ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Εαρινό Εξάμηνο
2022 - 2023

Σταύρος Αδάμ

Σχέσεις και Συναρτήσεις

- Διατεταγμένο ζεύγος
- Καρτεσιανό γινόμενο
- Διμελείς σχέσεις
- Συναρτήσεις
- Ιδιότητες

Σχέσεις και Συναρτήσεις

Διατεταγμένο ζεύγος

- Σύνολο με δύο στοιχεία {a,b}

  Η σειρά των στοιχείων δεν έχει σημασία

- Ζεύγος στοιχείων (a,b)

  Η σειρά των στοιχείων έχει σημασία

- Διατεταγμένο Ζεύγος στοιχείων (a,b)

Σχέσεις και Συναρτήσεις

Διατεταγμένο ζεύγος

Ορισμός

Ένα διατεταγμένο ζεύγος δύο στοιχείων x και y είναι η διάταξη των στοιχείων με πρώτο στοιχείο το x και δεύτερο στοιχείο το y, που συμβολίζεται με (x, y). Είναι προφανές ότι το διατεταγμένο ζεύγος (x, y) είναι διαφορετικό από το ζεύγος (y, x).

Σχέσεις και Συναρτήσεις

Καρτεσιανό γινόμενο

Ορισμός

Αν A, B είναι δύο σύνολα τότε ορίζουμε ως καρτεσιανό γινόμενο των δύο συνόλων A και B και συμβολίζουμε με A×B το σύνολο των διατεταγμένων ζευγών με πρώτο στοιχείο από το A και δεύτερο στοιχείο από το B δηλαδή,

$$A \times B = \{(x, y) : x \in A, y \in B\}$$

Σχέσεις και Συναρτήσεις

Καρτεσιανό γινόμενο

<u>Παράδειγμα</u>

$A = \{a, b, c\}$ και $B = \{1, 2\}$

τότε,

$A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$

Ποιό είναι το καρτεσιανό γινόμενο $B \times A$;

Άρα, $A \times B \neq B \times A$

Σχέσεις και Συναρτήσεις

Καρτεσιανό γινόμενο

Στην περίπτωση που $\mathrm{A} = \mathrm{B}$ το καρτεσιανό γινόμενο A και B ονομάζεται καρτεσιανό τετράγωνο του A και συμβολίζεται: $\mathrm{A}\times\mathrm{A} = \mathrm{A}^2$.

Το σύνολο αυτό αποτελείται από όλα τα διατεταγμένα ζεύγη με πρώτο και δεύτερο στοιχείο από το A.

Σχέσεις και Συναρτήσεις

Καρτεσιανό γινόμενο

Παράδειγμα: Έστω $A = \{a, b, c, d\}$ και $B = \{1, 2, 3\}$ τότε το καρτεσιανό γινόμενο $A \times B$ μπορεί να παρασταθεί

A \ B	1	2	3
a	√	√	√
b	√	√	√
c	√	√	√
d	√	√	√

Σχέσεις και Συναρτήσεις

Διμελείς Σχέσεις

Έστω A και B δύο σύνολα με $A \times B$ το καρτεσιανό τους γινόμενο. Θεωρούμε ότι R είναι οποιοδήποτε υποσύνολο του καρτεσιανού γινομένου, $R \subseteq A \times B$

Το σύνολο R ονομάζεται διμελής σχέση από το A στο B ή απλώς σχέση από το A στο B.

Παράδειγμα: Αν $A = \{a, b, c, d\}$ και $B = \{1, 2, 3\}$

$R = \{(a, 1), (b, 2), (c, 2), (d, 3)\}$

Σχέσεις και Συναρτήσεις

Διμελείς Σχέσεις

Θα πρέπει να σημειωθεί, ότι μια διμελής σχέση $R \subseteq A \times B$ μπορεί να ορισθεί ως το σύνολο αληθείας ενός κατηγορήματος $p(x, y)$ δύο μεταβλητών ως εξής:

$$R = \{p(x, y) : x \in A, y \in B\}$$

Σχέσεις και Συναρτήσεις

Διμελείς Σχέσεις

Εκτός από την παράθεση των στοιχείων μια διμελής σχέση είναι δυνατόν να παρασταθεί με τον πίνακα διπλής εισόδου στον οποίο σημειώνονται μόνον τα κελιά του πίνακα που αντιστοιχούν στα διατεταγμένα ζεύγη που αποτελούν τη διμελή σχέση.

Σχέσεις και Συναρτήσεις

Διμελείς Σχέσεις

$$R = \{(a, 1), (b, 2), (c, 2), (d, 3)\}$$

A \ B	1	2	3
a	√		
b		√	
c		√	
d			√

Σχέσεις και Συναρτήσεις

Διμελείς Σχέσεις

Έστω $\mathrm{A} = \{\mathrm{a, b, c, d}\}$. Τότε $\mathrm{A}{\times}\mathrm{A} = \mathrm{A}^2$ το καρτεσιανό τετράγωνο του A είναι

$$
\begin{aligned}
A^2 = \{&(a,a),(a,b),(a,c),(a,d),\\
&(b,a),(b,b),(b,c),(b,d),\\
&(c,a),(c,b),(c,c),(c,d),\\
&(d,a),(d,b),(d,c),(d,d)\}
\end{aligned}
$$

Σχέσεις και Συναρτήσεις

Διμελείς Σχέσεις

Ένα υποσύνολο $\mathrm{R} \subseteq \mathrm{A}^2$ του καρτεσιανού τετραγώνου του A ονομάζεται μια διμελής σχέση ή απλά μια σχέση επί του A.

Παράδειγμα: $\mathrm{R} = \{(\mathrm{a}, \mathrm{a}), (\mathrm{a}, \mathrm{b}), (\mathrm{b}, \mathrm{b}), (\mathrm{b}, \mathrm{c}), (\mathrm{b}, \mathrm{d}),$

$$(\mathrm{c}, \mathrm{a}), (\mathrm{d}, \mathrm{c}), (\mathrm{d}, \mathrm{d})\}$$

Η σχέση R μπορεί να παρασταθεί γραφικά ως εξής:

Σχέσεις και Συναρτήσεις

Διμελείς Σχέσεις

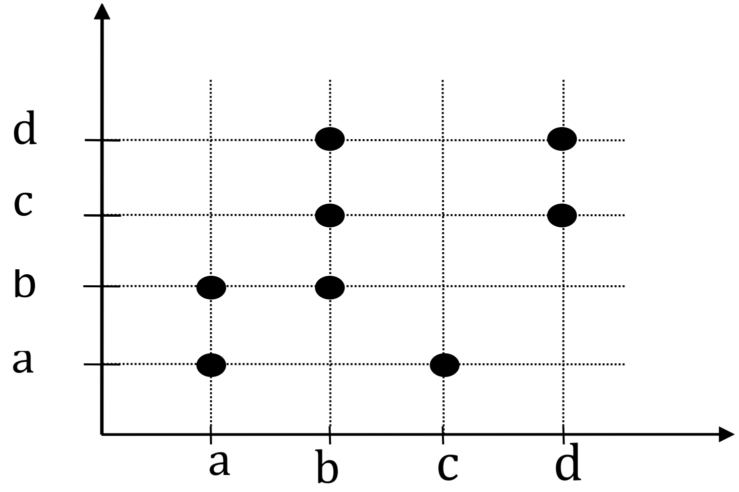
R = {(a, a), (a, b), (b, b), (b, c), (b, d), (c, a), (d ,c), (d, d)}

A \ A	a	b	c	d
a	√	√		
b		√	√	√
c	√			
d			√	√

Σχέσεις και Συναρτήσεις

Διμελείς Σχέσεις

Ένας άλλος τρόπος είναι:



Σχέσεις και Συναρτήσεις

Συναρτήσεις

Ορισμός

Μια συνάρτηση είναι μια διμελής σχέση για την οποία δεν υπάρχουν δύο ή περισσότερα ζεύγη με ίδιο πρώτο στοιχείο.

