10!$ τρόποι

Απαρίθμηση Διατάξεων r στοιχείων από n ($r \leq n$)

Έστω το σύνολο $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$

- Αρχή του Γινομένου

  Η επιλογή των r στοιχείων εκτελείται σε r στάδια:

  – 1^o στάδιο n επιλογές
  – 2^o στάδιο $n-1$ επιλογές
  – …
  – $(r-1)^o$ στάδιο $n-(r-2)$ επιλογές
  – r^o στάδιο $n-r+1$ επιλογές

Επειδή τα r στάδια εκτελούνται σειριακά από την Αρχή του Γινομένου προκύπτει ότι το πλήθος των μεταθέσεων είναι:

$$n \cdot (n-1) \cdots (n-(r-2)) \cdot (n-r+1)$$

- Το πλήθος των διατάξεων r διαφορετικών αντικειμένων από n δίνεται από τη σχέση:

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

- Παρατηρείστε ότι

$n! = 1 \cdot 2 \cdots (n\text{-}r) \cdot (n\text{-}r+1) \cdot (n\text{-}r+2) \cdots (n\text{-}1) \cdot n$

ή ακόμη ότι

$n! = 1 \cdot 2 \cdots (n\text{-}r) \cdot (n\text{-}(r\text{-}1)) \cdot (n\text{-}(r\text{-}2)) \cdots (n\text{-}1) \cdot n$

- Άρα η ζητούμενη σχέση προκύπτει αν διαιρέσουμε το n! με (n-r)!

Απαρίθμηση Συνδυασμών n στοιχείων ανά k ($k \le n$)

Έστω το σύνολο {1, 2, 3, … , n}

- Ένας συνδυασμός k στοιχείων από τα n είναι μια επιλογή για την οποία δεν μας ενδιαφέρει η σειρά των στοιχείων
- Κατά συνέπεια ενώ οι διατάξεις k στοιχείων αφορούν διατεταγμένες k-αδες (k-tuples) οι συνδυασμοί αποτελούν διακριτά υποσύνολα του συνόλου {1, 2, 3, … , n} με πλήθος στοιχείων k.
- Το πλήθος των συνδυασμών k στοιχείων από n ή αλλιώς n στοιχείων ανά k γράφεται:

$$C(n,k) = \binom{n}{k}$$

ΜΕΤΑΘΕΣΕΙΣ – ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΙ - ΔΙΑΤΑΞΕΙΣ

- Το πλήθος των συνδυασμών k αντικειμένων από n δίνεται από τη σχέση:

$$C(n,k) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

- Για να αποδείξουμε αυτή τη σχέση ας θεωρήσουμε μια επιλογή k διαφορετικών στοιχείων από τα n.
- Αυτή η επιλογή είναι ένας συνδυασμός k στοιχείων από τα n
- Ο συνδυασμός αυτός δίνει k! διατάξεις
- Δεδομένου ότι το πλήθος των διατάξεων είναι

$$P(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

- Το πλήθος των συνδυασμών προκύπτει αν διαιρέσουμε το πλήθος όλων των διατάξεων με το πλήθος των διατάξεων που δίνει κάθε συνδυασμός. Δηλαδή προκύπτει η σχέση:

$$C(n,k) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Άσκηση 2

Απαντήστε στα ακόλουθα ερωτήματα:

a) Πόσες διαφορετικές πινακίδες αυτοκινήτων υπάρχουν που αποτελούνται από 2 διαφορετικά γράμματα του αγγλικού αλφαβήτου ακολουθούμενα από τέσσερα δεκαδικά ψηφία διαφορετικά μεταξύ τους;

b) Επαναλάβετε το ερώτημα (a) αν τα 4 δεκαδικά ψηφία πρέπει να δίνουν αριθμό μεγαλύτερο από 1000.

