ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ
Β' ΕΞΑΜΗΝΟ ΣΠΟΥΔΩΝ

ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Εισαγωγή στη Θεωρία Πιθανοτήτων

Διδάσκων: ΣΤΑΥΡΟΣ ΑΔΑΜ

ΕΑΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2023-2024

Βασικές Έννοιες

- Πείραμα τύχης

  Ονομάζεται οποιοδήποτε φαινόμενο ή διαδικασία (φυσικό ή τεχνητό) που έχει ένα σύνολο δυνατών αποτελεσμάτων.

  Τα αποτελέσματα στο σύνολό τους μπορεί να είναι γνωστά αλλά το αποτέλεσμα μιας συγκεκριμένης εκτέλεσης του πειράματος είναι απρόβλεπτο και θεωρείται τυχαίο.

- Παραδείγματα:
  - το ρίξιμο ενός ζαριού
  - η αναμονή του λεωφορείου
  - η εξέταση ενός ασθενούς (θετικός, αρνητικός)
  - ...

Βασικές Έννοιες

- Ποιά από τα επόμενα είναι πειράματα τύχης:
  - η εκτέλεση μιας αριθμητικής πράξης; $\rightarrow$ $3*(5+2)$
  - η εκτέλεση ενός αλγορίθμου;
  - άλλα;
- Δειγματικός χώρος

  Είναι το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων ενός πειράματος τύχης, έστω Ω.
- Παραδείγματα:
  - το ρίξιμο ενός ζαριού

    $\rightarrow$ $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
  - ο χρόνος αναμονής του λεωφορείου

    $\rightarrow$ $\Omega = [0, +\infty)$
  - η εξέταση ενός ασθενούς

    $\rightarrow$ $\Omega = \{\theta\varepsilon\tau\iota\kappa\acute{o}\varsigma, \alpha\rho\nu\eta\tau\iota\kappa\acute{o}\varsigma\}$

Βασικές Έννοιες

- Ο δειγματικός χώρος Ω μπορεί να είναι:
  - διακριτό σύνολο
  - συνεχές σύνολο
- Στο μάθημα αυτό ενδιαφερόμαστε για πειράματα τύχης με διακριτό δειγματικό χώρο. Δηλαδή τα αποτελέσματα διακρίνονται το ένα από το άλλο και είναι πεπερασμένα ως προς το πλήθος.
- Παραδείγματα;

Βασικές Έννοιες

- Ενδεχόμενο

Ένα οποιοδήποτε υποσύνολο του δειγματικού χώρου, έστω $\mathrm{A} \subseteq \Omega$.

Τα ενδεχόμενα διακρίνονται σε στοιχειώδη και σύνθετα.

Τα στοιχειώδη είναι μονοσύνολα (ένα αποτέλεσμα).

Τα σύνθετα περιλαμβάνουν περισσότερα αποτελέσματα.

Το $\mathrm{A} = \{\emptyset\}$ είναι το αδύνατο ενδεχόμενο.

Ο δειγματικός χώρος Ω ως σύνολο $(\Omega \subseteq \Omega)$ είναι ένα ενδεχόμενο και ονομάζεται το βέβαιο ενδεχόμενο.

Το σύνολο των ενδεχομένων ενός πειράματος τύχης με δειγματικό χώρο Ω είναι το δυναμοσύνολο του Ω, $\mathscr{D}(\Omega)$ με πλήθος στοιχείων

$$|\mathscr{D}(\Omega)| = 2^{|\Omega|}$$

Βασικές Έννοιες

Να σημειωθεί ότι ένα ενδεχόμενο λέμε ότι εμφανίζεται ή ότι συμβαίνει σε ένα πείραμα τύχης

- στην περίπτωση ενός στοιχειώδους ενδεχομένου, αν το πείραμα τύχης δίνει ως αποτέλεσμα το ίδιο το ενδεχόμενο
- στην περίπτωση σύνθετου ενδεχομένου, αν η έκβαση του πειράματος είναι έκβαση κάποιου από τα στοιχειώδη ενδεχόμενα που αποτελούν το σύνθετο ενδεχόμενο

Βασικές Έννοιες

- Παραδείγματα:
  - το ρίξιμο ενός ζαριού

$\rightarrow f_1 = \{1\},\ f_5 = \{5\},\ f_6 = \{6\}, f_0 = \{\emptyset\},\ f_s = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$

$\rightarrow f_{odd} = \{1, 3, 5\}$

  - η εξέταση ενός ασθενούς

$\rightarrow f_+ = \{\text{θετικός}\},\ f_- = \{\text{αρνητικός}\},\ f_0 = \{\emptyset\},$

$f_s = \{\text{θετικός,αρνητικός}\}$

Βασικές Έννοιες

- Σκοπός της μελέτης των πειραμάτων τύχης είναι η μελέτη των αντίστοιχων φαινομένων από την άποψη του αποτελέσματος δηλαδή της τιμής συγκεκριμένων μεγεθών που εξελίσσονται κατά την εκτέλεση του πειράματος.
- Δεδομένου ότι η έκβαση (δηλ. το αποτέλεσμα) ενός πειράματος τύχης είναι αβέβαιη, απρόβλεπτη δηλαδή τυχαία, το ενδιαφέρον μας εστιάζει στην μέτρηση της αβεβαιότητας ή αλλιώς της τυχαιότητας.
- Η μέτρηση αυτή δεν μπορεί να γίνει με αυθαίρετο τρόπο όπως π.χ. πιστεύω ότι οι εκλογές αυτές κατά 80% θα βγάλουν πρώτο κόμμα το τάδε, ή ότι κατά 40% αύριο θα βρέχει, κ.λπ.

