ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ
Β' ΕΞΑΜΗΝΟ ΣΠΟΥΔΩΝ

ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Γραφήματα

Διδάσκων: ΣΤΑΥΡΟΣ ΑΔΑΜ

ΕΑΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2023-2024

Ορισμοί και Ιδιότητες

Βασικές έννοιες

Πολλά προβλήματα της πραγματικής ζωής μπορούν να αναπαρασταθούν ως προβλήματα που αφορούν σύνολα διακριτών αντικειμένων καθώς επίσης και διμελείς σχέσεις επί αυτών των συνόλων. Σε πολλές περιπτώσεις η αφηρημένη αλγεβρική χρήση συνόλων και διμελών σχέσεων δεν αρκεί ώστε να αναδυθούν όλες οι ιδιαιτερότητες του προβλήματος και να φανεί η σχέση μεταξύ των αντικειμένων.

Για παράδειγμα αν θεωρήσουμε το σύνολο των πόλεων μιας χώρας και το οδικό της δίκτυο, τότε στο ερώτημα αν η πόλη $\mathbf{x}$ συνδέεται οδικά με την πόλη $\mathbf{y}$ η απάντηση μπορεί να δοθεί πολύ εύκολα αν κάποιος έχει μια γραφική αναπαράσταση του οδικού δικτύου και της διάταξης των πόλεων χωρίς αναφορά στην ίδια τη γεωγραφία της χώρας ή άλλες συγκεκριμένες γεωγραφικές πληροφορίες του οδικού δικτύου.

Ορισμοί και Ιδιότητες

Βασικές έννοιες

Έτσι αν παραστήσουμε με $\mathbf{A}$ το σύνολο των πόλεων και με $\mathbf{R}$ τη διμελή σχέση επί του $\mathbf{A}$ που ορίζεται ως εξής: $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbf{R}$ αν υπάρχει απευθείας οδική σύνδεση μεταξύ της πόλης $\mathbf{x}$ και της πόλης $\mathbf{y}$ τότε έχουμε μια πλήρη αναπαράσταση του οδικού δικτύου μεταξύ των πόλεων. Εκείνο που λείπει από το μοντέλο αυτό είναι η οπτική παράσταση του οδικού δικτύου και των εναλλακτικών τρόπων σύνδεσης των πόλεων κάτι που είναι απόλυτα διαθέσιμο σε ένα οδικό χάρτη ή διάγραμμα.

Η διαφορά αυτή, μεταξύ του θεωρητικού μοντέλου που προτείνουν τα σύνολα με τις διμελείς σχέσεις αφενός και των διαγραμάτων που οπτικοποιούν και εμφανίζουν τις σχέσεις μεταξύ των στοιχείων ενός συνόλου αφετέρου, δικαιολογεί σε μεγάλο βαθμό τη χρήση των γραφημάτων και την ανάδειξη τους σε χωριστό κλάδο των διακριτών μαθηματικών.

Ορισμοί και Ιδιότητες

Ορισμός

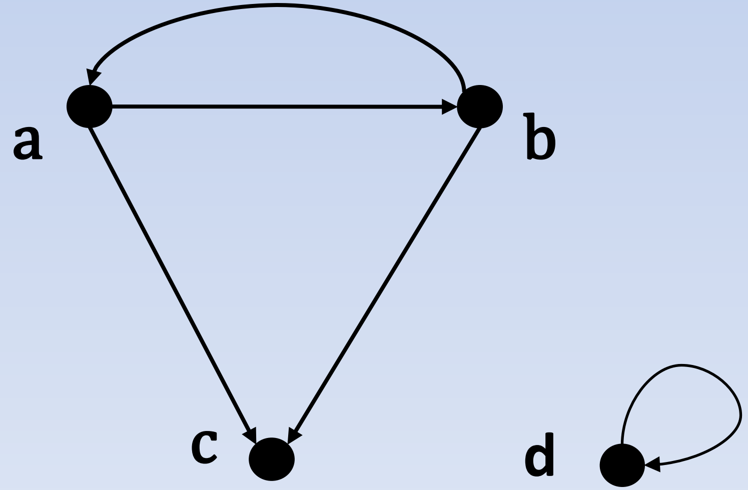
Ένα κατευθυνόμενο γράφημα ή γράφος (graph) $\mathbf{G}$ είναι ένα διατεταγμένο ζεύγος $(\mathbf{X}, \mathbf{U})$ όπου $\mathbf{X}$ είναι ένα σύνολο στοιχείων που ονομάζονται κορυφές ή κόμβοι ή σημεία (vertices) του γραφήματος και $\mathbf{U}$ μια διμελής σχέση επί του $\mathbf{X}$, $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{X} \times \mathbf{X}$, τα στοιχεία της οποίας ονομάζονται ακμές (edges) του γραφήματος και περιγράφουν τη σχέση μεταξύ των στοιχείων του $\mathbf{X}$. Τα στοιχεία του $\mathbf{U}$ συμβολίζονται και με $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \ldots$

Πολλές φορές στη βιβλιογραφία το γράφημα αναπαρίσταται ως το ζεύγος $\mathbf{G}=(\mathbf{V},\ \mathbf{E})$ όπου $\mathbf{V}$ είναι το σύνολο των κορυφών (vertices) και $\mathbf{E}$ το σύνολο των ακμών (edges).

Ορισμοί και Ιδιότητες

Πρακτικά ένα γράφημα αναπαρίσταται με ένα διάγραμμα στο οποίο οι κορυφές είναι σημεία του επιπέδου και οι ακμές είναι συνδέσεις μεταξύ των κορυφών με κατεύθυνση από το πρώτο στοιχείο του διατεταγμένου ζεύγους προς το δεύτερο.

Έτσι, αν $X=\{a, b, c, d\}$ και $U = \{(a, b), (a, c), (b, a), (b, c), (d, d)\}$ τότε το $G=(X, U)$ είναι ένα γράφημα που αναπαρίσταται με το ακόλουθο διάγραμμα:



Ορισμοί και Ιδιότητες

Ορισμοί

- Μία ακμή ονομάζεται προσπίπτουσα των κορυφών που ενώνει. Έτσι η ακμή $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ είναι προσπίπτουσα των κορυφών $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$ που ενώνει, ή ακόμη είναι προσπίπτουσα από την $\mathbf{a}$ και προσπίπτουσα στην $\mathbf{b}$.
- Δύο κορυφές $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$ που έχουν την ίδια προσπίπτουσα ακμή, ή αλλιώς συνδέονται με μία προσπίπτουσα ακμή, ονομάζονται γειτονικές.
- Αν $\mathbf{u}=(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ είναι μια ακμή ενός γραφήματος, τότε η κορυφή $\mathbf{a}$ ονομάζεται αρχική κορυφή, ή αφετηρία, της $\mathbf{u}$ και συμβολίζεται με $\mathrm{a}=\mathrm{I}(\mathrm{u})$ η δε κορυφή $\mathbf{b}$ ονομάζεται τερματική κορυφή, ή πέρας, της ακμής $\mathbf{u}$ και συμβολίζεται με $\mathrm{b}=\mathrm{T}(\mathrm{u})$.

Ορισμοί και Ιδιότητες

- Μία ακμή $\mathbf{u}$ που έχει την ίδια αρχική και τερματική κουρφή ονομάζεται βρόχος, όπως για παράδειγμα η ακμή $(\mathbf{d}, \mathbf{d})$.
- Μία κορυφή που δεν έχει γειτονικές κορυφές ονομάζεται απομονωμένη κορυφή, όπως για παράδειγμα η κορυφή $\mathbf{d}$.

Έστω ένα κατευθυνόμενο γράφημα $\mathbf{G=(X, U)}$ και $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ μια κορυφή του γραφήματος. Τότε ορίζονται τα ακόλουθα:

- Ονομάζουμε εξερχόμενο βαθμό της κορυφής $\mathbf{x}$ στο γράφημα $\mathbf{G=(X, U)}$ το πλήθος των ακμών που έχουν το $\mathbf{x}$ ως αρχική κορυφή και συμβολίζουμε με $d^{+}_{\mathrm{G=(X,U)}}$ ή $d^{+}_{\mathrm{G=(X,U)}}(\mathrm{x})$
- Επίσης ονομάζουμε εισερχόμενο βαθμό της κορυφής $\mathbf{x}$ στο γράφημα $\mathbf{G=(X, U)}$ το πλήθος των ακμών που έχουν το $\mathbf{x}$ ως τερματική κορυφή και συμβολίζουμε με $d^{-}_{\mathrm{G=(X,U)}}$ ή $d^{-}_{\mathrm{G=(X,U)}}(\mathrm{x})$

Ορισμοί και Ιδιότητες

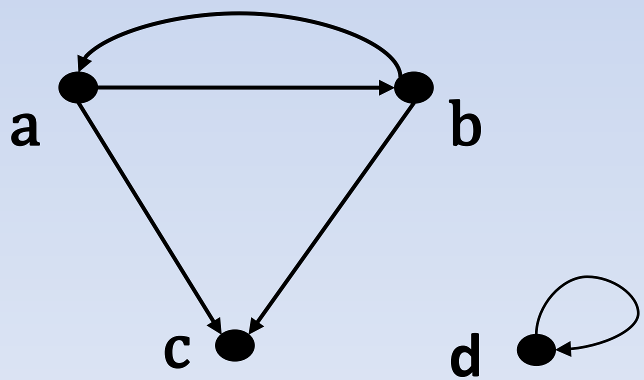
- Τέλος, ονομάζουμε βαθμό της κορυφής **x** στο γράφημα **G=(X, U)** το πλήθος των ακμών που έχουν το **x** τόσο ως αρχική όσο και ως τερματική κορυφή. Στην περίπτωση αυτή συμβολίζουμε με

$d_{G=(X,U)}$ ή $d_{G=(X,U)}(x)$

- Είναι προφανές ότι ισχύει η ακόλουθη σχέση:

$$d_{G=(X,U)} = d^{+}_{G=(X,U)} + d^{-}_{G=(X,U)}$$

- Παράδειγμα: Στο επόμενο γράφημα ποιός είναι ο βαθμός κάθε κορυφής;



Ορισμοί και Ιδιότητες

Ορισμός

Ένα απλό ή μη κατευθυνόμενο γράφημα (graph) $\mathbf{G}$ είναι επίσης ένα διατεταγμένο ζεύγος $(\mathbf{X}, \mathbf{U})$ όπου $\mathbf{X}$ είναι ένα σύνολο στοιχείων που ονομάζονται κορυφές ή κόμβοι ή σημεία του γραφήματος και $\mathbf{U}$ ένα σύνολο τα στοιχεία του οποίου είναι υποσύνολα με δύο στοιχεία του $\mathbf{X}$. Τα στοιχεία του $\mathbf{U}$ ονομάζονται, όπως και στην περίπτωση του κατευθυνόμενου γραφήματος ακμές, ή γραμμές του γραφήματος και δείχνουν ότι δύο στοιχεία του $\mathbf{X}$ συνδέονται με κάποιο τρόπο χωρίς κατεύθυνση**.** Το απλό γράφημα όπως και στην περίπτωση του κατευθευνόμενου συμβολίζεται με $\mathbf{G{=}(X, U)}$**.**

Ορισμοί και Ιδιότητες

Σημείωση:

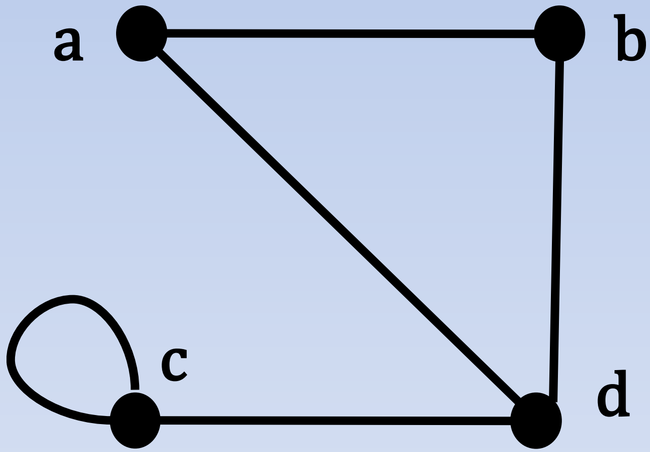
Θα πρέπει να σημειωθεί ότι στην περίπτωση ύπαρξης βρόχων σε ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα τότε για κάποιους συγγραφείς στη βιβλιογραφία αυτά τα γραφήματα θεωρούνται πολυγραφήματα (multi-graphs) δεδομένου ότι κάποια από τα στοιχεία του **U** είναι πολυσύνολα, δηλαδή το ίδιο στοιχείο να εμφανίζεται δύο φορές, π.χ. **{a, a}.**

Τα πολυγραφήματα παρουσιάζονται σε επόμενη παράγραφο. Πάντως, στην περίπτωση αυτή στα μη κατευθυνόμενα γραφήματα ο βρόχος μετρά 2 φορές για τον υπολογισμό του βαθμού μιας κορυφής.

Ορισμοί και Ιδιότητες

Ένα απλό ή μη κατευθυνόμενο γράφημα (graph) **G** = **(X, U)** μπορούμε να θεωρήσουμε ότι προκύπτει από ένα κατευθυνόμενο γράφημα αν από τις ακμές του αφαιρεθεί η κατεύθυνση.

Το επόμενο γράφημα **G** = **(X, U)** όπου **X={a, b, c, d}** και **U = { {a, b}, {a, d}, {b, d}, {c, d}, {c, c} }** είναι ένα απλό γράφημα το διάγραμμα του οποίου είναι το ακόλουθο:



Προφανώς, αυτό το μη κατευθυνόμενο γράφημα μπορεί να προέλθει από μια πληθώρα κατευθυνόμενων γραφημάτων. Πόσα διαφορετικά;

Ορισμοί και Ιδιότητες

Ορισμοί

- Μία ακμή ονομάζεται προσπίπτουσα των κορυφών που ενώνει. ΄Ετσι η ακμή **{a ,b}** είναι προσπίπτουσα των κορυφών **a** και **b**.
- Δύο κορυφές **a** και **b** που έχουν την ίδια προσπίπτουσα ακμή, ή αλλιώς συνδέονται με μία προσπίπτουσα ακμή, ονομάζονται γειτονικές.
- Σε ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα δεν ορίζονται αρχική και τερματική κορυφή μιας ακμής.
- Μία ακμή **u** που συνδέει μια κορυφή με τον εαυτό της ονομάζεται βρόχος, όπως για παράδειγμα η ακμή **{c, c}**.
- Μία κορυφή που δεν έχει γειτονικές κορυφές ονομάζεται απομονωμένη κορυφή.

Ορισμοί και Ιδιότητες

Ορισμοί

Έστω $\mathbf{G} = (\mathbf{X}, \mathbf{U})$ ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα και $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ μια ακμή του γραφήματος.

- Ονομάζουμε βαθμό της κορυφής $\mathbf{x}$ στο γράφημα $\mathbf{G} = (\mathbf{X}, \mathbf{U})$ το πλήθος των ακμών που είναι προσπίπτουσες στην κορυφή $\mathbf{x}$ και συμβολίζουμε με $d_{\mathrm{G}=(\mathrm{X},\mathrm{U})}$

- Προφανώς σε ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα δεν ορίζονται ο εξωτερικός και ο εσωτερικός βαθμός μιας κορυφής.

