

ΓΡΑΦΗΜΑΤΑ

Υπογραφήματα – Μονοπάτια - Συνεκτικότητα

Ασκήσεις

1. Έστω $G=(X, U)$ ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των βαθμών των κορυφών ισούται με το διπλάσιο του πλήθους των ακμών. Θα θεωρήσετε ότι στην περίπτωση αυτή το γράφημα δεν έχει βρόχο.
2. Έστω $G=(X, U)$ ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα. Να αποδείξετε ότι μεταξύ δύο κορυφών $x, y \in X$ υπάρχει ένα μονοπάτι αν και μόνον αν υπάρχει ένα στοιχειώδες μονοπάτι μεταξύ των κορυφών αυτών.
3. Έστω $G = (X, U)$, ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα και δύο κορυφές $x, y \in X$. Αν υπάρχει ένα μονοπάτι από το x στο y ονομάζουμε απόσταση μεταξύ των x και y , και γράφουμε $d(x, y)$, το πλήθος των ακμών του στοιχειώδους μονοπατιού από το x στο y , που σύμφωνα με την προηγούμενη άσκηση υπάρχει. Το πλήθος αυτό ονομάζεται και μήκος του μονοπατιού.
Ποιά είναι η απόσταση της κορυφής A από τις υπόλοιπες κορυφές στο γράφημα $G = (X, U)$, με $X = \{A, B, C, D, E, F, G\}$ οι κορυφές του και $U = \{ \{A, B\}, \{B, E\}, \{C, F\}, \{D, A\}, \{D, G\}, \{E, F\}, \{E, D\}, \{B, C\} \}$ οι ακμές του.
4. Ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα $G = (X, U)$ ονομάζεται κανονικό βαθμού k (k -regular) αν όλες οι κορυφές του έχουν βαθμό k . Σχεδιάστε τα κανονικά συνεκτικά γραφήματα βαθμού 2 με πλήθος κορυφών 3, 4, 5, 6 και 7. Εξετάστε αν είναι δυνατόν κάποια από τα προηγούμενα γραφήματα να είναι κανονικά βαθμού 2 χωρίς να είναι συνεκτικά.
5. Έστω $G=(X, U)$ ένα κατευθυνόμενο γράφημα. Ποιό είναι το ελάχιστο πλήθος στοιχείων, δηλαδή κορυφών ή και ακμών, που απαιτούνται για την περιγραφή ενός υπογραφήματος.
6. Έστω $G=(X, U)$ ένα κατευθυνόμενο γράφημα και $G'=(X', U')$ ένα υπογράφημα. Αν το υπογράφημα αυτό είναι συνεκτικό τι μπορούμε να συμπεράνουμε ως προς τη συνεκτικότητα για το συμπληρωματικό του;
7. Έστω $G=(X, U)$ ένα κατευθυνόμενο γράφημα. Ένα επικαλύπτον μονοπάτι του γραφήματος είναι ένα μονοπάτι που περνά από όλες τις κορυφές. Εξετάστε αν στο γράφημα με κορυφές $X = \{A, B, C, D, E\}$ και ακμές $U = \{ (A, B), (A, C), (C, D), (D, A), (D, E), (B, E) \}$ υπάρχει ένα επικαλύπτον μονοπάτι.
8. Εξετάστε κατά πόσον μπορεί να οριστεί ένα επικαλύπτον μονοπάτι σε ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα. Εφαρμόστε τα συμπεράσματά σας θεωρώντας ότι το γράφημα της προηγούμενης άσκησης είναι μη κατευθυνόμενο.