  $\rightarrow$ υποκειμενική πιθανότητα

Βασικές Έννοιες

- Χρειάζεται ένα τρόπος μέτρησης της τυχαιότητας που θα είναι αντικειμενικός και όχι υποκειμενικός.
- Η έννοια της πιθανότητας όπως ορίζεται στη Θεωρία Πιθανοτήτων προσφέρει ακριβώς αυτό το αντικειμενικό μέτρο μέτρησης της αβεβαιότητας.
- Άλλες πιό πρόσφατες μαθηματικές προσεγγίσεις μέτρησης ή ποσοτικοποίησης της αβεβαιότητας (Μηχανική Μάθηση):
  - possibility theory
  - fuzzy logic
  - interval analysis
  - rough sets
  - …

Βασικές Έννοιες

- Πιθανότητα ενός ενδεχομένου A $(\mathrm{A} \subseteq \Omega)$ ενός πειράματος τύχης είναι ένας θετικός αριθμός που συμβολίζεται με $\mathrm{P(A)}$ για τον οποίο ισχύει ότι $0 \leq \mathrm{P(A)} \leq 1$.
- Όσο μεγαλύτερος αριθμός είναι το $\mathrm{P(A)}$ τόσο μεγαλύτερη εκτιμάται ότι είναι η πιθανότητα η έκβαση του πειράματος να είναι το ενδεχόμενο A.
- Είναι διαισθητικά προφανές αλλά αποτελεί και αξίωμα των πιθανοτήτων ότι το Ω αποτελεί το βέβαιο ενδεχόμενο και ισχύει $\mathrm{P}(\Omega) = 1$, καθώς επίσης ότι $\mathrm{P}(\{\emptyset\}) = 0$.
- Για οποιοδήποτε άλλο ενδεχόμενο A στοιχειώδες ή σύνθετο η πιθανότητα $\mathrm{P(A)}$ προκύπτει από κάποιο υπολογισμό.

Κλασικός ορισμός πιθανότητας

- Ορισμός

  Η πιθανότητα ενός ενδεχομένου A $(\mathrm{A} \subseteq \Omega)$ ενός πειράματος τύχης $\mathrm{P}(\mathrm{A})$ υπολογίζεται από τη σχέση

$$P(A) = \frac{N_A}{N}$$

  - N_A συμβολίζει το πλήθος των ευνοϊκών αποτελεσμάτων για το ενδεχόμενο A
  - N είναι το πλήθος όλων των δυνατών αποτελεσμάτων του πειράματος

- Στον κλασικό ορισμό η πιθανότητα καθορίζεται εκ των προτέρων με βάση το δειγματικό χώρο και τα στοιχεία του.

Κλασικός ορισμός πιθανότητας

- Παράδειγμα:

Πείραμα τύχης: το ρίξιμο ενός ζαριού

Δειγματικός χώρος: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Ενδεχόμενο: $f_6 = \{6\}$

$N_A = 1$

$N = 6$

$P(f_6) = 1/6$

Ενδεχόμενο: A = {το ζάρι φέρνει άρτιο αποτέλεσμα} $= \{2, 4, 6\}$

$N_A = 3$ $\rightarrow$ τρία ευνοϊκά αποτελέσματα για το ενδεχόμενο

$N = 6$

$P(f_{even}) = 3/6 = 1/2$

Κλασικός ορισμός πιθανότητας

Παρατηρήσεις:

a. Ο ορισμός αυτός αν και κλασικός εν τούτοις αρκετές φορές συμπίπτει ως προς τα αποτελέσματα με το συχνοτικό ορισμό (frequentist definition).

b. Ο κλασικός ορισμός απαιτεί την εκ των προτέρων γνώση των N_{A} και N.

c. Σε πολλές περιπτώσεις ο κλασικός ορισμός οδηγεί σε λάθος συμπεράσματα.

   Παράδειγμα: Ποιά είναι η πιθανότητα ένας φοιτητής που μπαίνει σε ένα πανεπιστημιακό Τμήμα να έχει αποφοιτήσει σε πέντε χρόνια.

Κλασικός ορισμός πιθανότητας

Ένας πρακτικός υπολογισμός της πιθανότητας μπορεί να γίνει με βάση τον κλασικό ορισμό από το λόγο του πλήθους όσων έχουν αποφοιτήσει προς το πλήθος όσων μπήκαν σε κάποιο Τμήμα πριν 5 χρόνια.

$$\frac{\text{πλήθος φοιτητών που αποφοίτησαν}}{\text{σύνολο φοιτητών που μπήκαν}}$$

Όμως αυτή η προσέγγιση είναι λάθος γιατί θεωρούμε ότι το σύνολο των φοιτητών που μπήκαν στο Τμήμα χωρίζεται σε δύο υποσύνολα αυτοί που έχουν αποφοιτήσει και αυτοί που δεν έχουν. Αλλά δεν υπάρχει κάποιος λόγος να πιστέψουμε ότι το αποτέλεσμα «έχει αποφοιτήσει» είναι ισοπίθανο με το «δεν έχει αποφοιτήσει».

Κλασικός ορισμός πιθανότητας

Ο κλασικός ορισμός μπορεί να βελτιωθεί αν θεωρήσουμε ότι όλα τα αποτελέσματα είναι ισοπίθανα.

Βέβαια στην περίπτωση αυτή και για προβλήματα όπως το προηγούμενο δεν είναι δυνατή η εφαρμογή του κλασικού ορισμού ο οποίος, τελικά, είναι χρήσιμος σε τυχερά παιχνίδια.

Για να λύσουμε το προηγούμενο πρόβλημα θα πρέπει να αναζητήσουμε στατιστικά στοιχεία από το μεγαλύτερο δυνατό αριθμό Τμημάτων και με βάση αυτά τα στοιχεία να υπολογίσουμε το προηγούμενο λόγο.