- Στο προηγούμενο γράφημα ποιός είναι ο βαθμός κάθε κορυφής;

Ορισμοί και Ιδιότητες

Ορισμός

Έστω $\mathbf{X}$ πεπερασμένο σύνολο διακριτών στοιχείων. Αν συμβολίσουμε με $\mathscr{G}$ το σύνολο των κατευθυνόμενων γραφημάτων επί του $\mathbf{X}$ και με $\mathscr{R}$ το σύνολο των διμελών σχέσεων επί του $\mathbf{X}$ τότε, υπάρχει μια απεικόνιση ένα-προς-ένα του $\mathscr{R}$ και του $\mathscr{G}$.. Η απεικόνιση αυτή είναι ισομορφισμός.

Δηλαδή σε κάθε διμελή σχέση επί του $\mathbf{X}$ αντιστοιχεί ένα και μόνο ένα κατευθυνόμενο γράφημα με κορυφές τα στοιχεία του $\mathbf{X}$ και αντίστροφα σε κάθε κατευθυνόμενο γράφημα αντιστοιχεί μία και μόνο μία διμελής σχέση επί του $\mathbf{X}$.

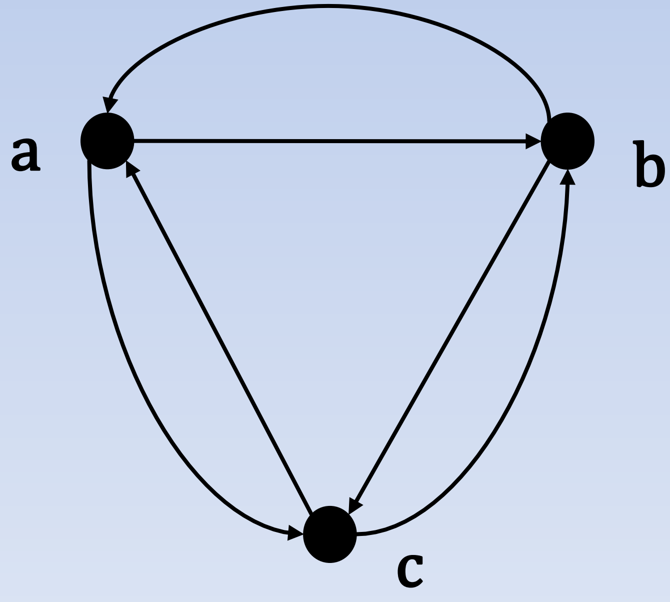
Σαν συνέπεια του προηγούμενου ισομορφισμού οι επόμενες ιδιότητες μεταφέρονται στα γραφήματα από τις διμελείς σχέσεις.

Ορισμοί και Ιδιότητες

Ιδιότητες

Έστω $\mathbf{G} = (\mathbf{X}, \mathbf{U})$ ένα κατευθυνόμενο γράφημα. Το γράφημα αυτό ονομάζεται:

- Συμμετρικό, αν για κάθε ακμή $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbf{U}$ ισχύει ότι $(\mathbf{y},\ \mathbf{x}) \in \mathbf{U}$. Παράδειγμα:



Ορισμοί και Ιδιότητες

- Αντισυμμετρικό, αν για κάθε ακμή $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbf{U}$ η συμμετρική ακμή $(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \notin \mathbf{U}$ εκτός εάν **x = y** . Αυτό σημαίνει ότι το γράφημα για δύο οποιεσδήποτε κορυφές $\mathbf{x}$ και $\mathbf{y}$ περιέχει είτε την ακμή $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ είτε την ακμή $(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ αλλά όχι και τις δύο εκτός, βέβαια, αν πρόκειται για το βρόχο $(\mathbf{x}, \mathbf{x})$.
- Παράδειγμα ενός αντισυμμετρικού γραφήματος, αφήνεται ως άσκηση.
- Μεταβατικό, αν για κάθε δύο ακμές $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbf{U}$ και $(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \in \mathbf{U}$ ισχύει ότι και η ακμή $(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ είναι ακμή του γραφήματος.
- Παράδειγμα ενός μεταβατικού γραφήματος, αφήνεται ως άσκηση.
- Ερώτηση: πως ορίζεται ένα ανακλαστικό γράφημα;

Ορισμοί και Ιδιότητες

Ερώτημα

Έστω $\mathbf{X}$ πεπερασμένο σύνολο διακριτών στοιχείων. Αν συμβολίσουμε με $\mathcal{G}$ το σύνολο των μη κατευθυνόμενων γραφημάτων επί του $\mathbf{X}$ και με $\mathcal{D}(\mathbf{X})$ το δυναμοσύνολο του $\mathbf{X}$ είναι δυνατό να ορίσουμε μια αντιστοιχία μεταξύ των μη κατευθυνόμενων γραφημάτων και κάποιων υποσυνόλων του $\mathbf{X}$;

Ποιά προβλήματα υπάρχουν;

Ορισμοί και Ιδιότητες

Ορισμός

Ένα κατευθυνόμενο γράφημα $\mathbf{G} = (\mathbf{X}, \mathbf{U})$ ονομάζεται πλήρες αν για δύο οποιεσδήποτε κορυφές $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{X}$ είτε η ακμή $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ είτε η $(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ ανήκει στο $\mathbf{U}$.

Παράδειγμα και αντιπαράδειγμα πλήρους γραφήματος, αφήνονται ως άσκηση.

Κατ’αναλογία των προηγουμένων ποιός είναι ο ορισμός ενός πλήρους γραφήματος στην περίπτωση των μη κατευθυνόμενων γραφημάτων; Δώστε παραδείγματα και αντιπαραδείγματα.

Ορισμοί και Ιδιότητες

Ορισμός

Δύο γραφήματα $\mathbf{G_1} = (\mathbf{X_1}, \mathbf{U_1})$ και $\mathbf{G_2} = (\mathbf{X_2}, \mathbf{U_2})$ τα οποία μπορεί να είναι κατευθυνόμενα ή μη ονομάζονται ισομορφικά (ή ισόμορφα) όταν υπάρχει μία αντιστοιχία ένα-προς-ένα μεταξύ των κορυφών και μεταξύ των ακμών έτσι ώστε να διατηρούνται οι προσπίπτουσες.

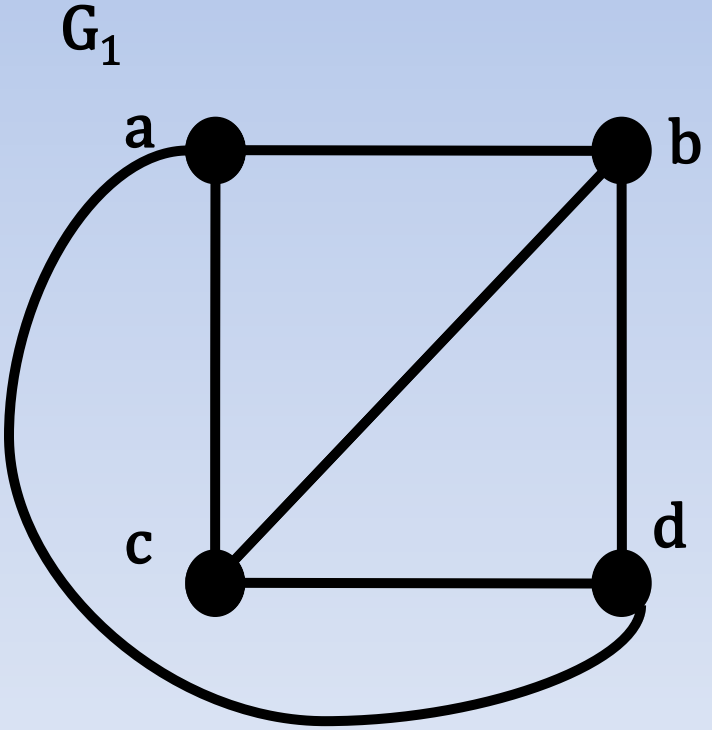
Δηλαδή, αν τα γραφήματα είναι κατευθυνόμενα και υπάρχει μία ακμή $\mathbf{u}=(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ μεταξύ των κορυφών $\mathbf{x}$ και $\mathbf{y}$ στο ένα γράφημα, και οι αντίστοιχες κορυφές των $\mathbf{x}$ και $\mathbf{y}$ στο άλλο γράφημα, λόγω του ισομορφισμού, είναι οι $\mathbf{x}'$ και $\mathbf{y}'$ τότε η ακμή στο δεύτερο γράφημα η αντίστοιχη της $\mathbf{u}$ είναι η $\mathbf{u}' =(\mathbf{x}', \mathbf{y}')$.

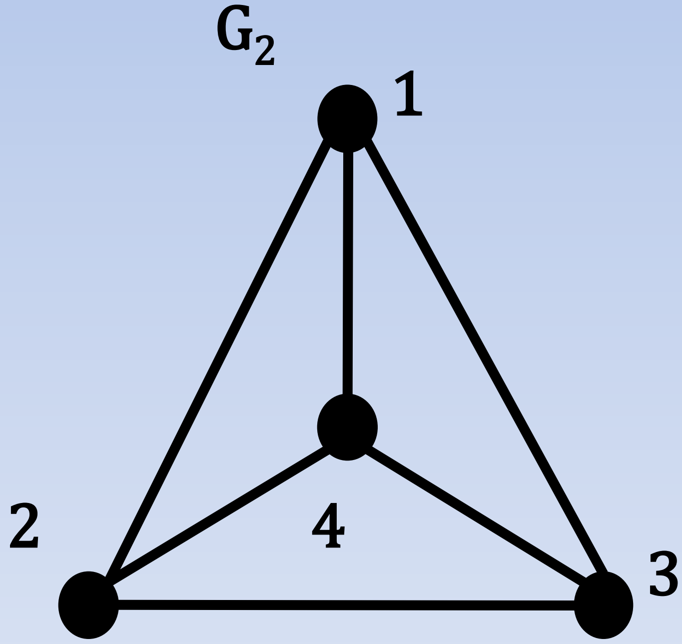
Σημειώστε ότι στην περίπτωση που τα γραφήματα είναι μη κατευθυνόμενα για την αντιστοίχηση δεν τίθεται θέμα κατεύθυνσης των ακμών.

Ορισμοί και Ιδιότητες

Παράδειγμα

Τα δύο γραφήματα $\mathbf{G_1 = (X_1, U_1)}$ και $\mathbf{G_2 = (X_2, U_2)}$ στο επόμενο Σχήμα είναι ισομορφικά.





Ορισμοί και Ιδιότητες

Παράδειγμα

Οι αντιστοιχίες μεταξύ των κορυφών και μεταξύ των ακμών των δύο γραφημάτων δίνονται στους επόμενους πίνακες:

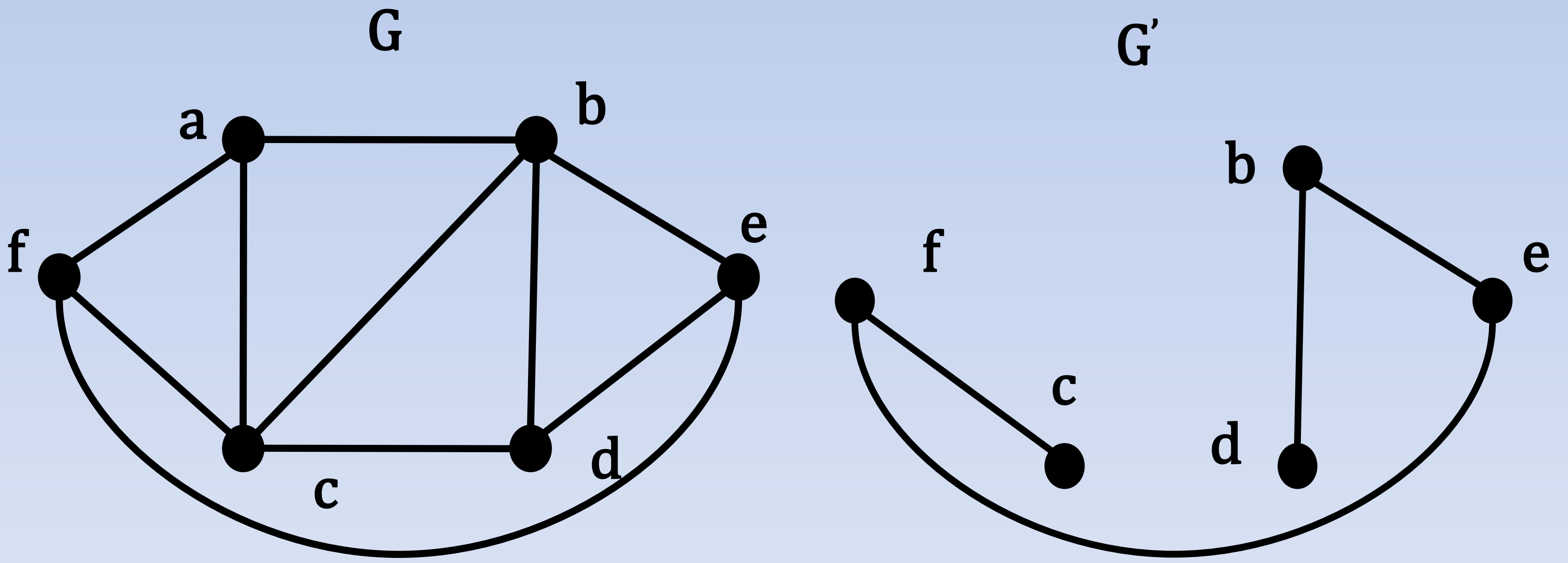
Κορυφές	
a	1
b	2
c	3
d	4

Ακμές	
{a, b}	{1, 2}
{b, c}	{2, 3}
{c, d}	{3, 4}
{d, a}	{4, 1}
{b, d}	{2, 4}
{a, c}	{1, 3}