Για παράδειγμα αν A, B είναι τα σύνολα

$\mathrm{A} = \{\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}, \mathrm{d}\}$ και $\mathrm{B} = \{1, 2, 3\}$ τότε η σχέση

$\mathrm{R} = \{(\mathrm{a}, 1), (\mathrm{b}, 2), (\mathrm{c}, 2), (\mathrm{d}, 3)\}$

είναι συνάρτηση

Σχέσεις και Συναρτήσεις

Συναρτήσεις

Αντίθετα η σχέση

$\mathrm{R} = \{(\mathrm{a}, 1), (\mathrm{a}, \ 2), (\mathrm{b}, 2), (\mathrm{c}, 2), \ (\mathrm{d}, 3)\}$

δεν είναι συνάρτηση.

Ο ορισμός είναι ίδιος αν η R είναι διμελής σχέση επί ενός συνόλου Α, δηλαδή $\mathrm{R} \subseteq \mathrm{A}^2$.

Παράδειγμα: Η συνάρτηση f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που ορίζεται από τη σχέση $\mathrm{y} = 2\mathrm{x} + 3$

Σχέσεις και Συναρτήσεις

Άσκηση 1

Δείξτε ότι $|A \times B| = |A| \cdot |B|$

Άσκηση 2

Έστω ότι $A = \{1, 2\}$, $B = \{a, b, c\}$ και $C = \{b, c, d\}$. Υπολογίστε και συγκρίνετε τα σύνολα

$(A \times B) \cap (A \times C)$ και $A \times (B \cap C)$.

Με βάση αυτό το αποτέλεσμα δείξτε ότι:

- $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
- $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

Σχέσεις και Συναρτήσεις

Άσκηση 3

Πως μπορούμε να ορίσουμε το $A \times B \times C$;

Ορισμός

Για μια σχέση R από ένα σύνολο A σε ένα σύνολο B:

- Το πεδίο ορισμού της R είναι το υποσύνολο του A που αποτελείται από τα στοιχεία του που είναι πρώτα στα ζεύγη της R.
- Το πεδίο τιμών της R είναι το υποσύνολο του B που αποτελείται από τα στοιχεία του που είναι δεύτερα στα ζεύγη της R.

Σχέσεις και Συναρτήσεις

Ορισμός

Για μια σχέση R από ένα σύνολο A σε ένα σύνολο B, η αντίστροφη σχέση της R είναι η σχέση R^{-1} τα ζεύγη της οποίας είναι τα «αντίστροφα» των ζευγών της R.

Έστω $\mathrm{A}=\{\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}\}$, $\mathrm{B} = \{1, 2, 3\}$ και $\mathrm{R}=\{(\mathrm{a}, 1), (\mathrm{b}, 2), (\mathrm{b},3)\}$.

- Ποιό είναι το πεδίο ορισμού της R;
- Ποιά είναι η αντίστροφη σχέση της R;
- Η R είναι συνάρτηση;
- Η R^{-1} είναι συνάρτηση;
- Ποιό είναι το πεδίο τιμών της $\mathrm{R} = \emptyset$;

Σχέσεις και Συναρτήσεις

Ορισμός

Έστω R μια διμελής σχέση επί ενός συνόλου A. Η R λέγεται ότι έχει την ανακλαστική ιδιότητα, ή ότι είναι ανακλαστική, όταν περιέχει όλα τα ζεύγη (a, a) για κάθε a στοιχείο του A.

Όταν μια διμελής σχέση αναπαρίσταται με τη μορφή πίνακα είναι απλό να διαπιστωθεί η ανακλαστική ιδιότητα, αν και μόνον αν όλα τα κελιά στην κύρια διαγώνιο έχουν το σημάδι $\surd$. Έτσι η σχέση που αναπαριστά ο επόμενος πίνακας *(α)* είναι ανακλαστική ενώ αντίθετα η σχέση που αναπαριστά ο πίνακας *(β)* δεν είναι ανακλαστική.

Σχέσεις και Συναρτήσεις

A \ A	a	b	c	d
a	√			
b		√		√
c	√		√	
d			√	√

(α)

A \ A	a	b	c	d
a	√			
b				√
c	√		√	
d			√	√

(β)

Σχέσεις και Συναρτήσεις

Ορισμός

Έστω R μια διμελής σχέση επί ενός συνόλου A. Η R λέγεται ότι, έχει τη συμμετρική ιδιότητα, ή ότι είναι συμμετρική, όταν για κάθε ζεύγος (a, b) που ανήκει στην R ισχύει ότι και το ζεύγος (b, a) είναι στοιχεία της R.

Όταν μια διμελής σχέση αναπαρίσταται με τη μορφή πίνακα τότε έχει τη συμμετρική ιδιότητα, αν και μόνον αν τα κελιά που έχουν το σημάδι $\surd$ είναι συμμετρικά ως προς την κύρια διαγώνιο ή βρίσκονται πάνω σε αυτήν. Έτσι η σχέση που αναπαριστά ο επόμενος πίνακας *(α)* είναι συμμετρική ενώ η σχέση που αναπαριστά ο πίνακας *(β)* δεν είναι συμμετρική.

Σχέσεις και Συναρτήσεις

A \ A	a	b	c	d
a	√		√	
b		√		√
c	√		√	
d		√		√

(α)

A \ A	a	b	c	d
a	√			
b		√		√
c	√		√	
d		√	√	√

(β)

Σχέσεις και Συναρτήσεις

Ορισμός

Έστω R μια διμελής σχέση επί ενός συνόλου A. Η R λέγεται ότι, έχει την αντισυμμετρική ιδιότητα, ή ότι είναι αντισυμμετρική, όταν για κάθε ζεύγος (a, b) που ανήκει στην R το συμμετρικό ζεύγος (b, a) δεν είναι στοιχείο της R παρά μόνον εάν $\mathrm{a}=\mathrm{b}$.

Ορισμός

Έστω R μια διμελής σχέση επί ενός συνόλου A. Η R λέγεται ότι, έχει τη μεταβατική ιδιότητα, ή ότι είναι μεταβατική, όταν για κάθε ζεύγη της μορφής (a, b) και (b, c) που ανήκουν στην R το ζεύγος (a, c) ανήκει επίσης στην R.

Σχέσεις και Συναρτήσεις

Άσκηση 4

Έστω $\mathrm{A}=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ και έστω η σχέση $\mathrm{R} \subseteq \mathrm{A}^2$ που ορίζεται ως εξής $\mathrm{R} =\{(\mathrm{x}, \mathrm{y})\text{: } \mathrm{x} \bmod \mathrm{y} = 0 \}$.

Η σχέση αυτή είναι ανακλαστική, συμμετρική, αντισυμμετρική, μεταβατική;

Άσκηση 5

Έστω $\mathrm{A}=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Δώστε ένα παράδειγμα σχέσης επί του A η οποία να είναι συμμετρική και αντισυμμετρική. Πόσες τέτοιες σχέσεις μπορούμε να ορίσουμε επί του A.

Σχέσεις και Συναρτήσεις

Μια διμελής σχέση R επί ενός συνόλου A είναι δυνατόν να έχει μία ή περισσότερες από τις προηγούμενες ιδιότητες, δηλαδή, ανακλαστική, συμμετρική, αντισυμμετρική και μεταβατική.