Ορισμός που βασίζεται στη Σχετική Συχνότητα

Με βάση την τελευταία υπόθεση εξετάζουμε ένα μεγάλο πλήθος επαναλήψεων του πειράματος τύχης και υπολογίζουμε:

- N_A το πλήθος των ευνοϊκών εμφανίσεων του ενδεχομένου Α
- N το πλήθος των επαναλήψεων του πειράματος τύχης

Η διαφορά με τον κλασικό ορισμό είναι ότι θεωρούμε πως το N είναι πολύ μεγάλο. Έτσι προκύπτει ο ακόλουθος ορισμός της πιθανότητας του ενδεχομένου A

$$P(A) = \lim_{N \to \infty} \frac{N_A}{N}$$

Αξιωματικός ορισμός πιθανότητας

Υποθέσεις:

a. Η ένωση $A \cup B$ ή αλλιώς $A+B$ δύο ενδεχομένων A και B ενός πειράματος τύχης είναι το ενδεχόμενο που εμφανίζεται όταν εμφανίζεται το ενδεχόμενο A ή B ή και τα δύο.

b. Η τομή $A \cap B$ ή αλλιώς AB δύο ενδεχομένων A και B ενός πειράματος τύχης είναι το ενδεχόμενο που εμφανίζεται όταν εμφανίζονται και τα δύο ενδεχόμενα A και B.

c. Τα ενδεχόμενα A και B είναι ασυμβίβαστα όταν η εμφάνιση του ενός αποκλείει την εμφάνιση του άλλου. Τα ενδεχόμενα αυτά λέγονται και ξένα μεταξύ τους. $A \cap B = \emptyset$

Αξιωματικός ορισμός πιθανότητας

Ο αξιωματικός ορισμός βασίζεται στα τρία επόμενα αξιώματα:

a. Η πιθανότητα $\mathrm{P(A)}$ ενός ενδεχομένου A είναι ένας μη αρνητικός αριθμός που έχει ανατεθεί στο ενδεχόμενο αυτό $0 \leq \mathrm{P(A)}$.

b. Η πιθανότητα του βέβαιου ενδεχομένου είναι ίση με 1,

   $\mathrm{P}(\Omega) = 1$.

c. Εάν τα ενδεχόμενα A και B είναι ασυμβίβαστα, $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \emptyset$, τότε ισχύει ότι $\mathrm{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$.

   Ο συγκεκριμένος ορισμός οφείλεται στον Kolmogorov, 1933, και από πολλούς θεωρείται ως ο πληρέστερος.

Αξιωματικός ορισμός πιθανότητας

Ιδιότητες:

a. Η πιθανότητα του αδύνατου ενδεχομένου είναι 0

$$P\{\emptyset\} = 0$$

$$A = A \cup \{\emptyset\} \Rightarrow P(A) = P(A \cup \{\emptyset\}) = P(A) + P\{\emptyset\} \Rightarrow P\{\emptyset\} = 0$$

b. Για κάθε ενδεχόμενο A ισχύει ότι

$$P(A) = 1 - P(\Omega - A)$$

c. Για δύο οποιαδήποτε ενδεχόμενα A και B ισχύει ότι

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

→ Θυμηθείτε τον τύπο που δίνει τον πληθικό αριθμό της ένωσης δύο συνόλων (Αρχή του εγκλεισμού - αποκλεισμού).

Αξιωματικός ορισμός πιθανότητας

Ιδιότητες:

d. Αν A_1, A_2,… A_K, είναι Κ υποσύνολα του δειγματικού χώρου ξένα μεταξύ τους ανά δύο των οποίων η ένωση $\mathrm{A}_1 \cup \mathrm{A}_2 \cup \ldots \cup \mathrm{A}_\mathrm{K} = \Omega$ τότε $\mathrm{P}(\mathrm{A}_1) + \mathrm{P}(\mathrm{A}_2) + \ldots + \mathrm{P}(\mathrm{A}_\mathrm{K}) = 1$

Άσκηση 1

Έστω ότι ρίχνουμε δύο αμερόληπτα ζάρια. Ποιά είναι η πιθανότητα του ενδεχομένου A το άθροισμα των αποτελεσμάτων των δύο ζαριών να είναι 7;

1. Έστω ότι ο δειγματικός χώρος αποτελείται από τα ακόλουθα αποτελέσματα: $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$.

   Σύμφωνα με τον κλασικό ορισμό και επειδή τα επί μέρους αποτελέσματα είναι ισοπίθανα το ευνοϊκό αποτέλεσμα για το ενδεχόμενο A είναι 1 και το σύνολο των αποτελεσμάτων είναι 11. Άρα $\mathrm{P(A)} = 1/11$

   Είναι σωστό αυτό το αποτέλεσμα;

Άσκηση 1 (συνέχεια)

2. Έστω ότι ο δειγματικός χώρος αποτελείται από τα ακόλουθα αποτελέσματα:

$\{1\text{-}1, 1\text{-}2, 1\text{-}3, 1\text{-}4, 1\text{-}5, 1\text{-}6,$

$2\text{-}2, 2\text{-}3, 2\text{-}4, 2\text{-}5, 2\text{-}6,$

$3\text{-}3, 3\text{-}4, 3\text{-}5, \text{-}3\text{-}6,$

$4\text{-}4, 4\text{-}5, 4\text{-}6,$

$5\text{-}5, 5\text{-}6,$

$6\text{-}6\}.$

Σύμφωνα με τον κλασικό ορισμό και επειδή τα επί μέρους αποτελέσματα είναι ισοπίθανα τα ευνοϊκά αποτελέσματα για το ενδεχόμενο A είναι 3 και το σύνολο των αποτελεσμάτων είναι 21. Άρα $\mathrm{P}(\mathrm{A}) = 3/21$

Είναι σωστό αυτό το αποτέλεσμα;

Άσκηση 1 (συνέχεια)

3. Έστω ότι ο δειγματικός χώρος αποτελείται από τα ακόλουθα αποτελέσματα:

$\{1\text{-}1, 1\text{-}2, 1\text{-}3, 1\text{-}4, 1\text{-}5, 1\text{-}6,$

$2\text{-}1, 2\text{-}2, 2\text{-}3, 2\text{-}4, 2\text{-}5, 2\text{-}6,$

$3\text{-}1, 3\text{-}2, 3\text{-}3, 3\text{-}4, 3\text{-}5, 3\text{-}6,$

$4\text{-}1, 4\text{-}2, 4\text{-}3, 4\text{-}4, 4\text{-}5, 4\text{-}6,$

$5\text{-}1, 5\text{-}2, 5\text{-}3, 5\text{-}4, 5\text{-}5, 5\text{-}6,$

$6\text{-}1, 6\text{-}2, 6\text{-}3, 6\text{-}4, 6\text{-}5, 6\text{-}6\}.$

Σύμφωνα με τον κλασικό ορισμό και επειδή τα επί μέρους αποτελέσματα είναι ισοπίθανα τα ευνοϊκά αποτελέσματα για το ενδεχόμενο A είναι 6 και το σύνολο των αποτελεσμάτων είναι 36. Άρα $\mathrm{P}(\mathrm{A}) = 6/36$

Αυτό είναι το σωστό αποτέλεσμα.