Ορισμοί και Ιδιότητες

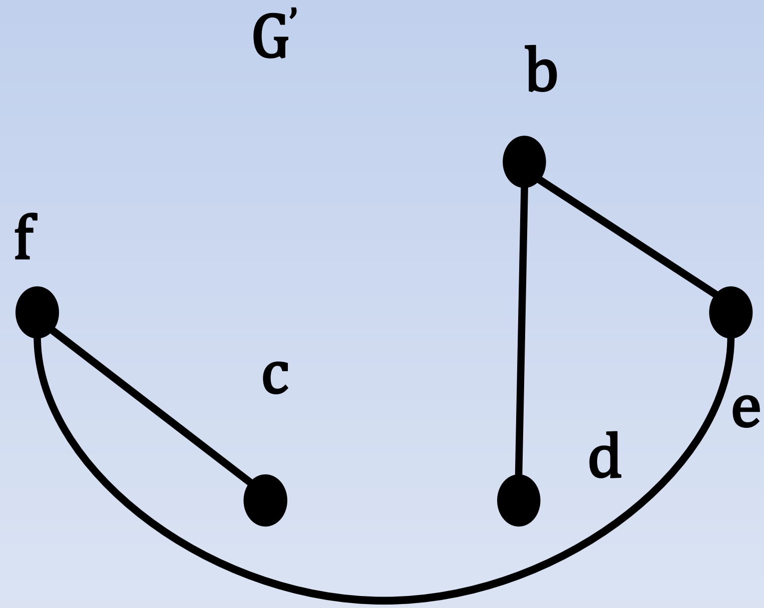
Ορισμός

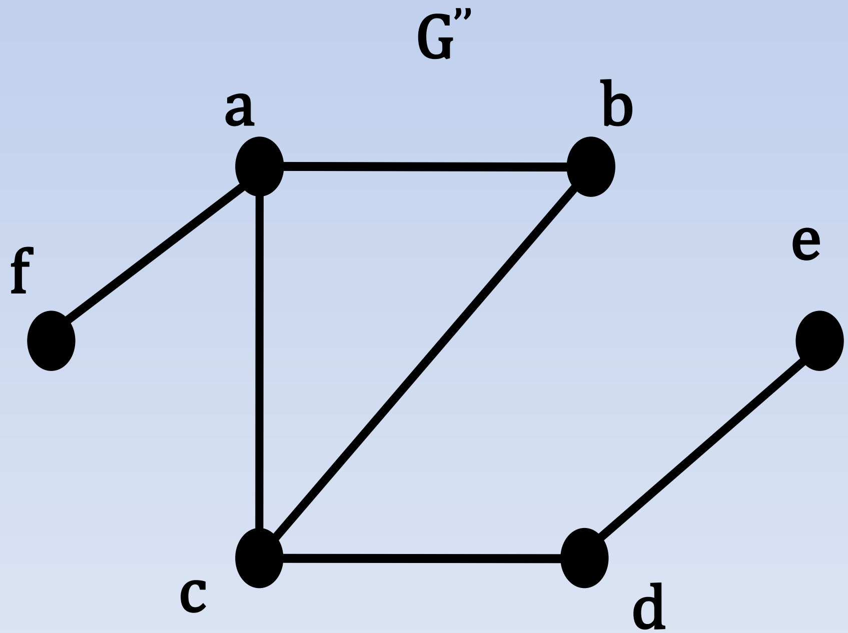
Έστω το γράφημα $\mathbf{G = (X, U)}$ (κατευθυνόμενο ή μη). Ένα γράφημα $\mathbf{G' = (X', U')}$ ονομάζεται υπογράφημα του $\mathbf{G}$ αν $\mathbf{X' \subseteq X}$ και $\mathbf{U' \subseteq U}$ έτσι ώστε οι ακμές του $\mathbf{U'}$ να είναι προσπίπτουσες μόνο σε κορυφές του $\mathbf{X'}$.



Ορισμοί και Ιδιότητες

Για κάθε υπογράφημα **G’** = **(X’, U’)** ενός γραφήματος **G** = **(X, U)** ορίζεται το συμπλήρωμα του **G’** ως προς το **G** που είναι το γράφημα **G’’** = **(X’’, U’’)** για το οποίο ισχύει ότι $\mathbf{U'' = U - U'}$ και το $\mathbf{X'' \subseteq X}$ περιέχει μόνο κορυφές στις οποίες είναι προσπίπτουσες οι ακμές του **U’’** . Για παράδειγμα το συμπλήρωμα **G’’** του γραφήματος **G’** είναι:





Ορισμοί και Ιδιότητες

Ορισμός

Έστω το γράφημα $\mathbf{G} = (\mathbf{X}, \mathbf{U})$ (κατευθυνόμενο ή μη).

Ένα γράφημα $\mathbf{G}' = (\mathbf{X}', \mathbf{U}')$ ονομάζεται ονομάζεται μερικό γράφημα ή επικαλύπτον υπογράφημα του $\mathbf{G}$ αν $\mathbf{X}' = \mathbf{X}$ και $\mathbf{U}' \subseteq \mathbf{U}$, δηλαδή αν περιέχει όλες τις κορυφές και ορισμένες από τις ακμές του $\mathbf{G}$.

Παράδειγμα. Το προηγούμενο γράφημα $\mathbf{G}''$ είναι μερικό γράφημα του γραφήματος $\mathbf{G}$.

Ορισμοί και Ιδιότητες

Ορισμός

Έστω το γράφημα $\mathbf{G} = (\mathbf{X}, \mathbf{U})$ (κατευθυνόμενο ή μη).

Ένα γράφημα $\mathbf{G}'$ = $(\mathbf{X}', \mathbf{U}')$ ονομάζεται ονομάζεται μερικό γράφημα ή επικαλύπτον υπογράφημα του $\mathbf{G}$ αν $\mathbf{U}' \subseteq \mathbf{U}$, δηλαδή αν περιέχει όλες τις κορυφές και ορισμένες μόνον ακμές του $\mathbf{G}$.

Παράδειγμα. Το προηγούμενο γράφημα $\mathbf{G}''$ είναι μερικό γράφημα του γραφήματος $\mathbf{G}$.

Τι μπορεί κάποιος να συμπεράνει από το προηγούμενο παράδειγμα;

Εξετάστε αν:

– ένα υπογράφημα είναι μερικό γράφημα

– ένα μερικό γράφημα είναι υπογράφημα

Ορισμοί και Ιδιότητες

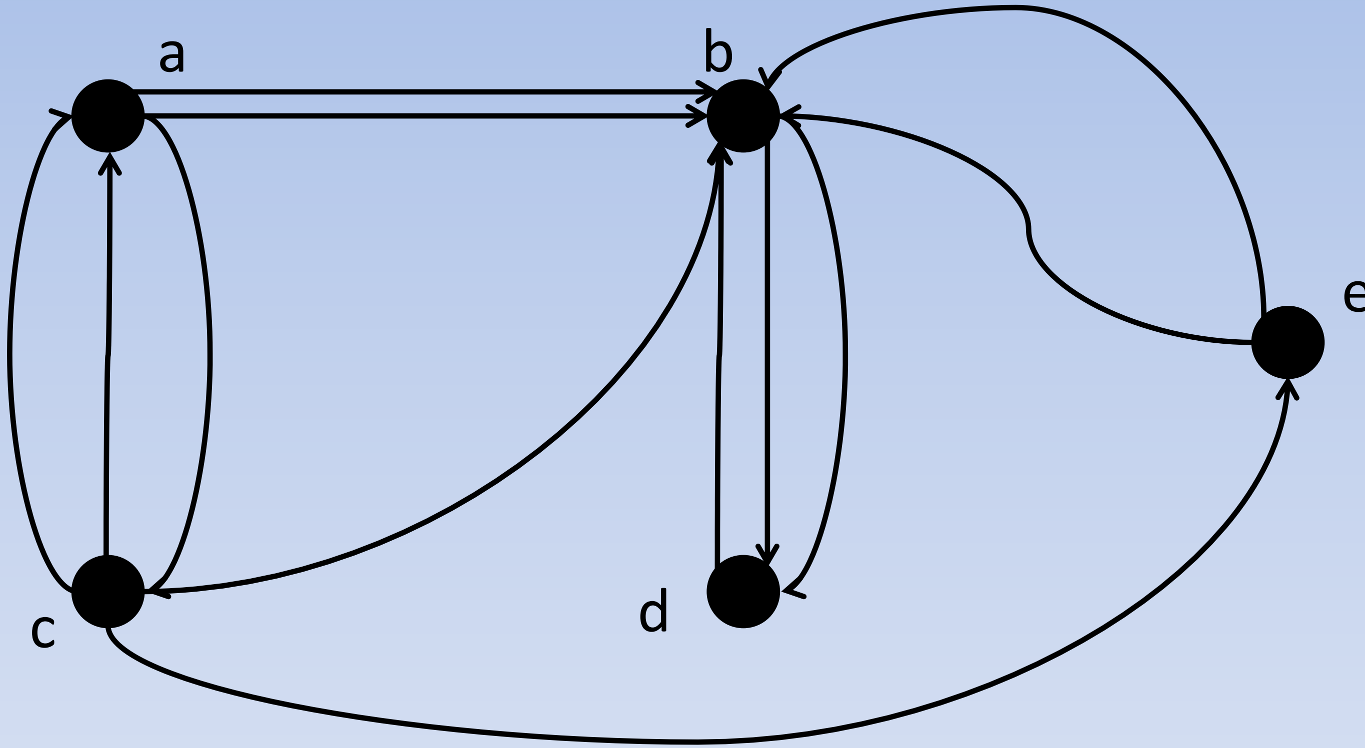
Ορισμός

Ένα κατευθυνόμενο γράφημα $\mathbf{G} = (\mathbf{X}, \mathbf{U})$ ονομάζεται πολυγράφημα (directed multi-graph) αν το σύνολο των ακμών $\mathbf{U}$ είναι ένα πολυσύνολο διατεταγμένων ζευγών στοιχείων του $\mathbf{X}$. Κατά συνέπεια δύο κορυφές $\mathbf{x}$ και $\mathbf{y}$ συνδέονται με μηδέν ή με κάποιο αριθμό από ακμές. Στην περίπτωση του πολυγραφήματος για κάθε ακμή ορίζουμε το βαθμό πολλαπλότητας μιας ακμής ως τον αριθμό που δηλώνει πόσες φορές με πόσες ακμές συνδέονται δύο κορυφές.

Δώστε τον ορισμό του πολυγραφήματος στην περίπτωση που το γράφημα $\mathbf{G} = (\mathbf{X}, \mathbf{U})$ είναι μη κατευθυνόμενο.

Ορισμοί και Ιδιότητες

Παράδειγμα:



Ορίστε τους βαθμούς πολυπλοκότητας των ακμών.

Ορισμοί και Ιδιότητες

Άσκηση

Δώστε τον ορισμό και παραδείγματα του πολυγραφήματος στην περίπτωση που το γράφημα $\mathbf{G} = (\mathbf{X}, \mathbf{U})$ είναι μη κατευθυνόμενο.

Ορισμοί και Ιδιότητες

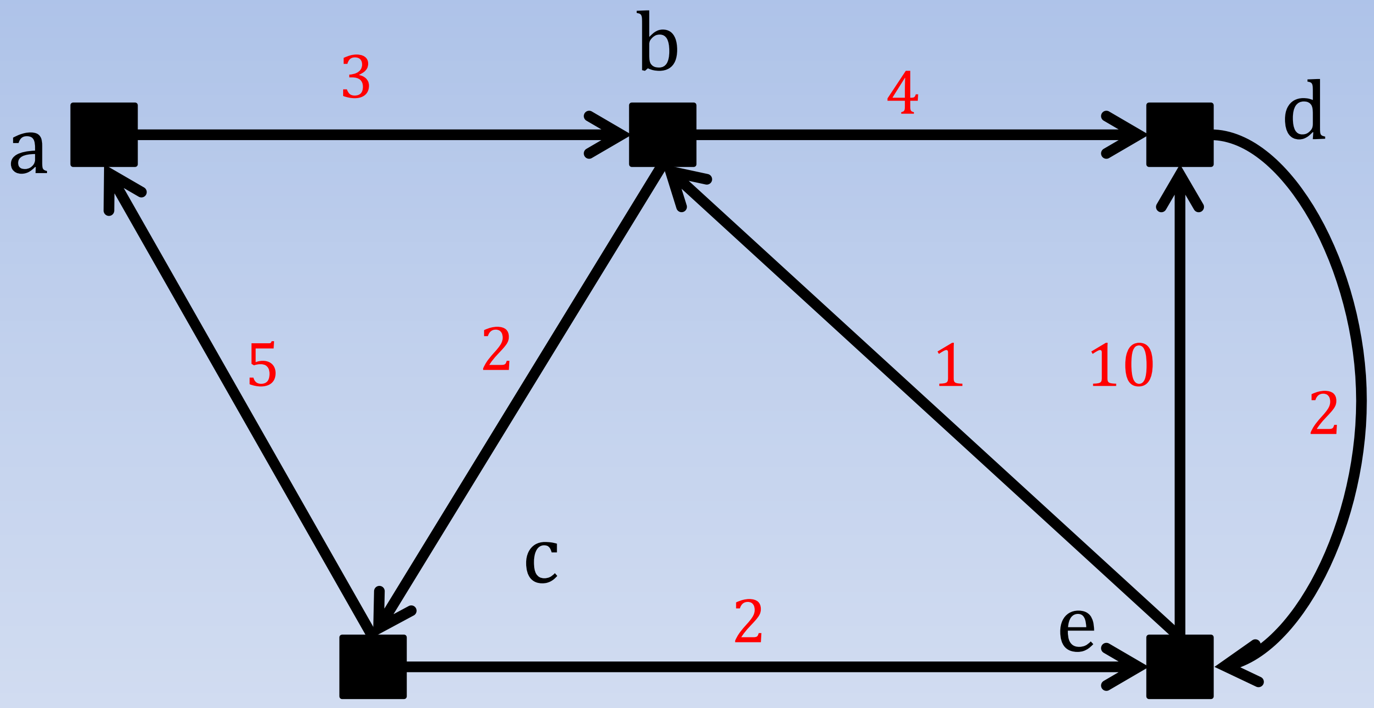
Ορισμός

Έστω $\mathbf{G} = (\mathbf{X}, \mathbf{U})$ ένα γράφημα (κατευθυνόμενο ή μη). Ένα βεβαρυμένο γράφημα ή δίκτυο για το $\mathbf{G}$ είναι μία διατεταγμένη τετράδα $(\mathbf{X}, \mathbf{U}, \mathbf{f}, \mathbf{g})$ όπου $\mathrm{f} : \mathrm{X} \to \mathbb{R}$ και $\mathrm{g} : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ είναι δύο πραγματικές συναρτήσεις των $\mathbf{X}$ και $\mathbf{U}$ οι οποίες «αποδίδουν» ένα συγκεκριμένο πραγματικό αριθμό σε κάθε κορυφή ή και σε κάθε ακμή που ονομάζεται βάρος της κορυφής ή της ακμής. Είναι δυνατόν μία από τις $\mathbf{f}$ και $\mathbf{g}$ να μην ορίζεται οπότε το δίκτυο είναι μια διατεταγμένη τριάδα $(\mathbf{X}, \mathbf{U}, \mathbf{f})$ ή $(\mathbf{X}, \mathbf{U}, \mathbf{g})$.

Παραδείγματα δικτύων για τα οποία θα πρέπει να ορισθούν οι συναρτήσεις $\mathbf{f}$ ή/και $\mathbf{g}$;

Ορισμοί και Ιδιότητες

Παράδειγμα:



Παραδείγματα δικτύων για τα οποία θα πρέπει να ορισθούν οι συναρτήσεις **f** ή/και **g** ;

Ορισμοί και Ιδιότητες

Ορισμός

Έστω $\mathbf{G} = (\mathbf{X}, \mathbf{U})$ ένα κατευθυνόμενο γράφημα και $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{X}$ δύο κορυφές. Ένα μονοπάτι (path) από το $\mathbf{x}$ στο $\mathbf{y}$ είναι μια ακολουθία ακμών $\mathbf{u_0, u_1, u_2, \ldots, u_k}$ του $\mathbf{U}$ για την οποία ισχύει ότι, $\mathbf{I(u_0) = x}$, $\mathbf{T(u_k) = y}$ και $\mathbf{I(u_i) = T(u_{i-1})}$ για κάθε $\mathbf{1 \le i \le k}$.