Δύο σημαντικές κατηγορίες διμελών σχέσεων επί ενός συνόλου, έστω A, είναι οι σχέσεις ισοδυναμίας και οι σχέσεις μερικής διάταξης.

Σχέσεις και Συναρτήσεις

<u>Ορισμός</u>

Μία διμελής σχέση R επί ενός συνόλου A λέγεται σχέση ισοδυναμίας αν έχει τις ακόλουθες τρείς ιδιότητες, την ανακλαστική, τη συμμετρική και τη μεταβατική.

Παράδειγμα

Έστω $\mathrm{A}=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ και έστω η σχέση $\mathrm{R} \subseteq \mathrm{A}^2$ που ορίζεται ως εξής $\mathrm{R} =\{(\mathrm{x}, \mathrm{y}):\ \mathrm{x} = \mathrm{y}\ (\mathrm{mod}\ 3)\ \}$.

Η σχέση αυτή είναι ανακλαστική, συμμετρική και μεταβατική. Άρα είναι σχέση ισοδυναμίας.

Σχέσεις και Συναρτήσεις

Η προηγούμενη σχέση γενικεύεται στην περίπτωση που έχουμε $\mathrm{A} = \mathbb{N}$ και R η διμελής σχέση επί του $\mathbb{N}$ που περιλαμβάνει όλα τα ζεύγη (k, n) για τα οποία ισχύει ότι

$\rightarrow \mathrm{k} \bmod 3 = \mathrm{n} \bmod 3 \Leftrightarrow \mathrm{k} = \mathrm{n} \pmod 3$

Δηλαδή στα ζεύγη οι αριθμοί k και n όταν διαιρεθούν με το 3 δίνουν το ίδιο υπόλοιπο.

Η απόδειξη ότι η R είναι σχέση ισοδυναμίας επί του $\mathbb{N}$ αφήνεται ως άσκηση.

Σχέσεις και Συναρτήσεις

Χρειάζεται εδώ να σημειωθεί ότι η σχέση R ομαδοποιεί τους φυσικούς αριθμούς σε τρεις οικογένειες:

- εκείνη που περιλαμβάνει όσους φυσικούς αριθμούς δίνουν υπόλοιπο 0 όταν διαιρεθούν με το 3,
- εκείνη που περιλαμβάνει όσους φυσικούς αριθμούς δίνουν υπόλοιπο 1 όταν διαιρεθούν με το 3, και τέλος,
- εκείνη που περιλαμβάνει όσους φυσικούς αριθμούς δίνουν υπόλοιπο 2 όταν διαιρεθούν με το 3.

Σχέσεις και Συναρτήσεις

- Ας θεωρήσουμε, για παράδειγμα, ως A, το σύνολο των μελών μιας κοινότητας και ως R τη διμελή σχέση επί του A στην οποία ανήκουν τα ζεύγη (a, b) που επαληθεύουν το κατηγόρημα «$\text{ο a κατοικεί στο ίδιο σπίτι με τον b}$».

  Η σχέση R είναι σχέση ισοδυναμίας;

Σχέσεις και Συναρτήσεις

Είναι εύκολο να δειχτεί ότι η R είναι σχέση ισοδυναμίας επί του A αποδεικνύοντας ότι ισχύουν η ανακλαστική, η συμμετρική και η μεταβατική ιδιότητα.

Εξ άλλου αντιλαμβάνεται κάποιος ότι τα στοιχεία του A που «σχετίζονται» μεταξύ τους μέσω της R είναι τα μέλη των οικογενειών, γιατί, παραδοσιακά τουλάχιστον, μόνο τα μέλη μιας οικογένειας κατοικούν στο ίδιο σπίτι, ακόμη και αν περιστασιακά υπάρχουν επισκέπτες.

Σχέσεις και Συναρτήσεις

- Διαισθητικά μια σχέση ισοδυναμίας R «οργανώνει-ομαδοποιεί» τα στοιχεία ενός συνόλου A σε ομάδες μέσα στις οποίες τα στοιχεία μοιράζονται τις ίδιες ιδιότητες και σχετίζονται με τρόπο που να είναι ισοδύναμα.
- Οι οικογένειες αυτές ή ομάδες στοιχείων στις οποίες μια σχέση ισοδυναμίας R χωρίζει τα στοιχεία ενός συνόλου A ονομάζονται κλάσεις ισοδυναμίας.
- Οι κλάσεις ισοδυναμίας αποτελούν μια διαμέριση του συνόλου A δεδομένου ότι είναι σύνολα ξένα μεταξύ τους και η ένωση τους δίνει το A.

Σχέσεις και Συναρτήσεις

Ένα Σχεσιακό Πρότυπο για Βάσεις Δεδομένων

- $\mathrm{A}_1 = \{\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5\}$ το σύνολο των προμηθευτών μιας επιχείρησης
- $\mathrm{A}_2 = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5, \varepsilon_6, \varepsilon_7, \varepsilon_8\}$ το σύνολο των εξαρτημάτων που χρησιμοποιεί η επιχείρηση
- $\mathrm{A}_3 = \{\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4\}$ το σύνολο των εργασιών συναρμολόγησης που εκτελεί η επιχείρηση
- $\mathrm{A}_4 = \mathbb{N}$
- Μια εντολή προμήθειας εξαρτημάτων μπορεί να έχει τη μορφή

Σχέσεις και Συναρτήσεις

- $\Pi = \{(\pi_1, \varepsilon_2, \rho_2, 2), (\pi_1, \varepsilon_3, \rho_1, 5), (\pi_2, \varepsilon_1, \rho_3, 3),$
  $(\pi_3, \varepsilon_5, \rho_3, 7), (\pi_4, \varepsilon_6, \rho_4, 10)\}$
- Είναι προφανές ότι Π ⊆ $A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_4$ δηλαδή μια προμήθεια είναι υποσύνολο του καρτεσιανού γινομένου των τεσσάρων συνόλων που μπορεί να περιγραφεί

Προμηθευτής	Εξάρτημα	Εργασία	Ποσότητα
π_1	ε_2	ρ_2	2
π_1	ε_3	ρ_1	5
π_2	ε_1	ρ_3	3
π_3	ε_5	ρ_3	7
π_4	ε_6	ρ_4	10

Σχέσεις και Συναρτήσεις

- Με βάση τα σύνολα A_1, A_2, A_3, A_4 είναι δυνατό να κατασκευαστούν σχέσεις που να περιγράφουν περισσότερες ενέργειες ή διαδικασίες μια επιχείρησης.
- Για παράδειγμα πως μπορούμε να περιγράψουμε με σχέσεις τη συναρμολόγηση δύο εξαρτημάτων για την κατασκευή μιας ποσότητας συγκεκριμένων προϊόντων;

  Το προϊόν Prod1 παράγεται με τη συναρμολόγηση των εξαρτημάτων ε_2 και ε_3 και η παραγγελία ενός πελάτη απαιτεί την κατασκευή 100 τέτοιων προϊόντων.

Σχέσεις και Συναρτήσεις

Άσκηση 6

Δώστε ένα παράδειγμα μιας σχέσης για την περιγραφή των δηλώσεων μαθημάτων φοιτητών διαφορετικών εξαμήνων.

Άσκηση 7

Έστω το σύνολο $A=\{1, 2, 3, 4, 5,..,14, 15\}$. Ορίζουμε την 4-μελή σχέση R ⊆ $A \times A \times A \times A$ ως το σύνολο αληθείας του κατηγορήματος $p(x, y, z, t)$: $4x+3y+z^2=t$.

Εξηγείστε με ποιόν τρόπο είναι δυνατό να περιγράψουμε τη σχέση R δίνοντας όλες τις 4-άδες στοιχείων από τα οποία αποτελείται.