Άσκηση 2

Έστω ότι ρίχνουμε ένα αμερόληπτο ζάρι. Ποιά είναι η πιθανότητα του ενδεχομένου A το αποτέλεσμα είναι άρτιος αριθμός;

Το ενδεχόμενο $A = \{2, 4, 6\}$ είναι σύνθετο.

$A = \{2\} \cup \{4\} \cup \{6\}$ και επειδή τα στοιχειώδη ενδεχόμενα $\{2\}$, $\{4\}$, $\{6\}$ είναι ξένα μεταξύ τους ανά δύο ισχύει ότι

$$P(A) = P(\{2\} \cup \{4\}) + P(\{6\}) =$$

$$P(\{2\}) + P(\{4\}) + P(\{6\}) =$$

$$1/6+1/6+1/6 = 3/6 = 1/2$$

Άσκηση 3

Οκτώ φοιτητές περιμένουν στη σειρά για μια συνέντευξη. Ζητάμε την πιθανότητα να υπάρχουν ακριβώς δύο πρωτοετείς, δύο δευτεροετείς, δύο τριτοετείς και δύο τεταρτοετείς.

$\rightarrow$ Καθορισμός του δειγματικού χώρου

Ο δειγματικός χώρος αποτελείται από 4^8 σχηματισμούς από φοιτητές και από τα 4 έτη. (Γιατί;)

Έστω ότι αυτά τα αποτελέσματα είναι ισοπίθανα.

$\rightarrow$ Καθορισμός ευνοϊκών αποτελεσμάτων για το ενδεχόμενο

$8!/(2!\cdot 2!\cdot 2!\cdot 2!)$ (Γιατί;)

Άρα η πιθανότητα του ενδεχομένου είναι

$8!/(2!\cdot 2!\cdot 2!\cdot 2!\cdot 4^8) = 0.0385$

Άσκηση 4

Σε μία δειγματοληπτική έρευνα 100.000 ατόμων, 51.500 είναι γυναίκες και 48.500 άνδρες. Από τις γυναίκες 9.000 βρέθηκαν φορείς ενός μικροβίου ενώ από τους άνδρες οι φορείς ήταν 30.200. Υποθέτουμε ότι ένα άτομο επιλέγεται τυχαία. Ποιά είναι η πιθανότητα των ενδεχομένων:

$A_1 = \{\gamma+\}$: γυναίκα φορέας

$A_2 = \{\gamma-\}$: γυναίκα μη φορέας

$A_3 = \{\alpha+\}$: άνδρας φορέας

$A_4 = \{\alpha-\}$: άνδρας μη φορέας

$\rightarrow$ Καθορισμός του δειγματικού χώρου

Ο δειγματικός χώρος είναι $\Omega = \{\gamma+, \gamma-, \alpha+, \alpha-\}$;

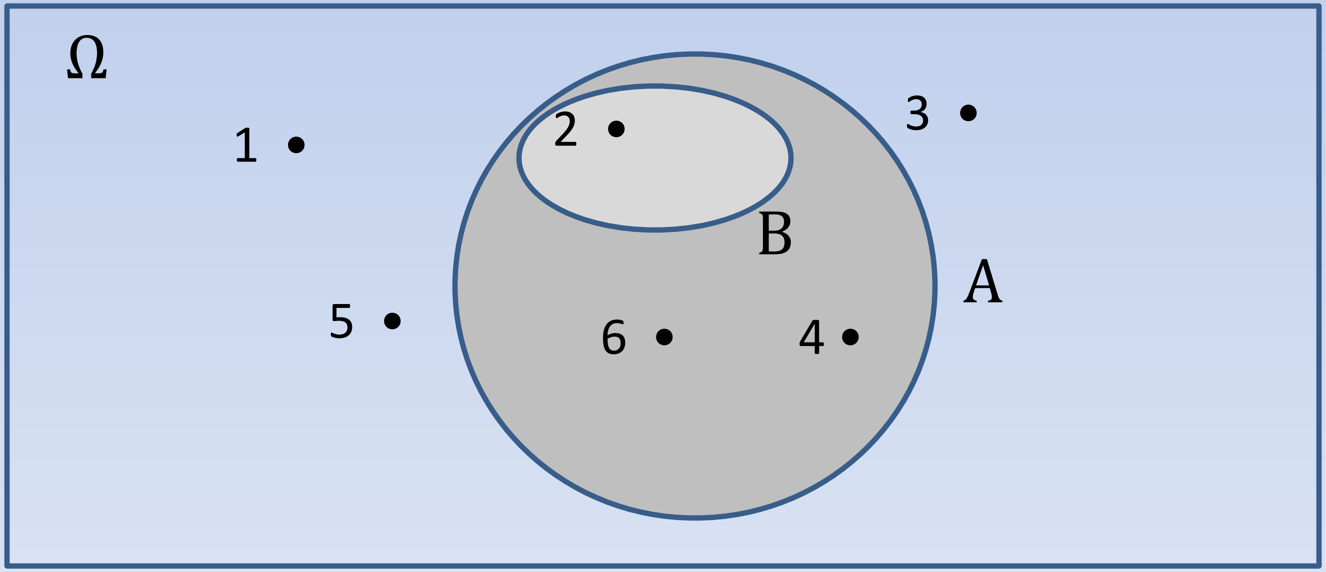
$$\mathrm{P}(\mathrm{A}_1) = \mathrm{P}(\{\gamma+\})$$

....

Δεσμευμένη πιθανότητα

Πρόβλημα:

Έστω ότι ρίχνουμε ένα ζάρι και ενδιαφερόμαστε να γνωρίζουμε την πιθανότητα του ενδεχομένου Α το αποτέλεσμα να είναι άρτιο και Β σε περίπτωση άρτιου αριθμού το αποτέλεσμα να είναι 2.