Όταν το γράφημα είναι μη κατευθυνόμενο τότε μερικοί συγγραφείς ονομάζουν το μονοπάτι αλυσίδα.

Ορισμοί και Ιδιότητες

Ορισμοί

Έστω $\mathbf{G} = (\mathbf{X}, \mathbf{U})$ ένα κατευθυνόμενο γράφημα και $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{X}$ δύο κορυφές. Ένα μονοπάτι από το $\mathbf{x}$ στο $\mathbf{y}$ ονομάζεται:

Ορισμοί και Ιδιότητες

Ορισμοί

Έστω $\mathbf{G} = (\mathbf{X}, \mathbf{U})$ ένα κατευθυνόμενο γράφημα και $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{X}$ δύο κορυφές. Ένα μονοπάτι από το $\mathbf{x}$ στο $\mathbf{y}$ ονομάζεται:

– **απλό**, αν δεν περιέχει δύο φορές την ίδια ακμή

Ορισμοί και Ιδιότητες

Ορισμοί

Έστω $\mathbf{G} = (\mathbf{X}, \mathbf{U})$ ένα κατευθυνόμενο γράφημα και $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{X}$ δύο κορυφές. Ένα μονοπάτι από το $\mathbf{x}$ στο $\mathbf{y}$ ονομάζεται:

– **απλό**, αν δεν περιέχει δύο φορές την ίδια ακμή

– **στοιχειώδες**, αν δεν περιέχει δύο φορές την ίδια κορυφή

Ορισμοί και Ιδιότητες

Ορισμοί

Έστω $\mathbf{G} = (\mathbf{X}, \mathbf{U})$ ένα κατευθυνόμενο γράφημα και $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{X}$ δύο κορυφές. Ένα μονοπάτι από το $\mathbf{x}$ στο $\mathbf{y}$ ονομάζεται:

- **απλό**, αν δεν περιέχει δύο φορές την ίδια ακμή
- **στοιχειώδες**, αν δεν περιέχει δύο φορές την ίδια κορυφή
- **κύκλωμα**, όταν το $\mathbf{x}$ συμπίπτει με το $\mathbf{y}$

Ορισμοί και Ιδιότητες

Ορισμοί

Έστω $\mathbf{G} = (\mathbf{X}, \mathbf{U})$ ένα κατευθυνόμενο γράφημα και $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{X}$ δύο κορυφές. Ένα μονοπάτι από το $\mathbf{x}$ στο $\mathbf{y}$ ονομάζεται:

– **απλό**, αν δεν περιέχει δύο φορές την ίδια ακμή

– **στοιχειώδες**, αν δεν περιέχει δύο φορές την ίδια κορυφή

– **κύκλωμα**, όταν το $\mathbf{x}$ συμπίπτει με το $\mathbf{y}$

Αντίστοιχοι είναι οι ορισμοί και στην περίπτωση που το γράφημα είναι μη κατευθυνόμενο.

Ορισμοί και Ιδιότητες

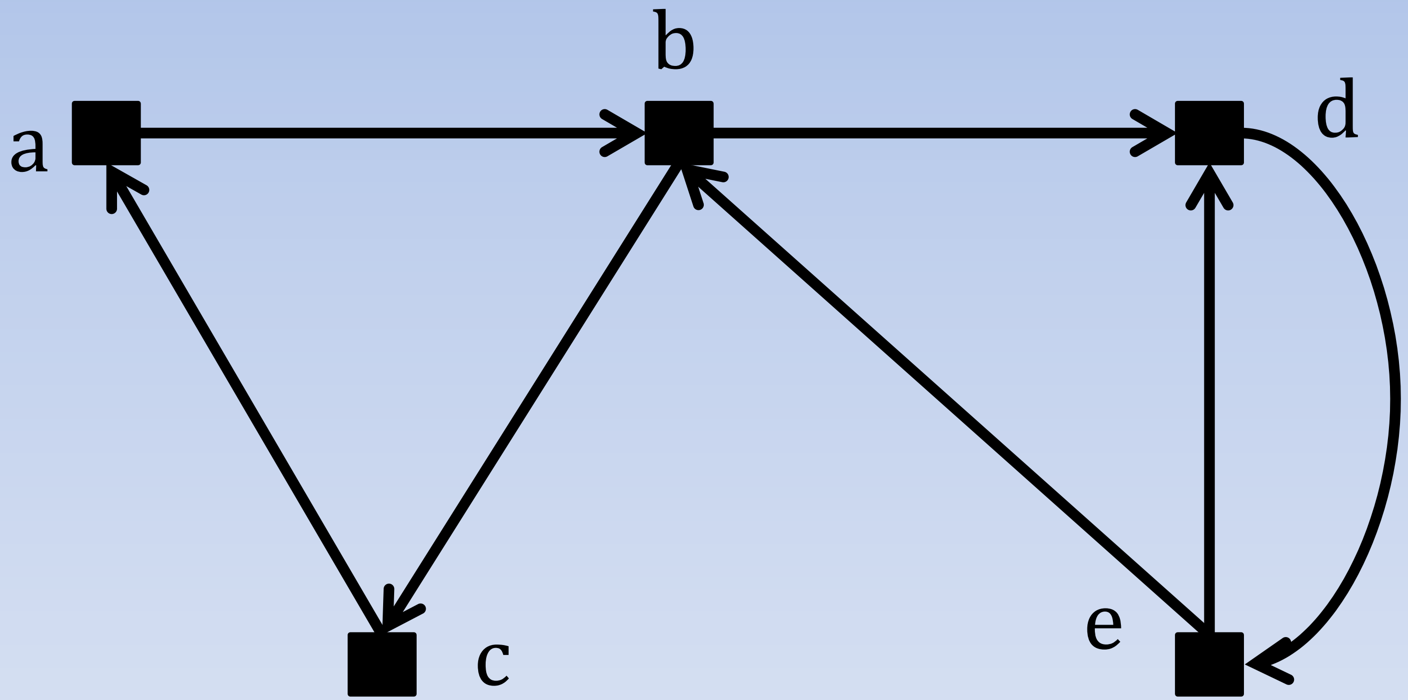
Σημείωση:

Στη βιβλιογραφία μερικές φορές ένα κύκλωμα ονομάζεται κύκλος για την περίπτωση ενός μη κατευθυνόμενου γραφήματος.

Επί πλέον, να σημειωθεί ότι στη βιβλιογραφία συναντάμε τον όρο απλό γράφημα αντί για στοιχειώδες ενώ αυτό που ονομάστηκε προηγουμένως απλό χαρακτηρίζεται ως trail το οποίο μεταφράζεται είτε ως ίχνος είτε ως μονοπάτι.

Ορισμοί και Ιδιότητες

Παράδειγμα:



Ορισμοί και Ιδιότητες

Ερωτήσεις - Ασκήσεις

Έστω $\mathbf{G} = (\mathbf{X}, \mathbf{U})$ ένα κατευθυνόμενο γράφημα και $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{X}$ δύο κορυφές.

- Ένα μονοπάτι απλό, είναι στοιχειώδες;
- Ένα μονοπάτι στοιχειώδες είναι απλό;
- Πώς μπορούμε να ορίσουμε ένα απλό κύκλωμα;
- Πώς μπορούμε να ορίσουμε ένα στοιχειώδες κύκλωμα;

Δικαιολογείστε τις απαντήσεις σας.

Δώστε παραδείγματα για όλες τις περιπτώσεις μονοπατιών και κυκλωμάτων που ορίστηκαν.

Συνεκτικότητα και Ιδιότητες

Ορισμός - Ισχυρή Συνεκτικότητα

Έστω $\mathbf{G} = (\mathbf{X}, \mathbf{U})$ ένα κατευθυνόμενο γράφημα. Η ισχυρή συνεκτικότητα είναι μια διμελής σχέση επί του $\mathbf{X}$ που συμβολίζεται με $\hat{\mathbf{C}}$ και ορίζεται ως εξής:

Συνεκτικότητα και Ιδιότητες

Ορισμός - Ισχυρή Συνεκτικότητα

Έστω $\mathbf{G} = (\mathbf{X}, \mathbf{U})$ ένα κατευθυνόμενο γράφημα. Η ισχυρή συνεκτικότητα είναι μια διμελής σχέση επί του $\mathbf{X}$ που συμβολίζεται με $\hat{\mathbf{C}}$ και ορίζεται ως εξής:

δύο κορυφές $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{X}$, δίνουν ένα ζεύγος $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ το οποίο ανήκει στη σχέση $\hat{\mathbf{C}}$ και γράφουμε $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \hat{\mathbf{C}}$ ή $\mathbf{x}\,\hat{\mathbf{C}}\,\mathbf{y}$ τότε και μόνον τότε αν,

- είτε $\mathbf{x} = \mathbf{y}$,
- είτε υπάρχει στο $\mathbf{G}$ ένα μονοπάτι από το $\mathbf{x}$ στο $\mathbf{y}$ και ένα μονοπάτι από το $\mathbf{y}$ στο $\mathbf{x}$.

Συνεκτικότητα και Ιδιότητες

Ισχυρή Συνεκτικότητα (συνέχεια)

Η σχέση $\hat{\mathbf{C}}$ όπως ορίστηκε προηγουμένως για το γράφημα $\mathbf{G} = (\mathbf{X}, \mathbf{U})$ είναι μια σχέση ισοδυναμίας επί του $\mathbf{X}$.

Οι κλάσεις ισοδυναμίας της οποίας ονομάζονται ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες του γραφήματος $\mathbf{G}$.

Άσκηση

Να αποδείξετε ότι η σχέση $\hat{\mathbf{C}}$ για ένα γράφημα $\mathbf{G} = (\mathbf{X}, \mathbf{U})$ ικανοποιεί όλες τις ιδιότητες μιας σχέσης ισοδυναμίας.

Συνεκτικότητα και Ιδιότητες

Ορισμός

Ας θεωρήσουμε ένα κατευθυνόμενο γράφημα $\mathbf{G} = (\mathbf{X}, \mathbf{U})$ και τη σχέση ισοδυναμίας ισχυρή συνεκτικότητα $\hat{\mathbf{C}}$ επί του $\mathbf{X}$ όπως ορίστηκε προηγουμένως. Αν οι κλάσεις ισοδυναμίας είναι οι $X_1, X_2, \ldots, X_{\mathrm{m}}$ ορίζουμε το σύνολο $\mathcal{X} = \{X_1, X_2, \ldots, X_{\mathrm{m}}\}$ όπως επίσης και το σύνολο $\mathcal{U}$ που αποτελείται από ζεύγη της μορφής $u = (X_{\mathrm{i}}, X_{\mathrm{j}})$ αν και μόνον αν υπάρχει μια ακμή $\mathbf{u}=(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbf{U}$ για κάποιο $\mathbf{x} \in X_{\mathrm{i}}$ και $\mathbf{y} \in X_{\mathrm{j}}$. Τότε το ζεύγος $\mathcal{G} = (\mathcal{X}, \mathcal{U})$ ονομάζεται απλοποιημένο γράφημα του γραφήματος $\mathbf{G} = (\mathbf{X}, \mathbf{U})$.

Ερώτημα

Πως κατασκευάζεται (υπολογίζεται) το απλοποιημένο γράφημα και σε τι χρησιμεύει;

Ισχυρή Συνεκτικότητα

Αλγόριθμος υπολογισμού της ισχυρά συνεκτικής συνιστώσας στην οποία ανήκει μια κορυφή ενός κατευθυνόμενου γραφήματος

Έστω $\mathbf{G} = (\mathbf{X}, \mathbf{U})$ ένα κατευθυνόμενο γράφημα και $\mathbf{a} \in \mathbf{X}$ μια κορυφή. Ζητείται να προσδιορισθεί η ισχυρά συνεκτική συνιστώσα στην οποία ανήκει το $\mathbf{a}$.

Λογική κατασκευής του αλγορίθμου

Ο αλγόριθμος ξεκινά από την κορυφή **a** και επιλέγει τυχαία μια εξερχόμενη ακμή. Σε κάθε κορυφή που «φθάνει» ακολουθώντας τις ακμές την σημαδεύει ώστε να μην την επιλέξει εκ νέου.

Όταν εξαντληθούν οι ακμές στις οποίες μπορεί να φθάσει ξεκινώντας από την κορυφή **a** ακολουθεί την αντίστροφη πορεία δηλαδή από ποιές κορυφές μπορεί να φθάσει ο αλγόριθμος στην κορυφή **a.**

Ο αλγόριθμος συνοψίζεται στη συνέχεια.

Ισχυρή Συνεκτικότητα Αλγόριθμος

Βήμα (0) : Αρχικοποίηση. Στην κορυφή **a** δίνονται τα σήματα **+** και **–**
Συνέχεια στο **Βήμα (1)**

Ισχυρή Συνεκτικότητα Αλγόριθμος

Βήμα $(\mathbf{0})$: Αρχικοποίηση. Στην κορυφή **a** δίνονται τα σήματα **+** και **–** Συνέχεια στο **Βήμα** $(\mathbf{1})$

Βήμα $(\mathbf{1})$ **:** Αν υπάρχει ακμή $\mathbf{u=(\ x,\ \ y\ )\in U}$ όπου $\mathbf{x}$ έχει το σήμα **+** και $\mathbf{y}$ δεν έχει το σήμα **+**, τότε συνέχεια στο **Βήμα** $(\mathbf{2})$, αλλιώς συνέχεια στο **Βήμα** $(\mathbf{3})$

Ισχυρή Συνεκτικότητα Αλγόριθμος

Βήμα (0) : Αρχικοποίηση. Στην κορυφή **a** δίνονται τα σήματα **+** και **–** Συνέχεια στο **Βήμα (1)**

Βήμα (1) : Αν υπάρχει ακμή $\mathbf{u=(\ x,\ \ y\ )\in U}$ όπου $\mathbf{x}$ έχει το σήμα **+** και $\mathbf{y}$ δεν έχει το σήμα **+**, τότε συνέχεια στο **Βήμα (2)**, αλλιώς συνέχεια στο **Βήμα (3)**

Βήμα (2) : Δίνεται στο $\mathbf{y}$ το σήμα **+**. Συνέχεια στο **Βήμα (1)**

Ισχυρή Συνεκτικότητα Αλγόριθμος

Βήμα (0) : Αρχικοποίηση. Στην κορυφή **a** δίνονται τα σήματα **+** και **–** Συνέχεια στο **Βήμα (1)**

Βήμα (1) : Αν υπάρχει ακμή $\mathbf{u=(\ x,\ \ y\ )\in U}$ όπου $\mathbf{x}$ έχει το σήμα **+** και $\mathbf{y}$ δεν έχει το σήμα **+**, τότε συνέχεια στο **Βήμα (2)**, αλλιώς συνέχεια στο **Βήμα (3)**

Βήμα (2) : Δίνεται στο $\mathbf{y}$ το σήμα **+**. Συνέχεια στο **Βήμα (1)**

Βήμα (3) : Αν υπάρχει ακμή $\mathbf{u=(\ x,\ \ y\ )\in U}$ όπου $\mathbf{y}$ έχει το σήμα **–** και $\mathbf{x}$ δεν έχει το σήμα **–**, τότε συνέχεια στο **Βήμα (4)**, αλλιώς συνέχεια στο **Βήμα (5)**