Άσκηση 3

Σε μία τάξη 100 φοιτητών υπάρχουν 40 αγόρια:

a) Με πόσους τρόπους μπορεί να σχηματιστεί μια 10-μελής επιτροπή;
b) Επαναλάβετε την ερώτηση (a) αν στην επιτροπή πρέπει να υπάρχει ίσος αριθμός αγοριών και κοριτσιών.
c) Επαναλάβετε την ερώτηση (a) αν η επιτροπή πρέπει να αποτελείται από 6 αγόρια και 4 κορίτσια είτε από 4 αγόρια και 6 κορίτσια.

Άσκηση 4

Δίνονται οι αριθμοί $1, 2, 3, 5, 7, 8$. Στο πρόβλημα αυτό δεν επιτρέπονται οι επαναλήψεις. Απαντήστε στα ακόλουθα ερωτήματα:

a) Πόσοι τετραψήφιοι αριθμοί είναι δυνατόν να σχηματισθούν με τα ψηφία αυτά;
b) Πόσοι από τους αριθμούς του ερωτήματος (a) είναι μικρότεροι από το 4000;
c) Πόσοι από τους αριθμούς του ερωτήματος (a) είναι άρτιοι;
d) Πόσοι από τους αριθμούς του ερωτήματος (a) είναι περιττοί;
e) Πόσοι από τους αριθμούς του ερωτήματος (a) είναι πολλαπλάσια του 5;
f) Πόσοι από τους αριθμούς του ερωτήματος (a) περιέχουν και το ψηφίο 3 και το ψηφίο 5

Απαρίθμηση Διατάξεων r στοιχείων από n με επανάληψη

Τα στοιχεία μπορούν να επαναλαμβάνονται

Έστω το σύνολο $\{1, 2, 3, \dots, n\}$

- Αρχή του Γινομένου

  Η επιλογή των r στοιχείων εκτελείται σε r στάδια:

  – 1^{o} στάδιο n επιλογές
  – 2^{o} στάδιο n επιλογές
  – …
  – r^{o} στάδιο n επιλογές

Επειδή τα r στάδια είναι σειριακά από την Αρχή του Γινομένου προκύπτει ότι το πλήθος των μεταθέσεων είναι:

$$n \cdot n \cdots n = n^{r}$$

Παράδειγμα

Έστω το σύνολο $\{1, 2, 3\}$. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους είναι δυνατό να τοποθετηθούν σε 5 θέσεις, 3 φορές το 1, 1 φορά το 2 και 1 φορά το 3.

Απάντηση:

- Στάδια εκτέλεσης του πειράματος:
- $1^{ο}$ στάδιο: τοποθετώ 3 φορές το $1 \rightarrow$ Επιλογή 3 θέσεων απο τις 5. Άρα συνδυασμοί των 5 ανά 3. $C(5,3) = 10$
- $2^{ο}$ στάδιο: τοποθετώ το 2 $\rightarrow$ Επιλογή 1 θέσης από τις 2 που απομένουν
- $3^{ο}$ στάδιο: τοποθετώ το $1 \rightarrow$ Επιλογή 1 θέσης από τη 1 που απομένει

Παράδειγμα (συνέχεια)

Ισχύει η Αρχή του Γινομένου

Συνολικά: $10 \cdot 2 \cdot 1 = 20$

Άλλοι τρόποι:

- Τοποθετώ με τη σειρά το 2, το 3 και τέλος τα 3 ένα (1)
- Τοποθετώ με τη σειρά το 3, τα 3 ένα (1) και τέλος το 2
- …
- Κάνετε τους υπολογισμούς και συγκρίνετε τα αποτελέσματα

Άσκηση 5

Απαντήστε στα ακόλουθα ερωτήματα:

a) Πόσες διαφορετικές πινακίδες αυτοκινήτων υπάρχουν που αποτελούνται από 2 γράμματα του αγγλικού αλφαβήτου ακολουθούμενα από τέσσερα δεκαδικά ψηφία;

b) Επαναλάβετε το ερώτημα (a) αν τα 4 δεκαδικά ψηφία πρέπει να δίνουν αριθμό μεγαλύτερο από 1000.