Σχέσεις και Συναρτήσεις

- Ένας πίνακας περιέχει αντίτυπα μιας οντότητας (entity) που είναι οι γραμμές του. Μια οντότητα περιγράφεται από διαφορετικά χαρακτηριστικά, οι στήλες του πίνακα, οι διαφορετικές τιμές των οποίων δήμιουργούν διαφορετικά αντίτυπα μιας οντότητας.
- Όταν κάθε γραμμή μπορεί να διαφοροποιηθεί από τις υπόλοιπες με τη χρήση της τιμής ενός χαρακτηριστικού τότε το εν λόγω χαρακτριστικό ονομάζεται πρωτεύον κλειδί της σχέσης που περιγράφει ο πίνακας.
- Τα ανωτέρω αντιστοιχούν στο λεγόμενο σχεσιακό μοντέλο βάσων δεδομένων (relational model for Relational Database Systems)

Σχέσεις και Συναρτήσεις

Άσκηση 8

Έστω R μια σχέση επί του συνόλου όλων των συμβολοσειρών από 0 και 1 τέτοια ώστε $\mathrm{R} = \{(\mathrm{a}, \mathrm{b}) :$ οι συμβολοσειρές a και b έχουν τον ίδιο αριθμό από $0\}$.

Η σχέση R είναι:

- Ανακλαστική;
- Συμμετρική;
- Αντισυμμετρική;
- Μεταβατική;
- Είναι σχέση ισοδυναμίας;

Σχέσεις και Συναρτήσεις

<u>Ορισμός</u>

Μία διμελής σχέση R επί ενός συνόλου A λέγεται σχέση μερικής διάταξης επί του A αν έχει τις ακόλουθες τρείς ιδιότητες, την ανακλαστική, την αντισυμμετρική και τη μεταβατική ιδιότητα.

Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε ως A το σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$ και ως R τη διμελή σχέση επί του $\mathbb{N}$ στην οποία ένα ζεύγος φυσικών αριθμών (a, b) ανήκει στην R αν το a διαιρεί το b.

Σχέσεις και Συναρτήσεις

Η σχέση R είναι:

- ανακλαστική, γιατί περιέχει όλα τα ζεύγη της μορφής (a, a) δεδομένου ότι κάθε αριθμός a διαιρεί τον εαυτό του
- αντισυμμετρική, δεδομένου ότι αν ένα ζεύγος ανήκει (a, b) στην R, δηλαδή το a διαιρεί το b, και αν το ζεύγος (b, a) επίσης ανήκει στην R, δηλαδή και το b διαιρεί το a, τότε υποχρεωτικά a=b
- μεταβατική, δεδομένου ότι αν το a διαιρεί το b τότε (a, b) ανήκει στην R, και το b διαιρεί το c $\Rightarrow$ (b, c) ανήκει στην R, τότε και το a διαιρεί το c, δηλαδή (a, c) ανήκει στην R.

Σχέσεις και Συναρτήσεις

Η διάταξη των στοιχείων ενός συνόλου με τη σχέση μερικής διάταξης συμβολίζεται ως εξής:

$\rightarrow$ αν $(\mathrm{a}, \mathrm{b}) \in \mathrm{R}$, τότε συνήθως γράφουμε $\mathrm{a} \leq \mathrm{b}$

Διαισθητικά στη σχέση μερικής διάταξης δύο στοιχεία ενός συνόλου σχετίζονται αν το ένα είναι μικρότερο (μεγαλύτερο) ή κατώτερο (ανώτερο) ή έπεται (προηγείται) του άλλου. Εξ αυτού προκύπτει και η χρήση της λέξης διάταξη, η οποία επί πλέον λέγεται μερική δεδομένου ότι δύο οποιαδήποτε στοιχεία είναι δυνατόν να μη σχετίζονται μέσω της σχέσης μερικής διάταξης.

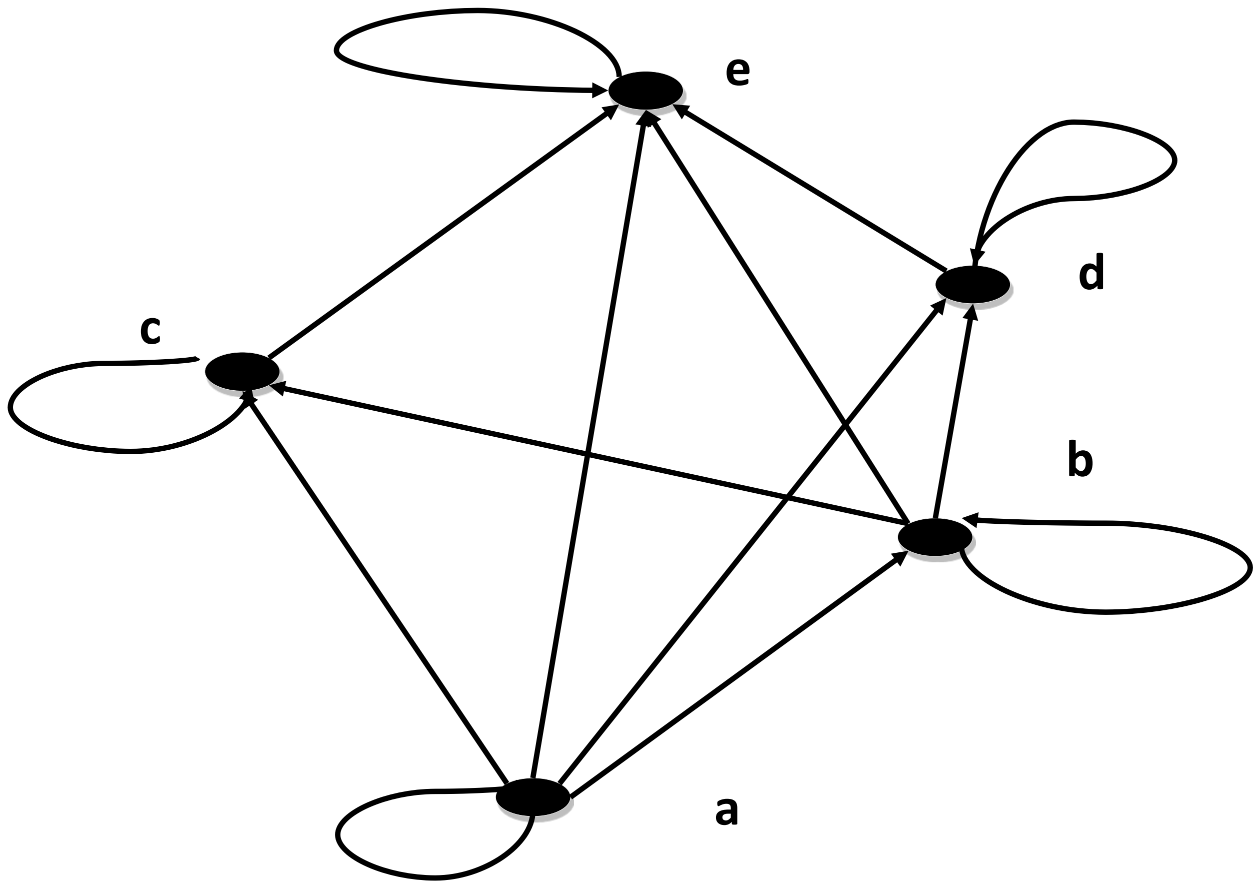
Σχέσεις και Συναρτήσεις

- Η αναπαράσταση μιας σχέσης μερικής διάταξης μπορεί να γίνει με διαφορετικούς τρόπους:
- Με πίνακα διπλής εισόδου