ΔΙΑΚΡΙΤΗ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ

Η πιθανότητα του ενδεχομένου Α είναι γνωστή $P(A)=3/6$

Η πιθανότητα του ενδεχομένου Β που ζητάμε δεν είναι η $P(B)=1/6$

Ο λόγος είναι ότι για το ενδεχόμενο Β το 2 μας ενδιαφέρει ως αποτέλεσμα υπό την προϋπόθεση ότι το ζάρι έχει φέρει άρτιο αριθμό.

Το ενδεχόμενο Β λέμε ότι δεσμεύεται από το Α η δε πιθανότητα του Β δεν είναι $P(B)$ αλλά γράφεται $P(B|A)$

Η πιθανότητα του ενδεχομένου Β δεδομένου ότι το Α έχει ήδη συμβεί υπολογίζεται ως

$$P(B|A)=P(A\cap B)/P(A)=P(B)/P(A)=(1/6)/(3/6)=1/3$$

Άρα,

Η πιθανότητα του ενδεχομένου Β δεδομένου ότι το Α έχει ήδη συμβεί υπολογίζεται ως

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

Σημειώστε ότι:

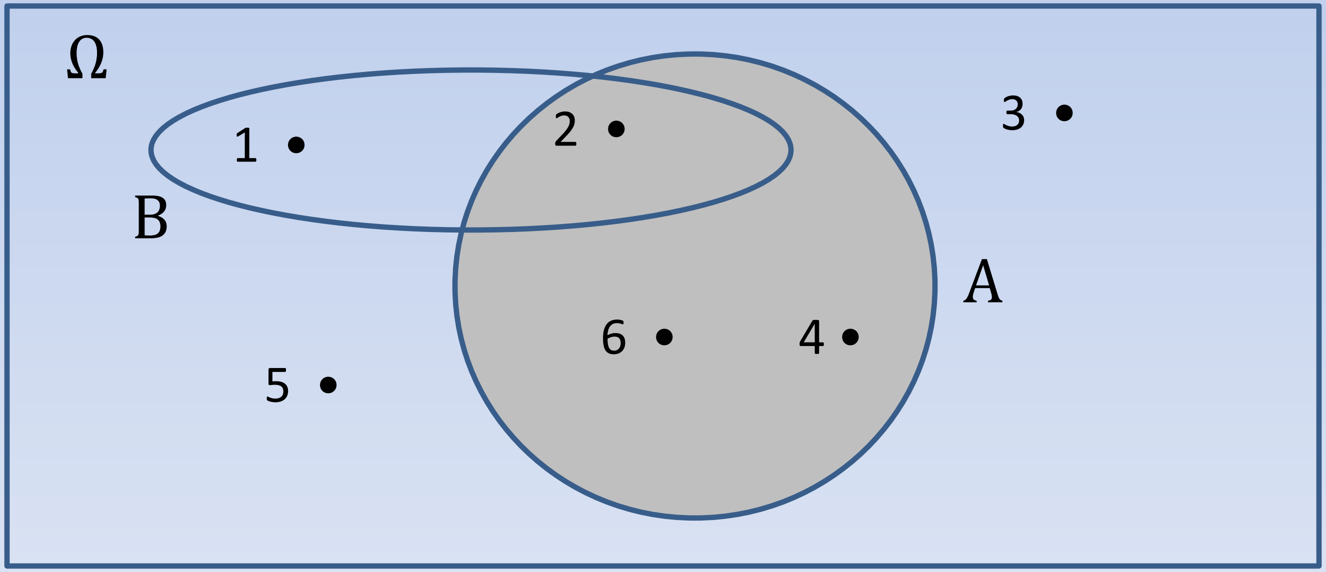
$$P(B|A) \neq P(A|B)$$

(Εξηγήστε γιατί)

Δεσμευμένη πιθανότητα

Πρόβλημα:

Έστω ότι ρίχνουμε ένα ζάρι και ενδιαφερόμαστε να γνωρίζουμε την πιθανότητα του ενδεχομένου $\mathrm{B} = \{1, 2\} = \{1\} \cup \{2\}$ σε περίπτωση που το αποτέλεσμα είναι άρτιος αριθμός.



ΔΙΑΚΡΙΤΗ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ

Η πιθανότητα του ενδεχομένου Α είναι γνωστή $P(A)=3/6$

Η πιθανότητα του ενδεχομένου Β που ζητάμε δεν είναι η $P(B)=2/6$

Το ενδεχόμενο Β λέμε ότι δεσμεύεται από το Α η δε πιθανότητα του Β δεν είναι $P(B)$ αλλά γράφεται $P(B|A)$

Η πιθανότητα του ενδεχομένου Β δεδομένου ότι το Α έχει ήδη συμβεί υπολογίζεται ως

$$P(B|A) = P(A \cap B)/P(A) = P((\{1\} \cup \{2\}) \cap A))/P(A) =$$

$$P(\ (\{1\} \cap A) \cup (\{2\} \cap A)\ )\ /\ P(A) =$$

$$P(\ \{\emptyset\} \cup (\{2\} \cap A)\ )\ /\ P(A) =$$

$$P(\{2\} \cap A)\ /\ P(A) = P(\{2\})\ /\ P(A) = (1/6)/(3/6)=1/3$$

Παράδειγμα

Σε ένα κιβώτιο υπάρχουν τρείς λευκές σφαίρες έστω $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$ και δύο μαύρες έστω $\mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2$. Επιλέγουμε τυχαία δύο σφαίρες. Ποιά είναι η πιθανότητα του ενδεχομένου A «η πρώτη σφαίρα είναι λευκή και η δεύτερη μαύρη»;

1ος τρόπος:

Καθορισμός του δειγματικού χώρου

$$\begin{aligned}\Omega = \{&(\Lambda_1, \Lambda_2), (\Lambda_1, \Lambda_3), (\Lambda_2, \Lambda_1), (\Lambda_2, \Lambda_3), (\Lambda_3, \Lambda_1), (\Lambda_3, \Lambda_2),\\ &(\mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2), (\mathrm{M}_2, \mathrm{M}_1),\\ &(\Lambda_1, \mathrm{M}_1), (\Lambda_1, \mathrm{M}_2), (\Lambda_2, \mathrm{M}_1), (\Lambda_2, \mathrm{M}_2), (\Lambda_3, \mathrm{M}_1), (\Lambda_3, \mathrm{M}_2),\\ &(\mathrm{M}_1, \Lambda_1), (\mathrm{M}_1, \Lambda_2), (\mathrm{M}_1, \Lambda_3), (\mathrm{M}_2, \Lambda_1), (\mathrm{M}_2, \Lambda_2), (\mathrm{M}_2, \Lambda_3)\}\end{aligned}$$