Ισχυρή Συνεκτικότητα Αλγόριθμος

Βήμα (0) : Αρχικοποίηση. Στην κορυφή **a** δίνονται τα σήματα **+** και **–** Συνέχεια στο **Βήμα (1)**

Βήμα (1) : Αν υπάρχει ακμή $\mathbf{u=(\,x,\ y\,)\in U}$ όπου **x** έχει το σήμα **+** και **y** δεν έχει το σήμα **+**, τότε συνέχεια στο **Βήμα (2)**, αλλιώς συνέχεια στο **Βήμα (3)**

Βήμα (2) : Δίνεται στο **y** το σήμα **+**. Συνέχεια στο **Βήμα (1)**

Βήμα (3) : Αν υπάρχει ακμή $\mathbf{u=(\,x,\ y\,)\in U}$ όπου **y** έχει το σήμα **–** και **x** δεν έχει το σήμα **–**, τότε συνέχεια στο **Βήμα (4)**, αλλιώς συνέχεια στο **Βήμα (5)**

Βήμα (4) : Δίνεται στο **x** το σήμα **–**. Συνέχεια στο **Βήμα (3)**

Ισχυρή Συνεκτικότητα Αλγόριθμος

Βήμα (0) : Αρχικοποίηση. Στην κορυφή **a** δίνονται τα σήματα **+** και **–** Συνέχεια στο **Βήμα (1)**

Βήμα (1) : Αν υπάρχει ακμή $\mathbf{u=(x, y) \in U}$ όπου **x** έχει το σήμα **+** και **y** δεν έχει το σήμα **+**, τότε συνέχεια στο **Βήμα (2)**, αλλιώς συνέχεια στο **Βήμα (3)**

Βήμα (2) : Δίνεται στο **y** το σήμα **+**. Συνέχεια στο **Βήμα (1)**

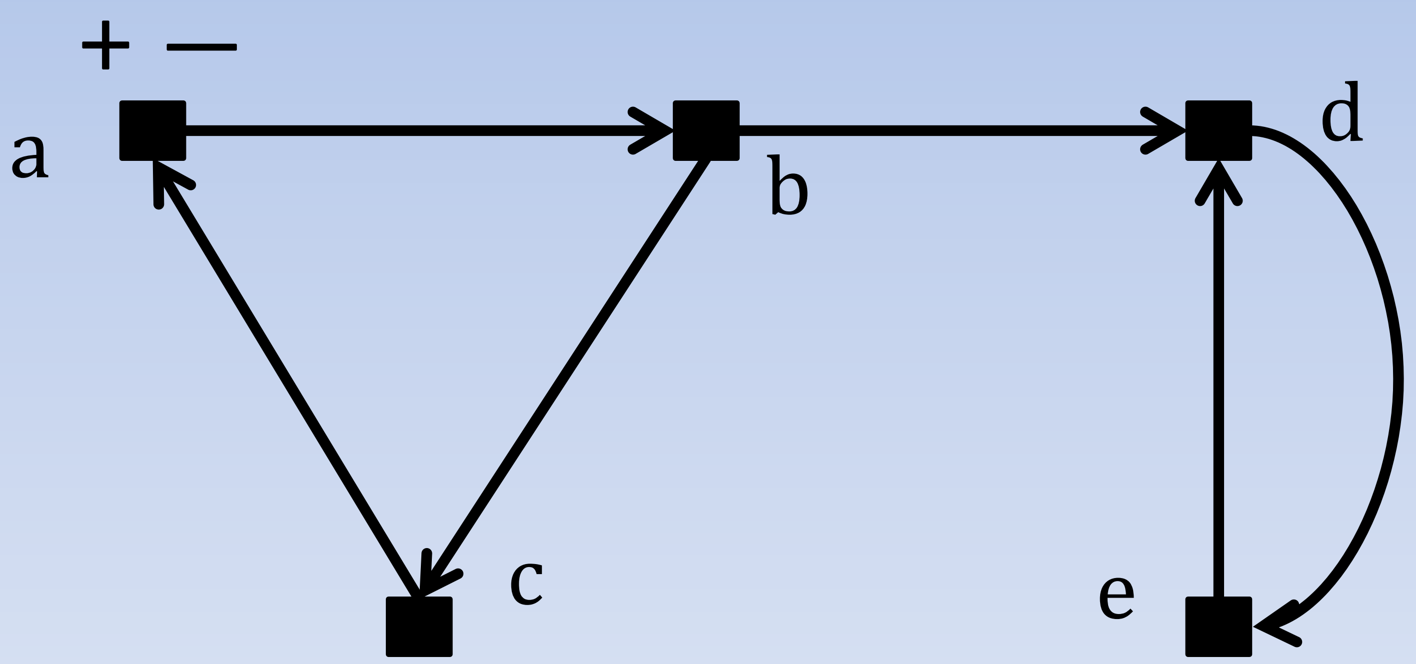
Βήμα (3) : Αν υπάρχει ακμή $\mathbf{u=(x, y) \in U}$ όπου **y** έχει το σήμα **–** και **x** δεν έχει το σήμα **–**, τότε συνέχεια στο **Βήμα (4)**, αλλιώς συνέχεια στο **Βήμα (5)**

Βήμα (4) : Δίνεται στο **x** το σήμα **–**. Συνέχεια στο **Βήμα (3)**

Βήμα (5) : Τέλος του αλγορίθμου. Οι κορυφές του γραφήματος που έχουν και τα δύο σημάδια **+** και **–** αποτελούν την ισχυρά συνεκτική συνιστώσα της κορυφής **a**

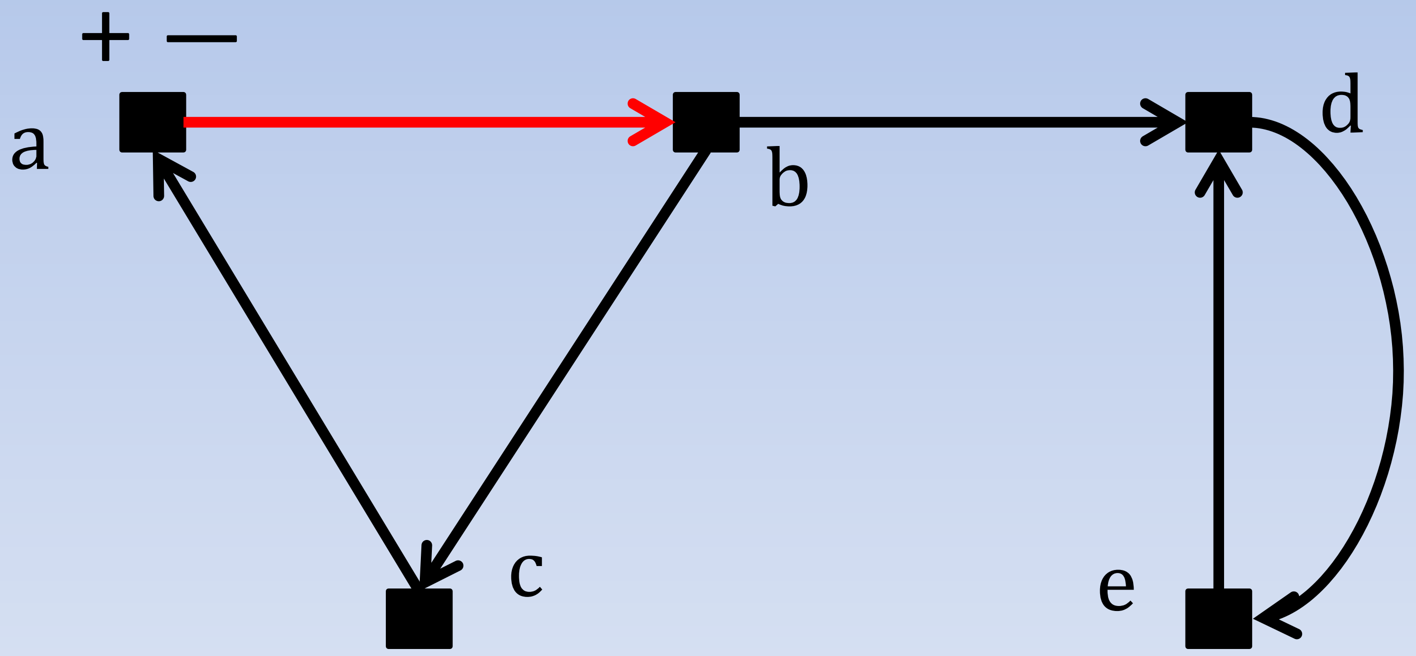
Ισχυρή Συνεκτικότητα Αλγόριθμος

Βήμα (0) : Αρχικοποίηση. Στην κορυφή **a** δίνονται τα σήματα **+** και **–**
Συνέχεια στο **Βήμα (1).**