	a	b	c	d	e
a	√	√	√	√	√
b		√	√	√	√
c			√		√
d				√	√
e					√

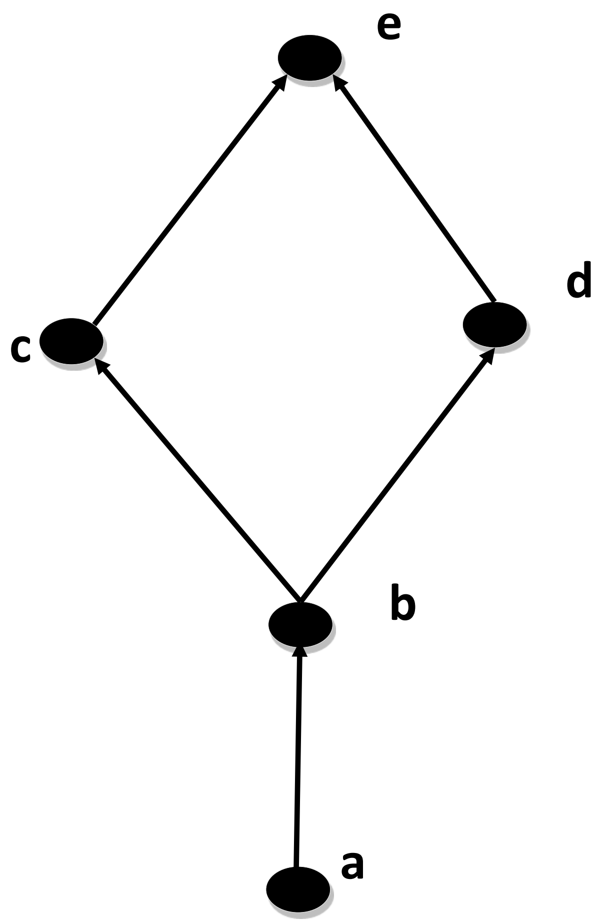
Σχέσεις και Συναρτήσεις

- Με διάγραμμα



Σχέσεις και Συναρτήσεις

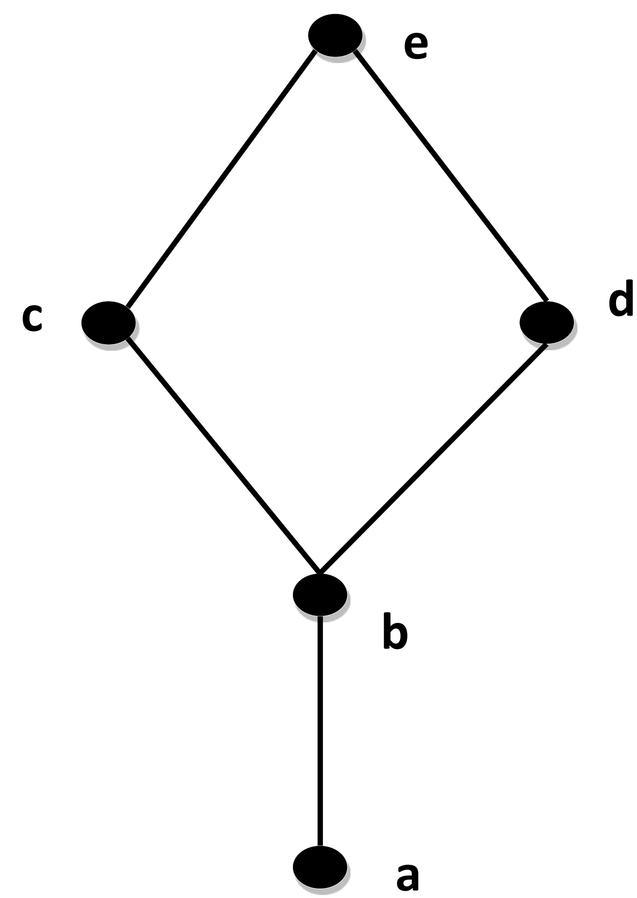
- ή εναλλακτικά με το διάγραμμα



Σχέσεις και Συναρτήσεις

- Τελικά με διάγραμμα Hasse
- υπονοείται μια «σχέση»

  εκ των κάτω προς τα άνω
- a είναι το κατώτερο στοιχείο
- e είναι το ανώτερο στοιχείο



Σχέσεις και Συναρτήσεις

Άσκηση 9

Έστω το σύνολο $\mathrm{A}=\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24\}$ και η γνωστή διμελής σχέση R σύμφωνα με την οποία $(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \in \mathrm{R}$ αν το x διαιρεί το y. Με τη σχέση αυτή το A είναι μερικώς διατεταγμένο. Κατασκευάστε το διάγραμμα Hasse για τη σχέση μερικής διάταξης.

Άσκηση 10

Έστω το σύνολο $\mathrm{B}=\{\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}\}$ και $\mathscr{D}(\mathrm{B})$ το δυναμοσύνολο του B. Δείξτε ότι το $\mathscr{D}(\mathrm{B})$ με τη σχέση που περιλαμβάνει τα ζεύγη $(\mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2) \Leftrightarrow \mathrm{B}_1 \subseteq \mathrm{B}_2$ για κάθε $\mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2$ υποσύνολα του B είναι ένα μερικά διατεταγμένο σύνολο και κατασκευάστε το διάγραμμα Hasse.

Σχέσεις και Συναρτήσεις

- Ένα σύνολο A με μια σχέση R μερικής διάταξης επί του A ονομάζεται ένα μερικά διατεταγμένο σύνολο ή εν συντομία μ.δ.σ. (partially ordered set ή εν συντομία poset) και συνήθως συμβολίζεται με $(\mathrm{A}, \leq)$.
- Αν $(\mathrm{A}, \leq)$ είναι ένα poset και $\mathrm{B} \subseteq \mathrm{A}$. Το B ονομάζεται μια αλυσίδα αν κάθε δύο στοιχεία του B σχετίζονται μέσω της σχέσης μερικής διάταξης $\leq$.
- Αν το $(\mathrm{A}, \leq)$ είναι αλυσίδα τότε ονομάζεται ολικά διατεταγμένο σύνολο.
- Παράδειγμα;

Σχέσεις και Συναρτήσεις

- Έστω $(\mathrm{A}, \leq)$ ένα poset. Ένα στοιχείο $\mathrm{a} \in \mathrm{A}$ ονομάζεται μέγιστο στοιχείο αν για κανένα $\mathrm{b} \in \mathrm{A}$ δεν ισχύουν ταυτόχρονα $\mathrm{a} \neq \mathrm{b}$ και $\mathrm{a} \leq \mathrm{b}$.
- Έστω $(\mathrm{A}, \leq)$ ένα poset. Ένα στοιχείο $\mathrm{a} \in \mathrm{A}$ ονομάζεται ελάχιστο στοιχείο αν για κανένα $\mathrm{b} \in \mathrm{A}$ δεν ισχύουν ταυτόχρονα $\mathrm{a} \neq \mathrm{b}$ και $\mathrm{b} \leq \mathrm{a}$.
- Σε κάθε αλυσίδα υπάρχει ένα μοναδικό ελάχιστο στοιχείο και ένα μοναδικό μέγιστο. Το ίδιο δεν ισχύει σε ένα μερικά διατεταγμένο σύνολο (poset).

Σχέσεις και Συναρτήσεις

- Σε ένα poset $(A, \leq)$ ένα στοιχείο c ονομάζεται άνω φράγμα των a και b αν $a \leq c$ και $b \leq c$.

  Αντίστοιχα ορίζεται το κάτω φράγμα.