Επαναληπτικές Μεταθέσεις

- Μεταθέσεις των στοιχείων ως προς ένα χαρακτηριστικό που ομαδοποιεί τα στοιχεία.
- Παράδειγμα:
  Ένα σύνολο με 2 μαύρες και 2 λευκές σφαίρες (μπάλες).
  Πόσες διαφορετικές μεταθέσεις μπορούν να προκύψουν;
  - ⓿⓿○○
  - ⓿○⓿○
  - ⓿○○⓿
  - ○⓿⓿○
  - ○⓿○⓿
  - ○○⓿⓿

Επαναληπτικές Μεταθέσεις

- Αν θεωρήσουμε ότι όλα τα στοιχεία είναι διαφορετικά μεταξύ τους τότε προκύπτουν μεταθέσεις 4 στοιχείων $\rightarrow 4!$
- Έστω ότι τοποθετούμε τις δύο μαύρες σφαίρες

➓➓ __ __ ή ➓ __ ➓ __ ή άλλο

Αν με κάποιο τρόπο διακρίνουμε τη μία σφαίρα από την άλλη τότε η τοποθέτηση των δύο λευκών σφαιρών στις δύο θέσεις που απομένουν δίνουν 2 $(=2!)$ μεταθέσεις των λευκών σφαιρών.

Εξ άλλου για τον ίδιο λόγο η τοποθέτηση των 2 μαύρων σφαιρών δίνει 2 $(=2!)$ μεταθέσεις.

Άρα συνολικά $2! \cdot 2!$ μεταθέσεις για κάθε επιλογή τοποθέτησης των 2 μαύρων και των 2 λευκών σφαιρών.

Επαναληπτικές Μεταθέσεις

- Κατά συνέπεια επειδή συνολικά οι μεταθέσεις είναι 4! Συμπεραίνουμε ότι το πλήθος των μεταθέσεων των 4 σφαιρών είναι:

$\rightarrow$ $4! / (2! \cdot 2!) = (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4) / (1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2) = (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4) / 4 = 6$

- Αν γενικεύσουμε για Κ στοιχεία που ανήκουν σε 2 ομάδες όμοιων στοιχείων με πλήθος στοιχείων k_1 και k_2 θα έχουμε:

$\rightarrow$ $K! / (k_1! \cdot k_2!)$

Επαναληπτικές Μεταθέσεις

- Για ένα σύνολο Κ στοιχείων που ανήκουν σε n ομάδες όμοιων στοιχείων πλήθους $k_1, k_2, \ldots, k_n$ και $k_1 + k_2 + \ldots + k_n = K$ τότε το πλήθος των μεταθέσεων των Κ στοιχείων είναι:

$$\rightarrow \quad \frac{K!}{k_1! \cdot k_2! \cdots k_n!}$$

Άσκηση 6

Δίνεται η λέξη «ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ». Πόσοι αναγραμματισμοί μπορούν να προκύψουν από τη λέξη αυτή;

Άσκηση 7

a) Με πόσους τρόπους μπορούν τοποθετηθούν στη σειρά $3A$, $3B$ και $3C$;

b) Απαντήστε στο ερώτημα (a) αν τα $3A$ πρέπει να είναι συνεχόμενα.

c) Απαντήστε στο ερώτημα (a) αν τα $2A$ πρέπει να είναι συνεχόμενα.

Επαναληπτικοί Συνδυασμοί

Πρόβλημα: Από ένα σύνολο επιλέγουμε k στοιχεία τα οποία για κάποιο λόγο δεν διαφοροποιούνται μεταξύ τους. Με πόσους τρόπους είναι δυνατό να τοποθετηθούν τα k αυτά στοιχεία σε n διαφορετικές θέσεις όταν σε κάθε θέση μπορούν να τοποθετηθούν $0, 1, 2, 3$ ή ακόμη και k στοιχεία.

- Έστω ότι n=5 και k=3 τότε σχηματικά θα μπορούμενα έχουμε:

3 | _ | _ | _ | _ ή _ | 3 | _ | _ | _ ή

2 | 1 | _ | _ | _ ή 1 | 2 | _ | _ | _ κ.λπ.