$|\Omega| = 20$

Παράδειγμα (συνέχεια)

Καθορισμός ευνοϊκών εμφανίσεων του ενδεχομένου A

$|N_A| = 6$

Πιθανότητα του ενδεχομένου A

$P(A) = 6/20$

2ος τρόπος:

Έστω W_1 το ενδεχόμενο «η πρώτη σφαίρα είναι λευκή» και έστω B_2 το ενδεχόμενο «η δεύτερη σφαίρα είναι μαύρη»

Τότε, ζητάμε την πιθανότητα του ενδεχομένου $P(W_1B_2)$

Από τον τύπο της δεσμευμένης πιθανότητας έχουμε ότι:

$$P(W_1B_2) = P(B_2|W_1) \cdot P(W_1) = (2/4) \cdot (3/5) = 6/20$$

Παράδειγμα

Από μία τράπουλα με 52 χαρτιά επιλέγουμε τυχαία διαδοχικά δύο χαρτιά. Τα χαρτιά δεν επανατοποθετούνται στην τράπουλα. Ποιά είναι η πιθανότητα του ενδεχομένου A «τα δύο χαρτιά είναι άσσοι»;

Έστω A_1 το ενδεχόμενο «το πρώτο χαρτί είναι άσσος» και

έστω A_2 το ενδεχόμενο «το δεύτερο χαρτί είναι άσσος».

Τότε, ζητάμε την πιθανότητα του ενδεχομένου $\mathrm{P}(\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2)$.

Από τον τύπο της δεσμευμένης πιθανότητας έχουμε ότι:

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}_2 | \mathrm{A}_1) = \mathrm{P}(\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2) \,/\, \mathrm{P}(\mathrm{A}_1)$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2) = \mathrm{P}(\mathrm{A}_2 | \mathrm{A}_1)\cdot\mathrm{P}(\mathrm{A}_1) = (3/51)\cdot(4/52) = 12/2652$$

Παράδειγμα

Από μία τράπουλα με 52 χαρτιά επιλέγουμε τυχαία διαδοχικά δύο χαρτιά. Τα χαρτιά επανατοποθετούνται στην τράπουλα. Ποιά είναι η πιθανότητα του ενδεχομένου A «τα δύο χαρτιά είναι άσσοι»;

Έστω A_1 το ενδεχόμενο «το πρώτο χαρτί είναι άσσος» και

έστω A_2 το ενδεχόμενο «το δεύτερο χαρτί είναι άσσος»

Τότε, ζητάμε την πιθανότητα του ενδεχομένου $P(A_1A_2)$.

Από τον τύπο της δεσμευμένης πιθανότητας έχουμε ότι:

$$P(A_1A_2) = P(A_2\,|A_1)\cdot P(A_1) = (4/52)\cdot(4/52) = 16/2704 = P(A_2\,)\cdot P(A_1)$$

Στο παράδειγμα αυτό

η εμφάνιση του ενδεχομένου A_2 είναι ανεξάρτητη της εμφάνισης του ενδεχομένου A_1

Από τον τύπο υπολογισμού της δεσμευμένης πιθανότητας ενός ενδεχομένου B δεσμευμένου από το ενδεχόμενο A προκύπτει η σχέση $\mathrm{P(AB) = P(B|A) \cdot P(A)}$

που πολλές φορές αναφέρεται και ως Πολλαπλασιαστικός Νόμος

Από τον πολλαπλασιαστικό νόμο προκύπτει ότι αν για δύο

ενδεχόμενα A και B ισχύει ότι $\mathrm{P(AB) = P(B) \cdot P(A)}$

τότε τα δύο αυτά ενδεχόμενα ονομάζονται ανεξάρτητα.

Παράδειγμα: η επιλογή των δύο άσσων με επανάθεση

Άσκηση

Μια επιχείρηση κατασκευής ηλεκτρονικών εξαρτημάτων τοποθετεί τα εξαρτήματα της ημερήσιας παραγωγής σε τέσσερα κιβώτια. Το 1^{o} κιβώτιο περιέχει 5000 εξαρτήματα από τα οποία το 5% είναι ελαττωματικά. Το 2^{o} περιέχει 1000 εξαρτήματα από τα οποία το 25% είναι ελαττωματικά ενώ τα κιβώτια 3 και 4 περιέχουν 2000 εξαρτήματα το κάθε ένα από τα οποία το 10% είναι ελαττωματικά (στο κάθε κιβώτιο). Επιλέγουμε τυχαία ένα από τα κιβώτια και στη συνέχεια επιλέγουμε τυχαία ένα εξάρτημα.