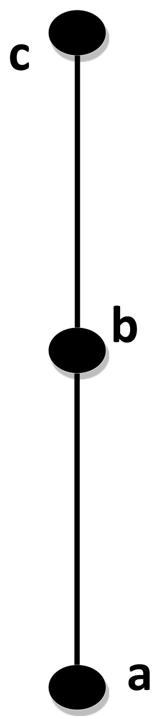
- Το c ονομάζεται ελάχιστο άνω φράγμα (supremum) όταν δεν υπάρχει άνω φράγμα d των a και b τέτοιο ώστε $d \leq c$.

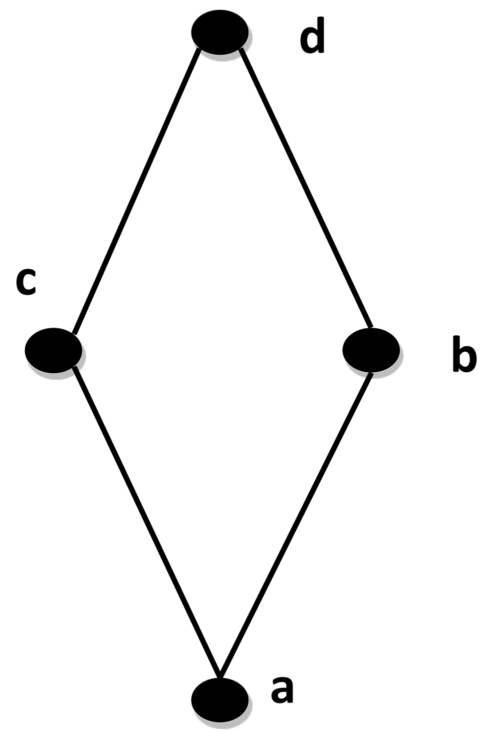
  Αντίστοιχα ορίζεται το μέγιστο κάτω φράγμα (infimum).

- Ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο ονομάζεται δικτυωτό ή lattice όταν κάθε δύο στοιχεία του έχουν ένα μοναδικό ελάχιστο άνω φράγμα και ένα μοναδικό μέγιστο κάτω φράγμα. (Ο ορισμός αυτός αποτελεί Θεώρημα αλλά χρησιμοποιείται εδώ αντί του αυστηρού ορισμού.)

Σχέσεις και Συναρτήσεις

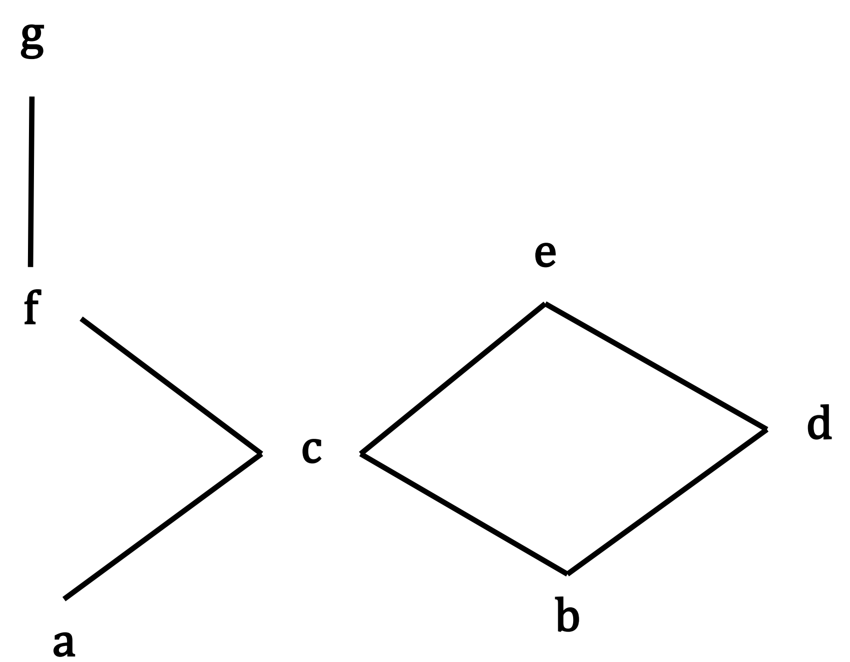
- Διάγραμμα Hasse δικτυωτών





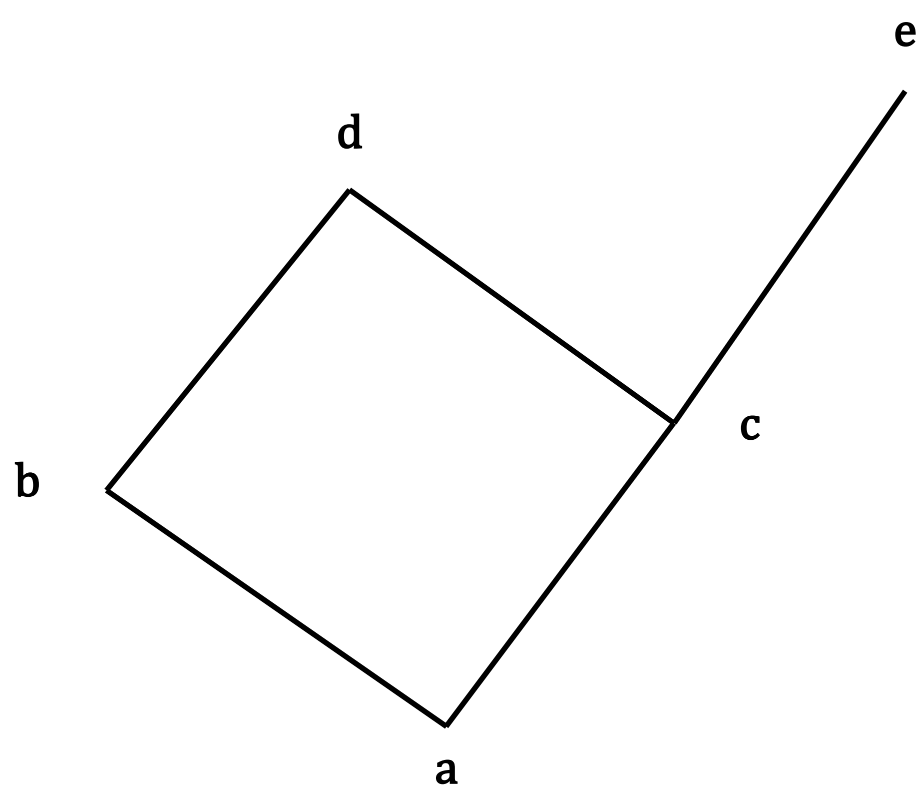
Σχέσεις και Συναρτήσεις

- Ποιά στοιχεία είναι μέγιστα και ποιά ελάχιστα για το σύνολο A={a, b, c, d, e, f, g} με βάση το επόμενο διάγραμμα;