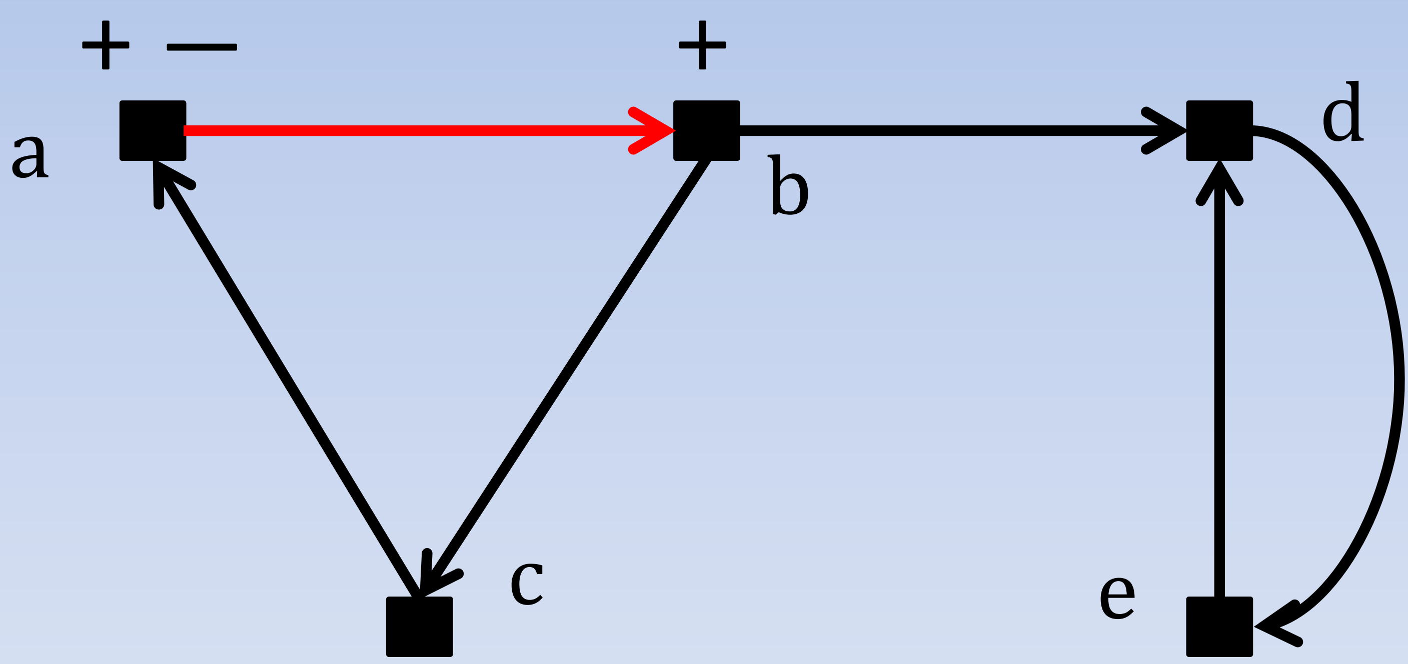
Ισχυρή Συνεκτικότητα Αλγόριθμος

Βήμα (1) : Επιλέγεται η ακμή **(a, b).** Συνέχεια στο **Βήμα (2)**



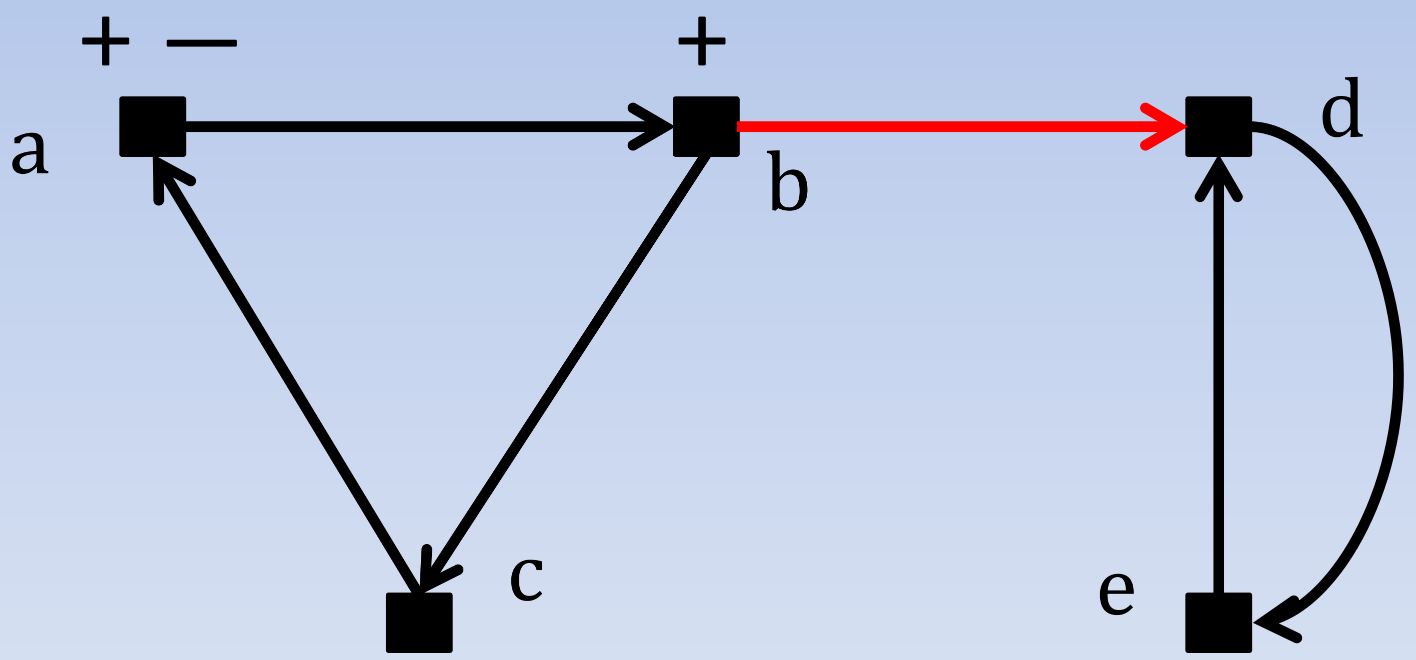
Ισχυρή Συνεκτικότητα Αλγόριθμος

Βήμα (2) : Στην κορυφή **b** δίνεται το σήμα **+** . Συνέχεια στο **Βήμα (1)**



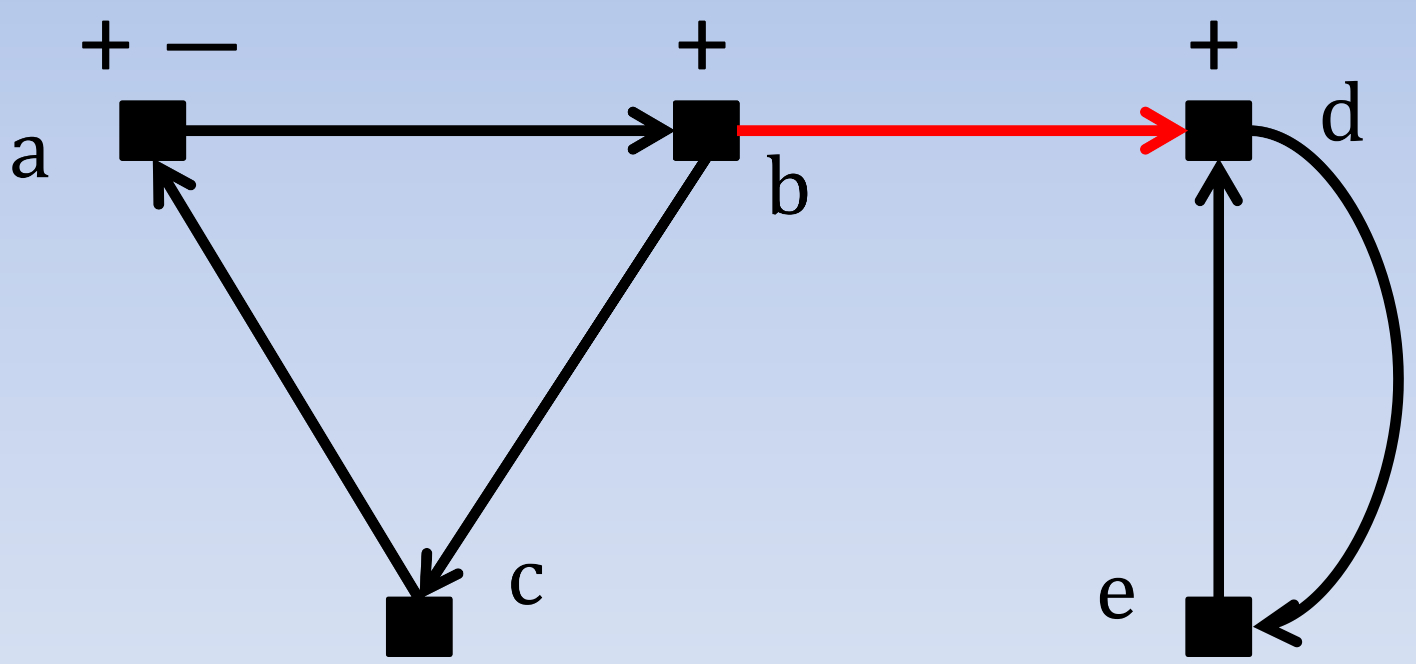
Ισχυρή Συνεκτικότητα Αλγόριθμος

Βήμα (1) : Επιλέγεται η ακμή **(b, d).** Συνέχεια στο **Βήμα (2)**



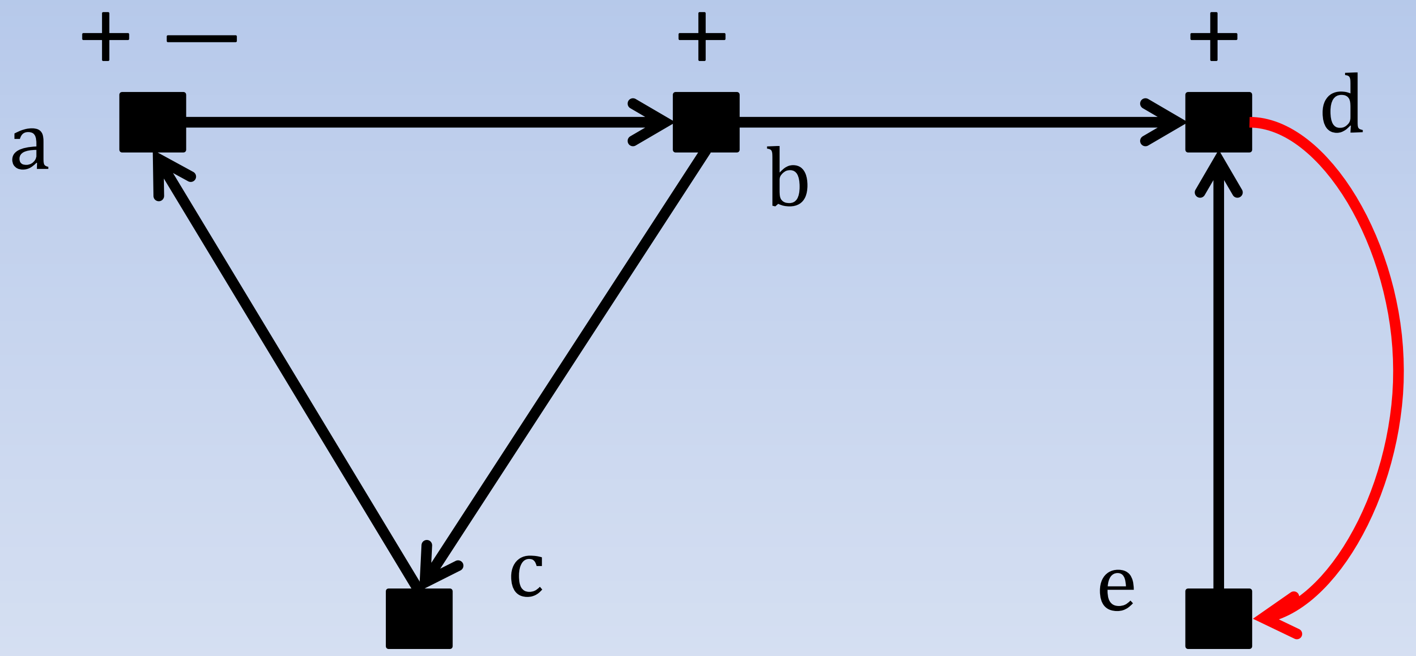
Ισχυρή Συνεκτικότητα Αλγόριθμος

Βήμα (2) : Στην κορυφή **d** δίνεται το σήμα **+** . Συνέχεια στο **Βήμα (1)**



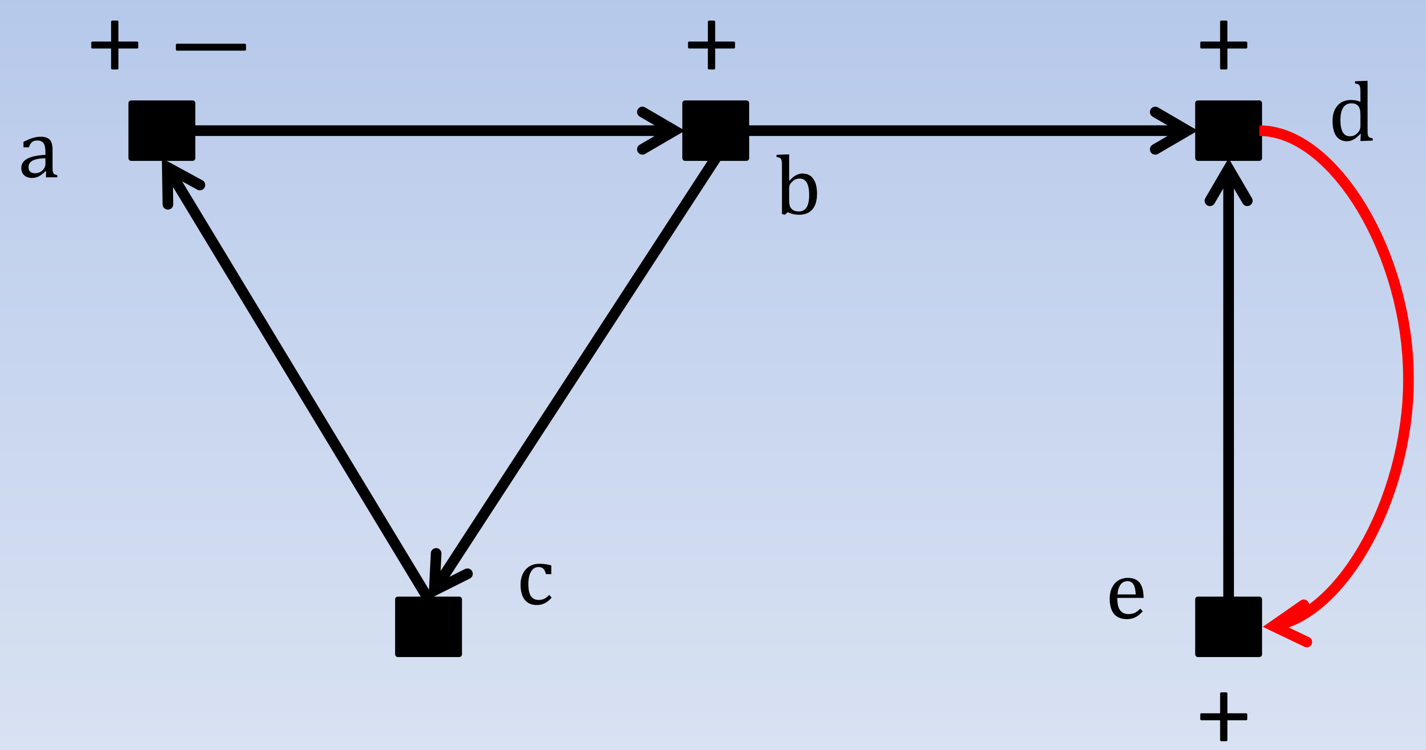
Ισχυρή Συνεκτικότητα Αλγόριθμος

Βήμα (1) : Επιλέγεται η ακμή **(d, e).** Συνέχεια στο **Βήμα (2)**