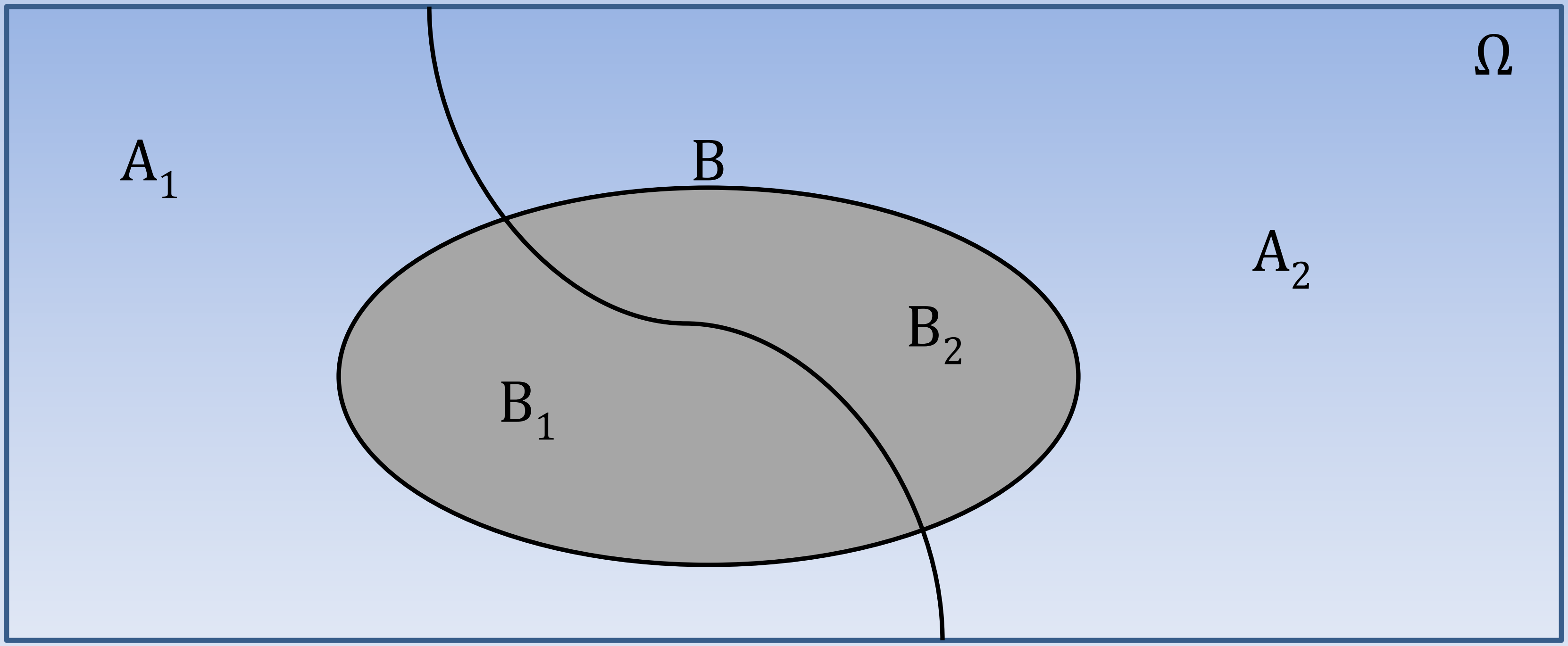
a) Ποιά είναι η πιθανότητα το εξάρτημα που έχει επιλεγεί να είναι ελαττωματικό;
b) Αν το εξάρτημα που έχει επιλεγεί είναι ελαττωματικό ποιά είναι η πιθανότητα να προέρχεται από το κιβώτιο με το μεγαλύτερο ποσοστό ελαττωματικών εξαρτημάτων;

Άσκηση

Υποθέτουμε ότι κατά τη γέννηση ενός παιδιού είναι το ίδιο πιθανό αυτό να είναι αγόρι ή κορίτσι. Επιλέγεται τυχαία μια οικογένεια με δύο παιδιά. Ποιά είναι η πιθανότητα η οικογένεια να έχει ένα αγόρι και ένα κορίτσι; Ποιά είναι η πιθανότητα να έχει δύο αγόρια;