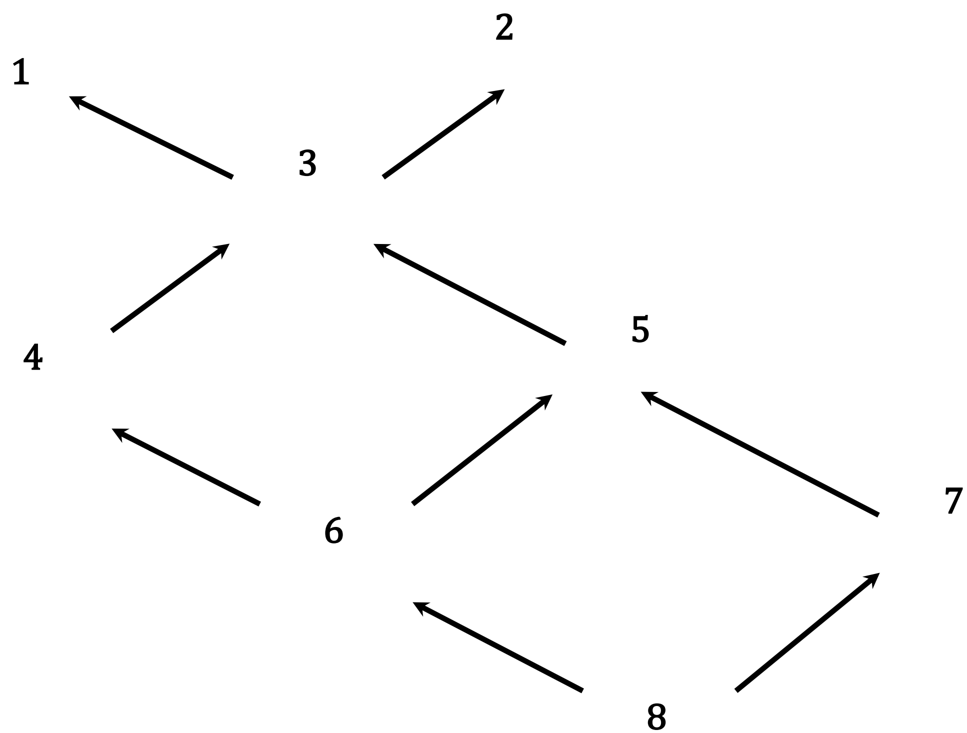
Σχέσεις και Συναρτήσεις

- Βρείτε όλα τα υποσύνολα του A={a, b, c, d, e} τα οποία έχουν ως ελάχιστο στοιχείο το *c*.



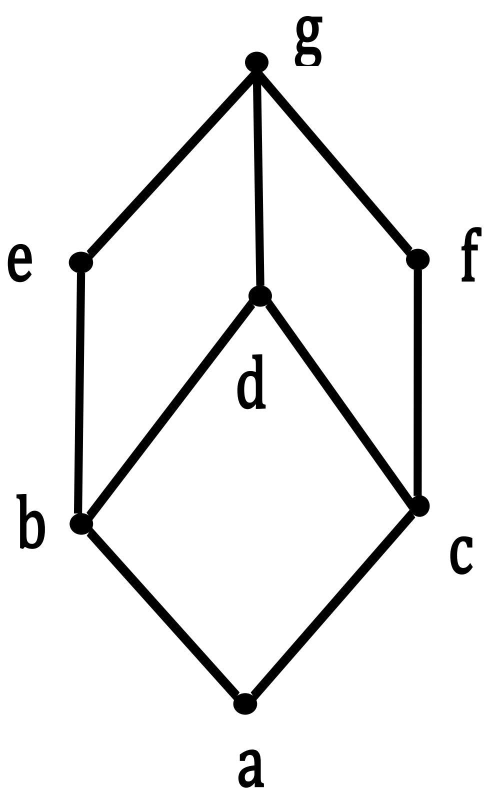
Σχέσεις και Συναρτήσεις

- Με βάση το επόμενο διάγραμμα Hasse προσδιορίστε ποιό στοιχείο είναι το ελάχιστο άνω φράγμα (supremum) και ποιό το μέγιστο κάτω φράγμα (infimum).

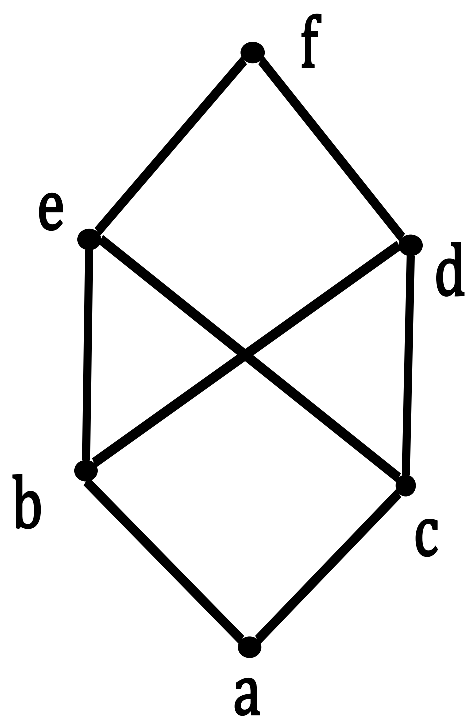


Σχέσεις και Συναρτήσεις

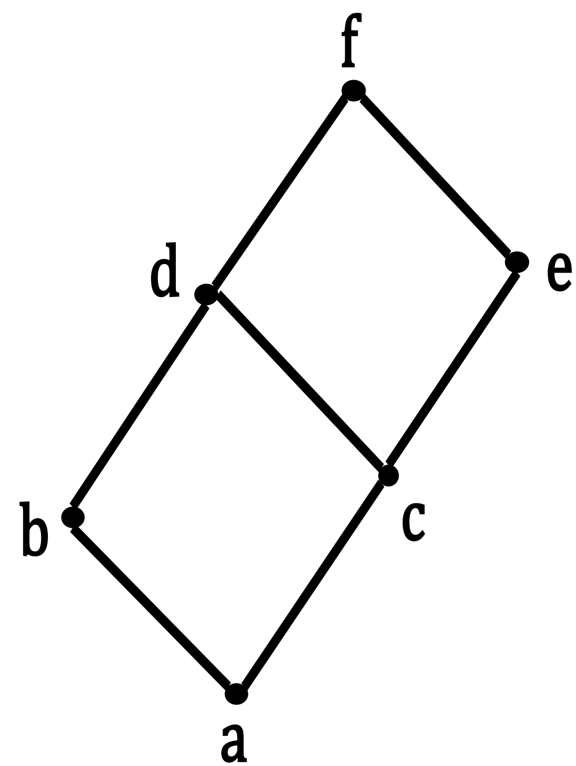
- Ποιό από τα επόμενα διαγράμματα Hasse αναπαριστά ένα δικτυωτό και γιατί;



(1)



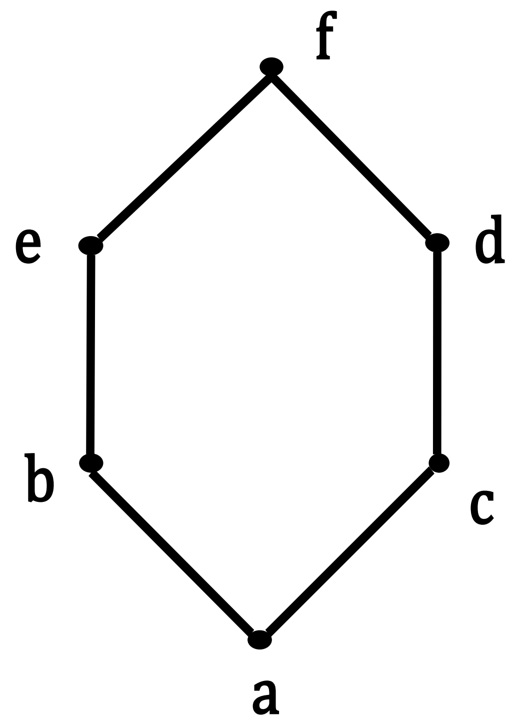
(2)



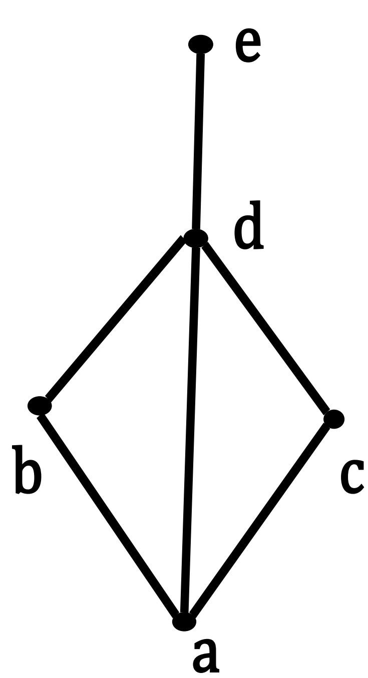
(3)