- Επαναδιατυπώνουμε το πρόβλημα συμβολίζοντας με 0 κάθε ένα από τα k στοιχεία και με 1 κάθε ένα από τα «διαχωριστικά» μεταξύ των n θέσεων, δηλ. n-1 διαχωριστικά, άρα n-1 φορές 1.

- Σύμφωνα με αυτό το συμβολισμό για $n=5$ και $k=3$ θα έχουμε:

_ | 3 | _ | _ | _ $\rightarrow$ 1 000 1 1 1

2 | 1 | _ | _ | _ $\rightarrow$ 00 1 0 1 1 1

- Το πρόβλημα αυτό μπορεί να διατυπωθεί ως ένα πρόβλημα μεταθέσεων στοιχείων δύο ειδών "0" k φορές και "1" n-1 φορές και το συνολικό πλήθος των στοιχείων είναι $(k+n-1)$.

Κατά συνέπεια σύμφωνα με την προηγούμενη παράγραφο το πλήθος των διαφορετικών σχηματισμών (configurations) που μπορούν να προκύψουν είναι:

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{(k+n-1)!}{k! \cdot (n-1)!}$$

Εδώ θα πρέπει να τονίσουμε ότι:

Ενώ στους συνδυασμούς ήταν σαφές ότι ένας συνδυασμός αποτελεί ένα υποσύνολο με k στοιχεία από τα n του συνόλου αναφοράς στην περίπτωση αυτής της παραγράφου η επανάληψη των στοιχείων δεν δίνει σύνολα αλλά ομάδες σε διαφορετικούς «σχηματισμούς».

Παράδειγμα:

Έστω ότι τα στοιχεία μας είναι {Κυ, Δε, Τρ, Τε, Πε, Πα, Σα} , δηλ. οι ημέρες της εβδομάδας. Τότε η επιλογή 3 ημερών από τις 7 με επανάληψη μπορεί να δώσει «σχηματισμούς» όπως [Δε, Τρ, Τε] ή [Δε, Τε, Τρ] ή [Τε, Δε, Τε]. Προσέξτε ότι οι δύο πρώτοι σχηματισμοί θεωρούνται διαφορετικοί ενώ στην περίπτωση των συνδυασμών πρόκειται για τον ίδιο συνδυασμό.

Κατά συνέπεια για την απαρίθμηση των επαναληπτικών συνδυασμών k στοιχείων από τα n ενός συνόλου δεν λαμβάνονται υπόψη οι διαφορετικές διατάξεις με τις οποίες τοποθετούνται τα στοιχεία σε κάθε σχηματισμό

αλλά,

λαμβάνεται υπόψη η διάταξη των σχηματισμών ως προς το πλήθος των στοιχείων που τοποθετούντα σε κάθε σχηματισμό.

Σημειώστε το διαφορετικό συμβολισμό των επαναληπτικών συνδυασμών σε σχέση με τους συνδυασμούς.

Τέλος ισχύει η ακόλουθη σχέση:

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \binom{k+n-1}{k} = \binom{k+n-1}{n-1}$$

- Παράδειγμα (από το βιβλίο Διακριτά Μαθηματικά του C. Liu) :

  Πόσοι τρόποι επιλογής τριών (3) από επτά (7) ημέρες υπάρχουν όταν επιτρέπονται οι επαναλήψεις;

  Απάντηση: $C(7 + 3 - 1, 3) = C(9, 3) = 84$

  Πόσοι τρόποι επιλογής επτά (7) από τρείς (3) ημέρες υπάρχουν; Εδώ οι επαναλήψεις είναι υποχρεωτικές.

  Απάντηση: $C(7 + 3 - 1, 7) = C(9, 7) = 36$

Άσκηση 8

Ποιό είναι το πλήθος των διαφορετικών αποτελεσμάτων όταν ρίχνονται ταυτόχρονα τρία ζάρια;

Άσκηση 9

Να υπολογιστούν οι τρόποι με τους οποίους μπορούν να τοποθετηθούν 16 όμοιες σφαίρες σε 8 κάλπες;