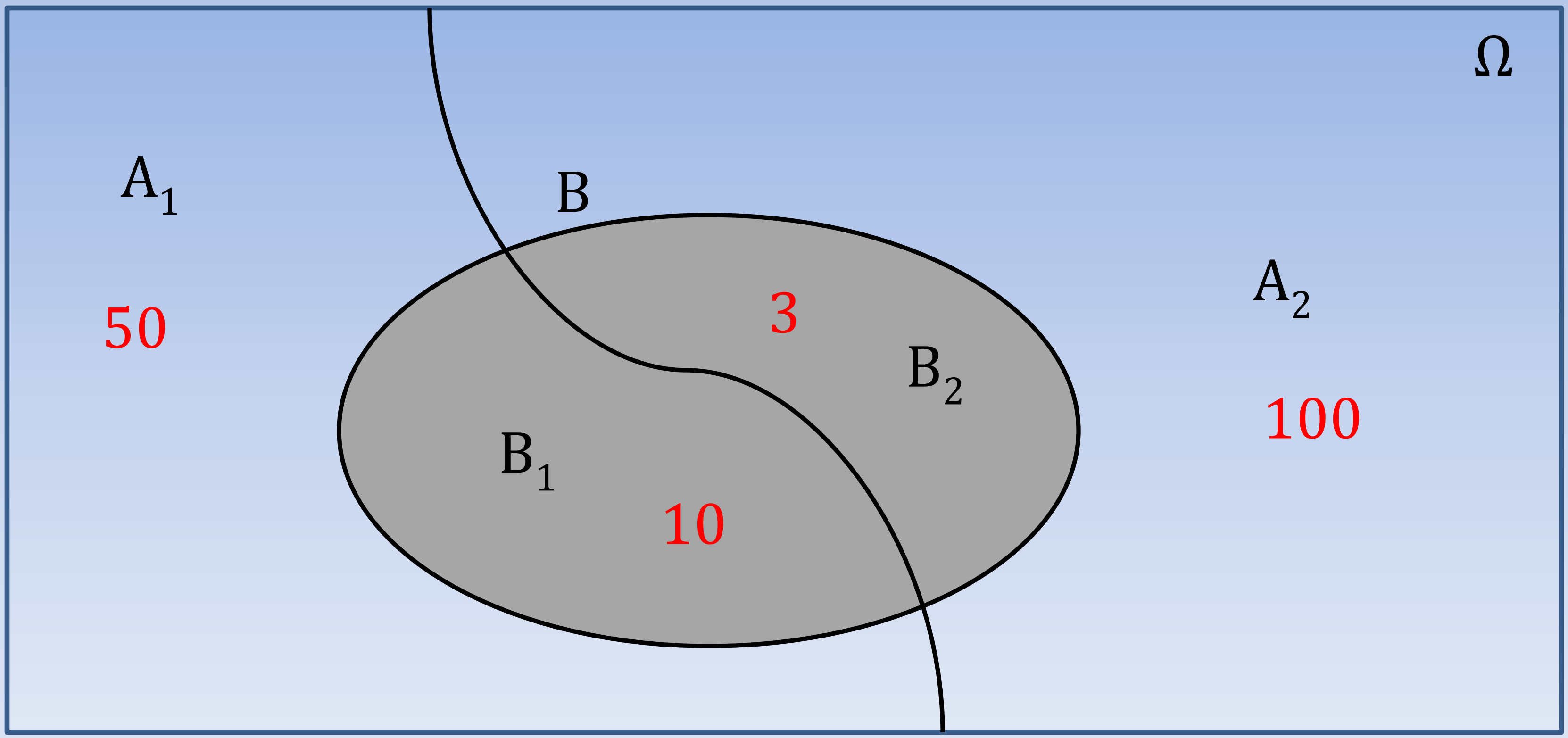
Ολική Πιθανότητα - Θεώρημα του Bayes

Έστω ότι δύο σύνολα αποτελεσμάτων $A1$ και $A2$ διαμερίζουν το δειγματικό χώρο Ω. Δηλαδή, τα $A1$ και $A2$ είνα ξένα μεταξύ τους $(A1 \cap A2 = \emptyset)$ και $A1 \cup A2 = \Omega$. Επί πλέον, έστω ένα ενδεχόμενο B έχει κοινά στοιχεία και με τα δύο σύνολα $A1$ και $A2$.



Ολική Πιθανότητα - Θεώρημα του Bayes

Έστω ότι το προηγούμενο Σχήμα αναφέρεται σε ένα πρόβλημα με συγκεκριμένο πλήθος στοιχείων για κάθε ενδεχόμενο.



Ολική Πιθανότητα - Θεώρημα του Bayes

Για παράδειγμα, έστω ότι το πρόβλημα αναφέρεται σε ένα δείγμα 150 ατόμων που εξετάστηκαν σχετικά με το αν έχουν νοσήσει από κάποιον ιό.

Αν με A_1 παραστήσουμε το σύνολο των ατόμων που βρέθηκαν θετικά στο τεστ και με A_2 παραστήσουμε το σύνολο των ατόμων που βρέθηκαν αρνητικά τότε είναι προφανές ότι $\Omega = \mathrm{A}_1 \cup \mathrm{A}_2$ και $\mathrm{A}_1 \cap \mathrm{A}_2 = \emptyset$. Άρα αυτά τα δύο σύνολα αποτελεούν μια διαμέριση του Ω.

Αν με B συμβολίσουμε το σύνολο των ατόμων που εμφάνισαν συγκεκριμένο σύμπτωμα το οποίο δεν συναντάται αποκλειστικά και μόνο στη συγκεκριμένη ίωση τότε ισχύει ότι $\mathrm{B} = \mathrm{B}_1 \cup \mathrm{B}_2$.

Εξ αυτού ο υπολογισμός της πιθανότητας εμφάνισης του συμπτώματος $\cancel{\mathrm{P}(\mathrm{B}) = 13/150}$ είναι λάθος.

Ολική Πιθανότητα - Θεώρημα του Bayes

Αυτό που ισχύει είναι:

$$\mathrm{P(B) = P(B_1) + P(B_2) =}$$

$$\mathrm{P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) =}$$

$$\mathrm{P(B|A_1) \cdot P(A_1) + P(B|A_2) \cdot P(A_2)}$$

Δηλαδή για τον υπολογισμό της πιθανότητας του ενδεχομένου B λαμβάνεται υπόψη η συμμετοχή στο B στοιχειωδών ενδεχομένων τόσο από το $\mathrm{A_1}$ όσο και από το $\mathrm{A_2}$.

Ολική Πιθανότητα - Θεώρημα του Bayes

Τότε ισχύει ότι:

$$P(B) = P(B|A_1)\cdot P(A_1) + P(B|A_2)\cdot P(A_2)$$

Η σχέση αυτή ονομάζεται Ολική Πιθανότητα του ενδεχομένου B και γενικεύεται στην περίπτωση που η διαμέριση αποτελείται από n σύνολα $A_1, A_2, \dots, A_n$.

$$P(B) = P(B|A_1)\cdot P(A_1) + P(B|A_2)\cdot P(A_2) + \dots + P(B|A_n)\cdot P(A_n)$$

Ολική Πιθανότητα - Θεώρημα του Bayes

Ας θεωρήσουμε τον τύπο της δεσμευμένης πιθανότητας:

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} \qquad P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

Λύνοντας ως προς $P(AB)$ έχουμε:

$P(AB)=P(B|A)\cdot P(A)$

$P(AB)=P(A|B)\cdot P(B)$

Άρα,

$$P(B|A)\cdot P(A)= P(A|B)\cdot P(B)$$

Ολική Πιθανότητα - Θεώρημα του Bayes

Τότε ισχύει ότι:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) * P(A)}{P(B)}$$

Η σχέση αυτή ονομάζεται τύπος του Bayes και καθορίζει ένα τρόπο με τον οποίο είναι δυνατό να υπολογιστεί η πιθανότητα ενός ενδεχομένου A δεσμευμένου από κάποιο άλλο ενδεχόμενο B με βάση το γινόμενο,

$\mathrm{P(B|A)}$ που ονομάζεται πιθανοφάνεια του A και μας δείχνει πόσο πιθανή είναι η εμφάνιση του A από τις εμφανίσεις του B επί $\mathrm{P(A)}$ που ονομάζεται εκ των προτέρων πιθανότητα του A και μας δείχνει την πεποίθηση που έχουμε για την εμφάνιση του ενδεχομένου A η οποία τροποποιείται από την εμφάνιση του B

Ολική Πιθανότητα - Θεώρημα του Bayes

Τότε ισχύει ότι:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) * P(A)}{P(B)}$$

$P(B)$ είναι ένας συντελεστής κανονικοποίησης

Ολική Πιθανότητα - Θεώρημα του Bayes

Με βάση τη γενίκευση του τύπου της Ολικής Πιθανότητας του ενδεχομένου B για την περίπτωση που η διαμέριση αποτελείται από n σύνολα $A_1, A_2, \dots, A_n$

διατυπώνεται και η γενική μορφή του Θεωρήματος του Bayes για τα n ενδεχόμενα που αποτελούν τη διαμέριση του δειγματικού χώρου ως εξής:

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)\cdot P(A_i)}{P(B|A_1)\cdot P(A_1) + \cdots + P(B|A_n)\cdot P(A_n)}$$