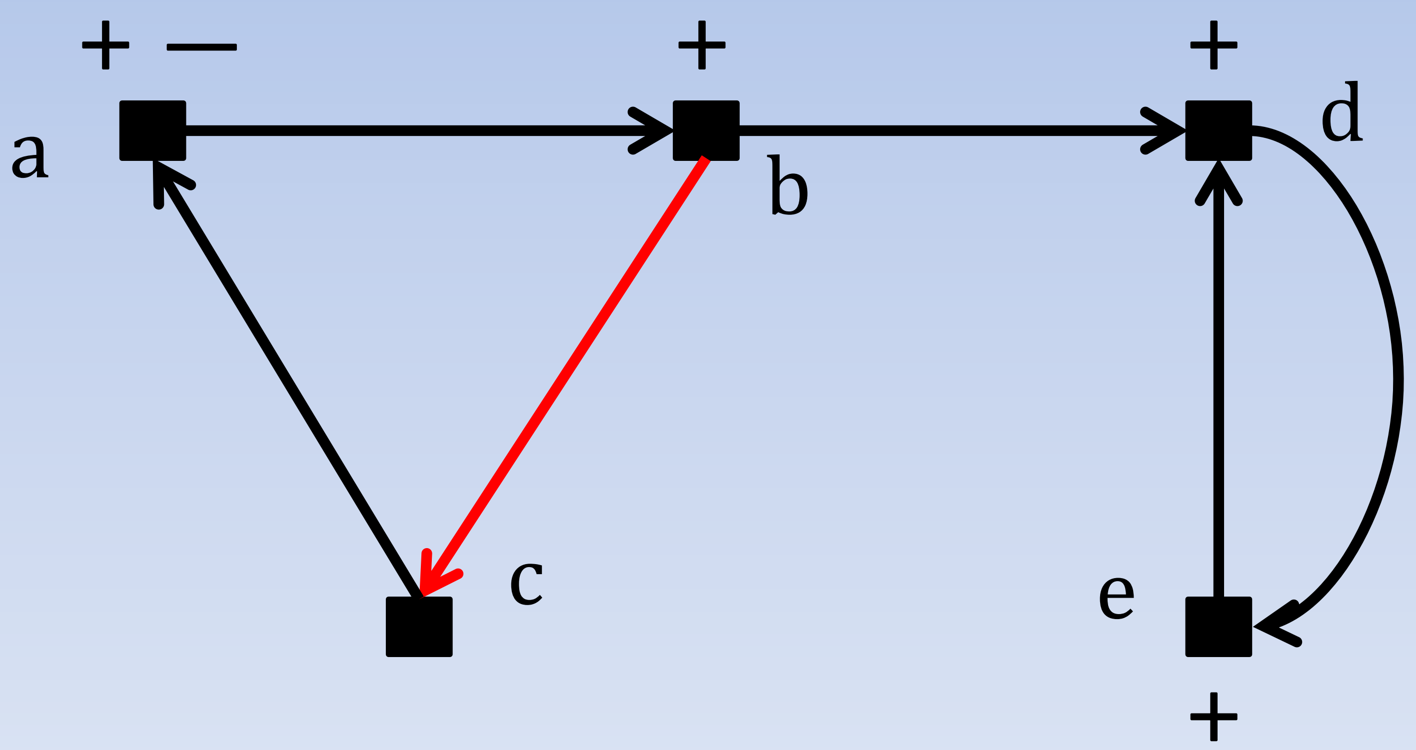
Ισχυρή Συνεκτικότητα Αλγόριθμος

Βήμα (2) : Στην κορυφή **e** δίνεται το σήμα **+** . Συνέχεια στο **Βήμα (1)**



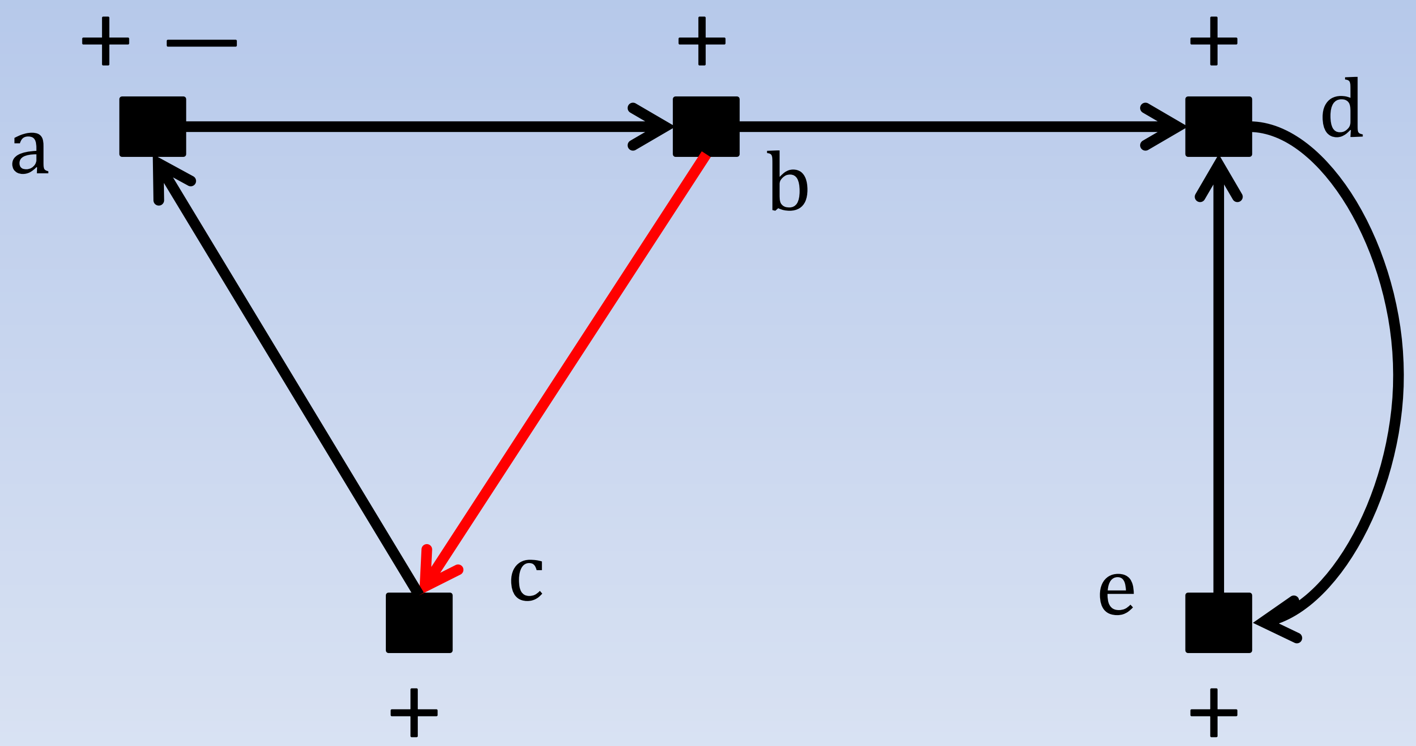
Ισχυρή Συνεκτικότητα Αλγόριθμος

Βήμα (1) : Επιλέγεται η ακμή **(b, c).** Συνέχεια στο **Βήμα (2)**



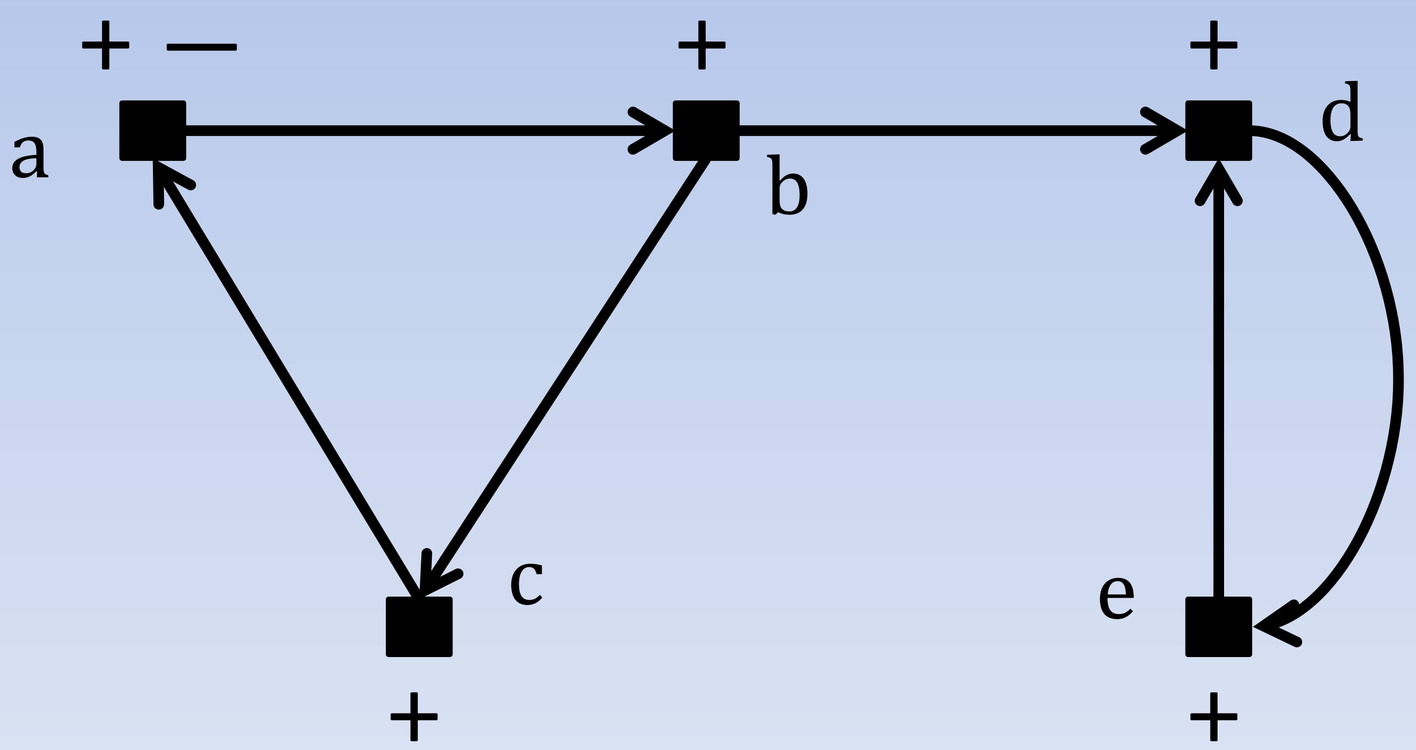
Ισχυρή Συνεκτικότητα Αλγόριθμος

Βήμα (2) : Στην κορυφή **c** δίνεται το σήμα **+** . Συνέχεια στο **Βήμα (1)**



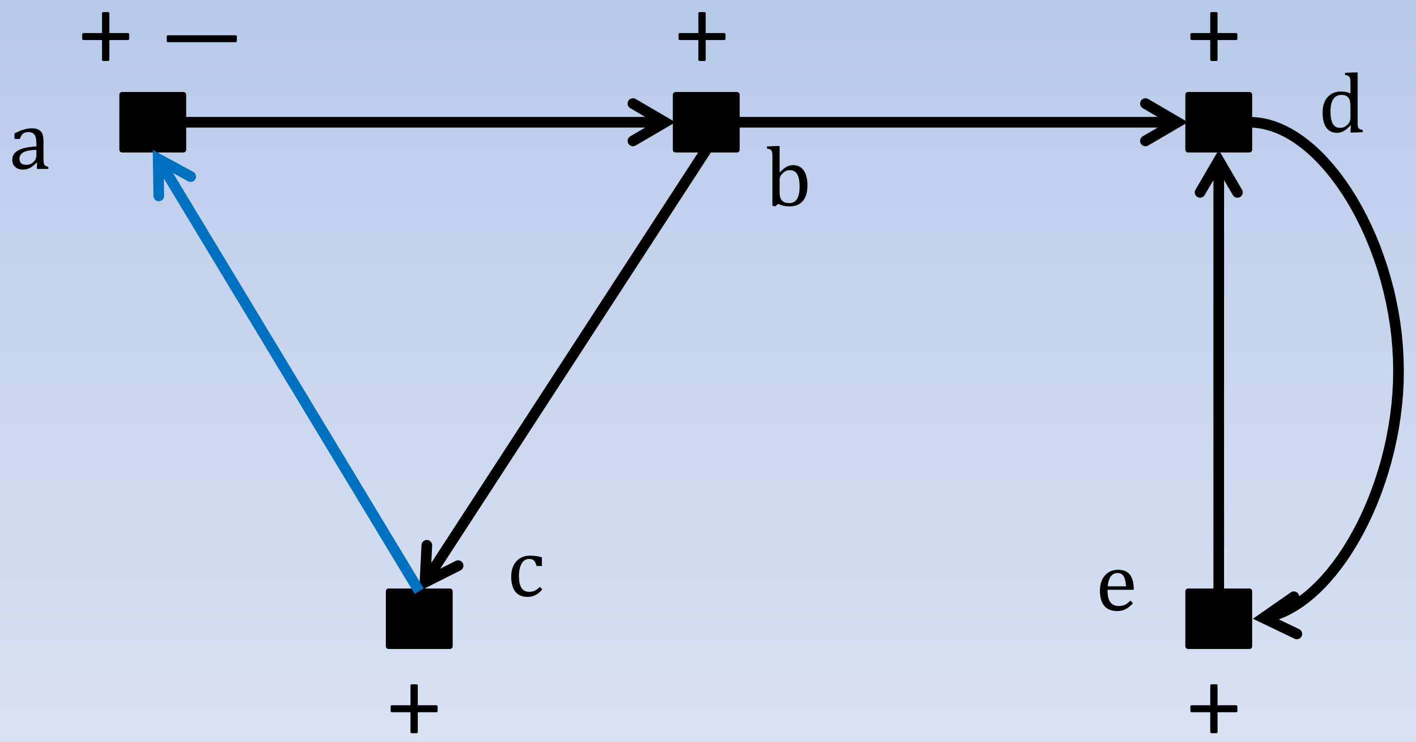
Ισχυρή Συνεκτικότητα Αλγόριθμος

Βήμα (1) : Η συνθήκη δεν ικανοποιείται. Συνέχεια στο **Βήμα (3)**



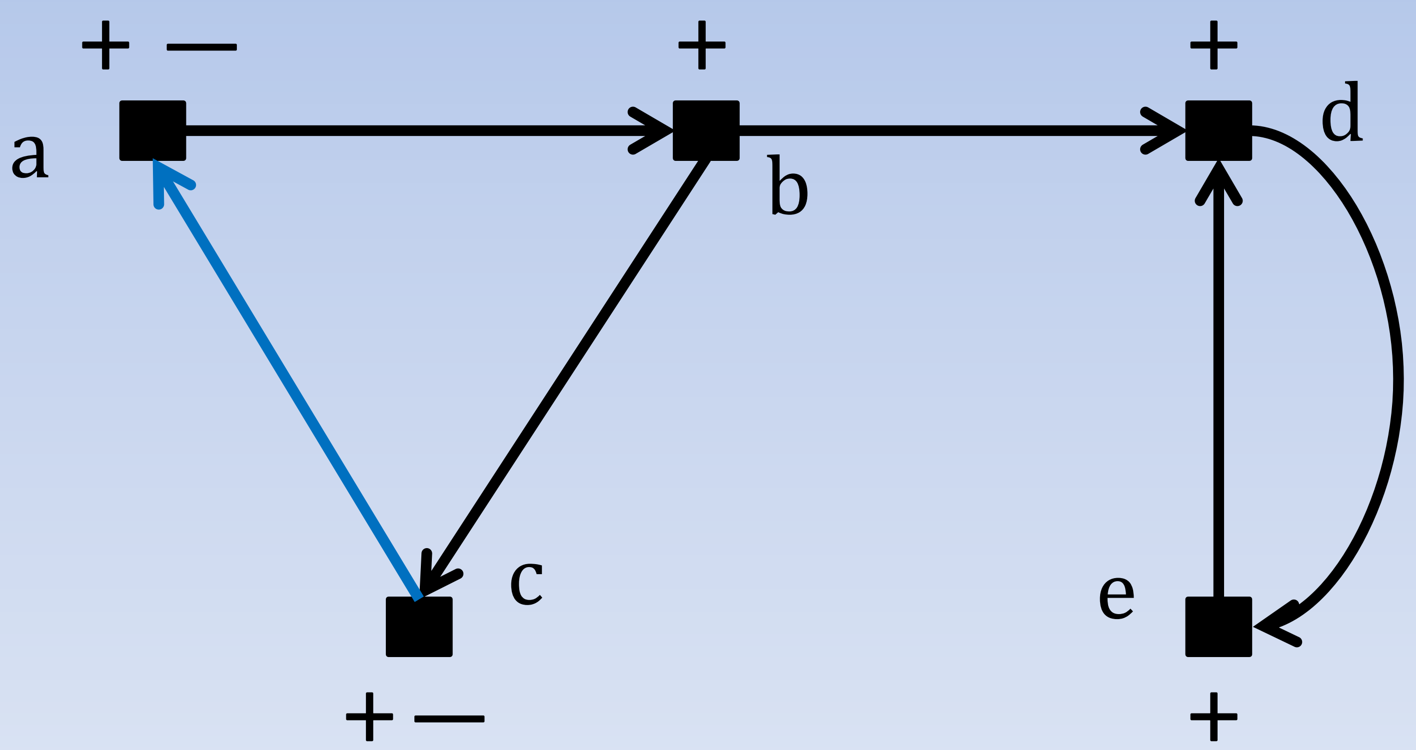
Ισχυρή Συνεκτικότητα Αλγόριθμος

Βήμα (3): Επιλέγεται η ακμή **(c, a).** Συνέχεια στο **Βήμα (4)**