Σχέσεις και Συναρτήσεις

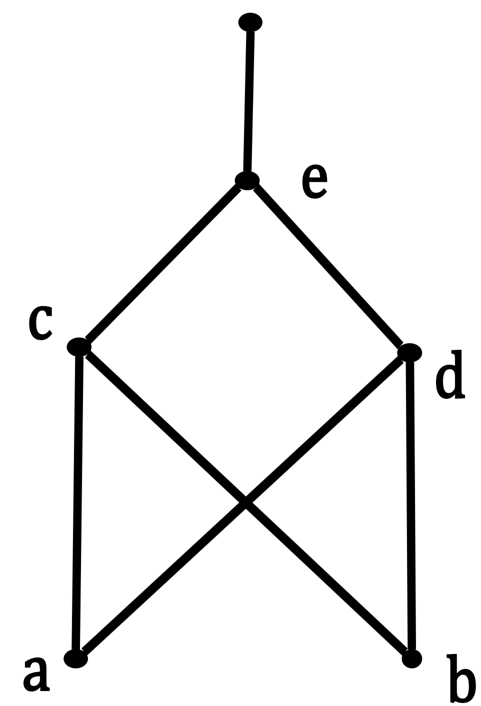
- Ποιό από τα επόμενα διαγράμματα Hasse αναπαριστά ένα δικτυωτό και γιατί;



(1)



(2)



(3)

Σχέσεις και Συναρτήσεις

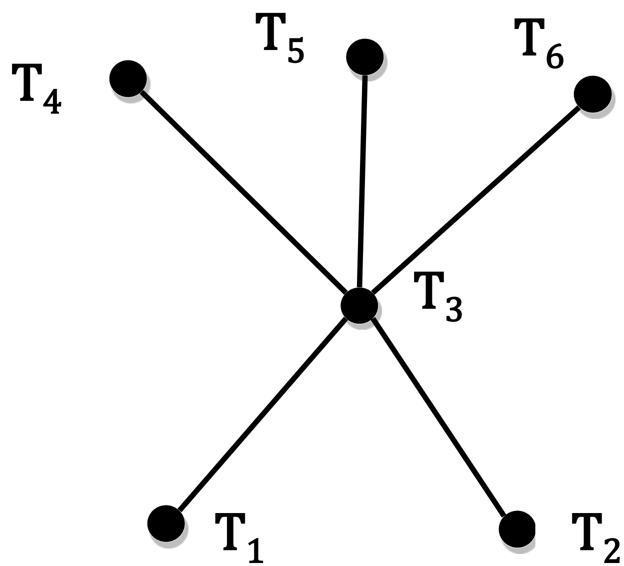
- Παράδειγμα: Πρόβλημα χρονοπρογραμματισμού εργασιών σε ένα σύστημα πολλαπλών επεξεργαστών (C. L. Liu)

  Ας θεωρήσουμε ένα υπολογιστικό σύστημα με n επεξεργαστές $\mathrm{P_1, P_2, \ldots, P_n}$ στο οποίο πρόκειται να εκτελεσθούν ταυτόχρονα k εργασίες (tasks) $\mathrm{T_1, T_2, \ldots, T_k}$.

  Αν η εκτέλεση μιας εργασίας $\mathrm{T_j}$ εξαρτάται από την εκτέλεση μιας άλλης $\mathrm{T_i}$ και δεν μπορεί να ξεκινήσει παρά μόνον αν έχει ολοκληρωθεί η εκτέλεση της $\mathrm{T_i}$ τότε η ορίζεται μια σχέση μερικής διάταξης επί του συνόλου των εργασιών T και μπορούμε να γράψουμε $\mathrm{T_i} \leq \mathrm{T_j}$.

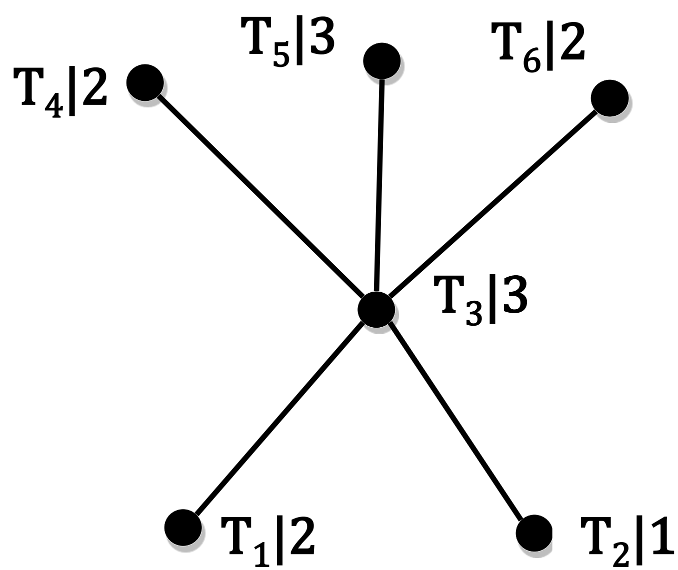
Σχέσεις και Συναρτήσεις

Αν σύμφωνα με τα παραπάνω η σχέση επί του T είναι η $R=\{(T_1, T_3), (T_2, T_3), (T_3, T_4), (T_3, T_5), (T_3, T_6)\}$ τότε το διάγραμμα της σχέσης είναι,



Σχέσεις και Συναρτήσεις

Συνυπολογίζοντας και το υπολογιστικό κόστος κάθε εργασίας σε μονάδες χρόνου τότε το διάγραμμα της σχέσης μπορεί να πάρει τη μορφή,



Σχέσεις και Συναρτήσεις

- Διάφορα υπολογιστικά ερωτήματα που τίθενται στο πρόβλημα αυτό μπορούν να απαντηθούν με τη βοήθεια αυτού το μοντέλου καθώς και με αλγορίθμους επί του γραφήματος της εκτέλεσης των εργασιών με τους περιορισμούς προτεραιότητας που έχουν οριστεί.
- Ποιός είναι ο συνολικός χρόνος διεκπεραίωσης των εργασιών σύμφωνα με τον προγραμματισμό;
- Ποιός είναι ο χρόνος που συνολικά μένει αδρανής ένας επεξεργαστής;
- Ποιά είναι η τακτική ανάθεσης επεξεργαστών για την εκτέλεση των εργασιών ώστε να ελαχιστοποιηθεί ο χρόνος διεκπεραίωσης;

Σχέσεις και Συναρτήσεις

- Άλλη περιοχή εφαρμογών

Formal Concept Analysis (από τη wikipedia)

Formal concept analysis (**FCA**) is a principled way of deriving a *concept hierarchy* or formal ontology from a collection of objects and their properties. Each concept in the hierarchy represents the objects sharing some set of properties; and each sub-concept in the hierarchy represents a subset of the objects (as well as a superset of the properties) in the concepts above it. The term was introduced by Rudolf Wille in 1981, and builds on the mathematical theory of lattices and ordered sets that was developed by Garrett Birkhoff and others in the 1930s.

Σχέσεις και Συναρτήσεις

- Formal Concept Analysis (συνέχεια από τη wikipedia)

  Formal concept analysis finds practical application in fields including data mining, text mining, machine learning, knowledge management, semantic web, software development, chemistry and biology.

  Άλλα παραδείγματα από το web.