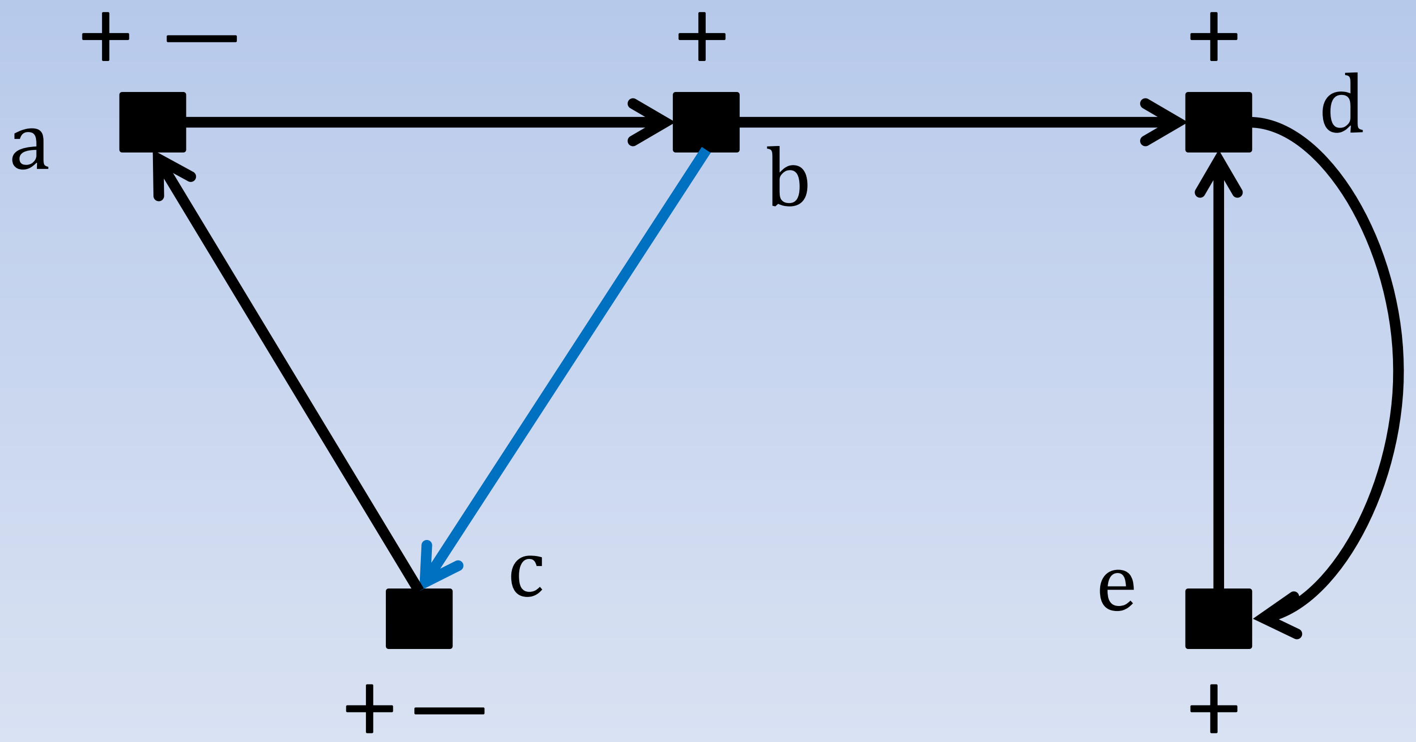
Ισχυρή Συνεκτικότητα Αλγόριθμος

Βήμα (4): Στην κορυφή **c** δίνεται το σήμα **– .** Συνέχεια στο **Βήμα (3)**



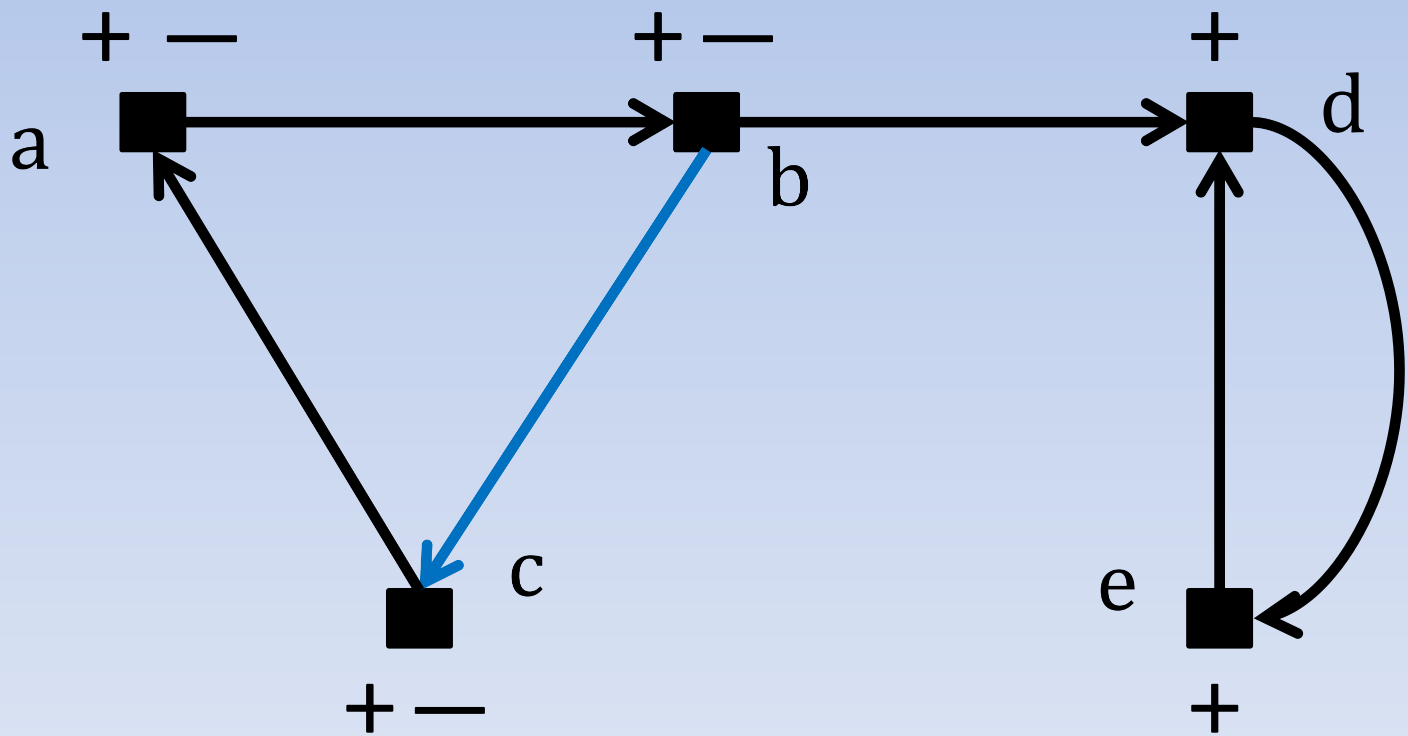
Ισχυρή Συνεκτικότητα Αλγόριθμος

Βήμα (3): Επιλέγεται η ακμή **(b, c).** Συνέχεια στο **Βήμα (4)**



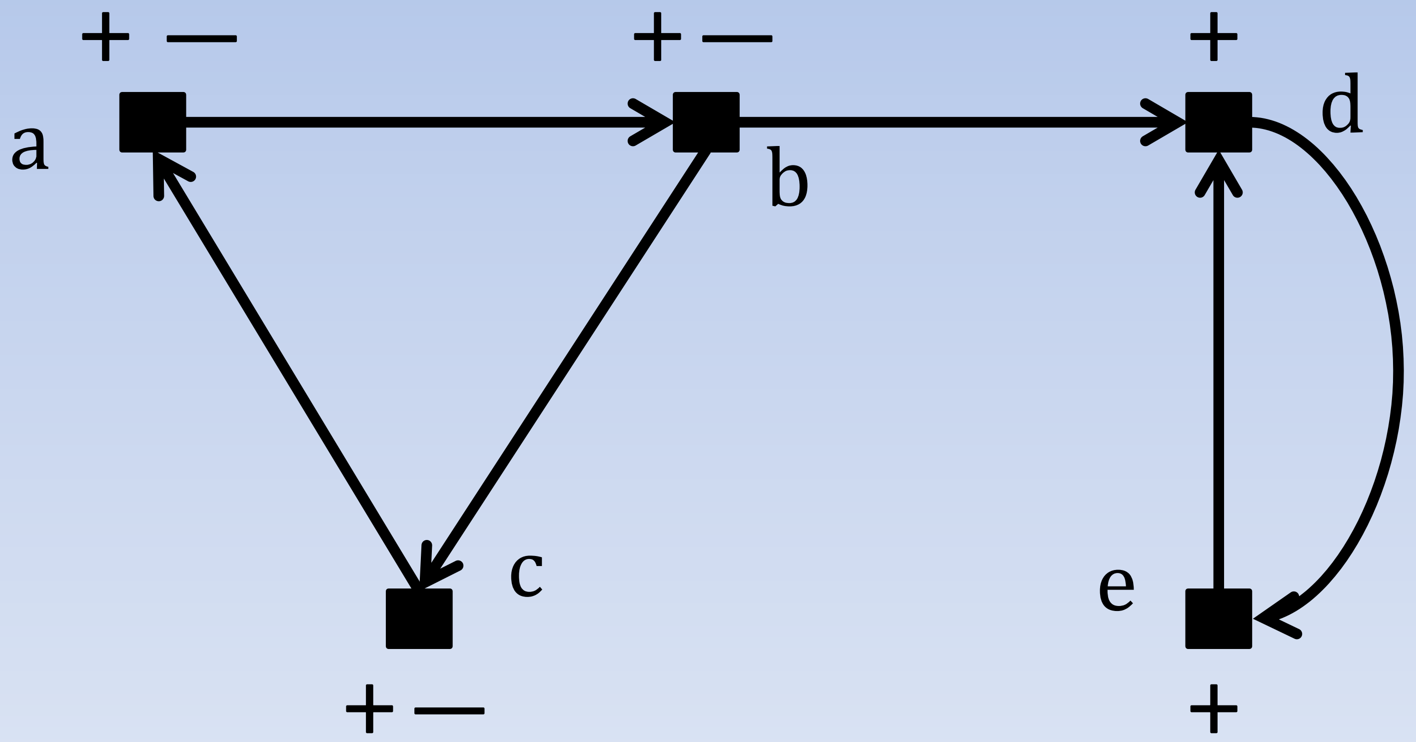
Ισχυρή Συνεκτικότητα Αλγόριθμος

Βήμα (4): Στην κορυφή **b** δίνεται το σήμα **– .** Συνέχεια στο **Βήμα (3)**



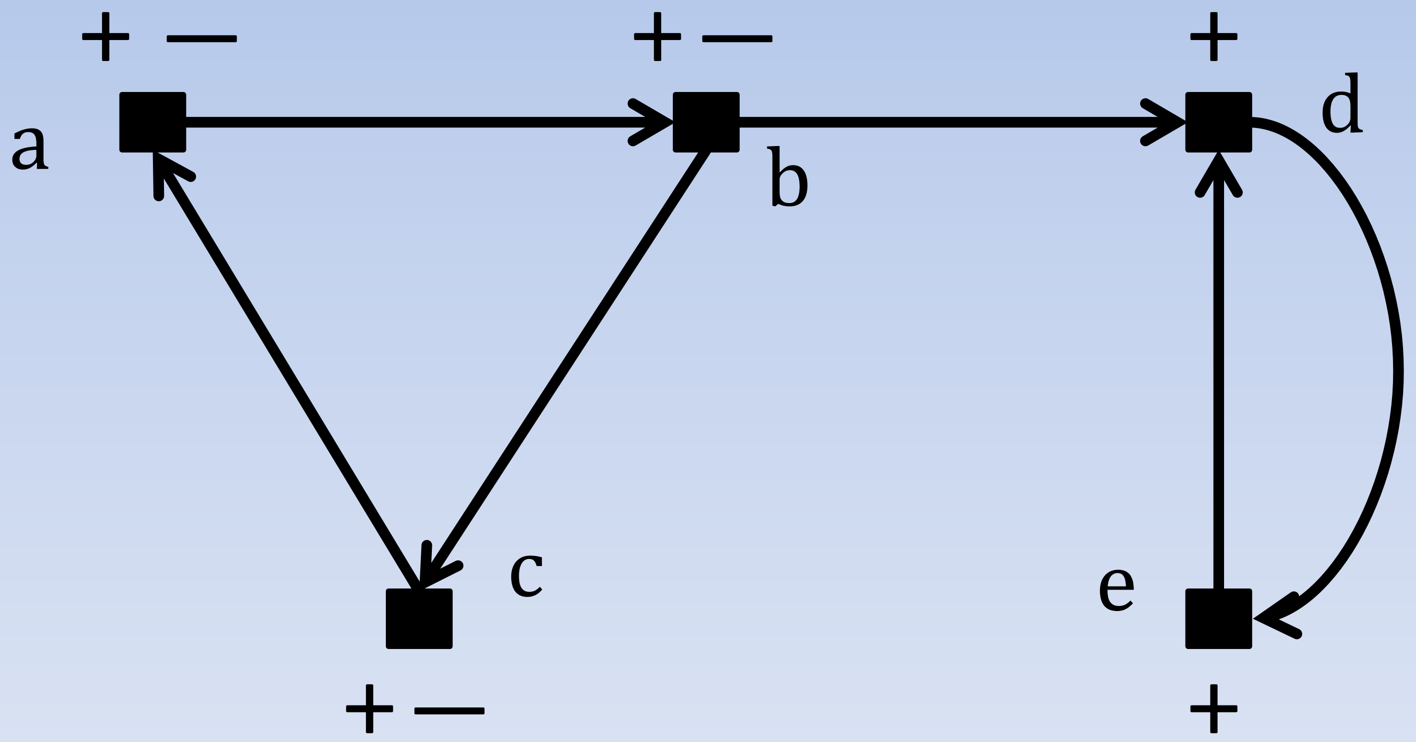
Ισχυρή Συνεκτικότητα Αλγόριθμος

Βήμα (3) : Η συνθήκη δεν ικανοποιείται. Συνέχεια στο **Βήμα (5)**



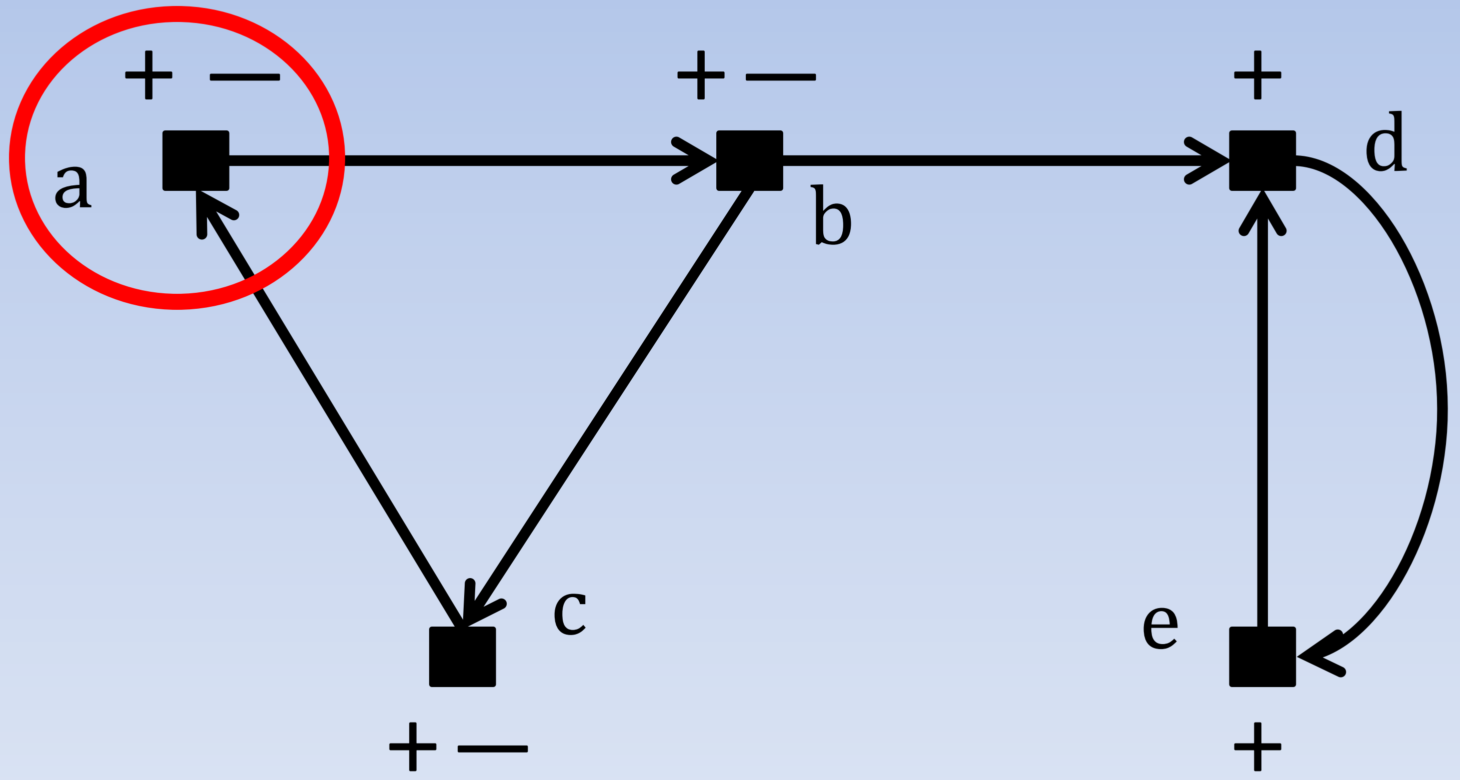
Ισχυρή Συνεκτικότητα Αλγόριθμος

Βήμα (5) : Τέλος αλγορίθμου.



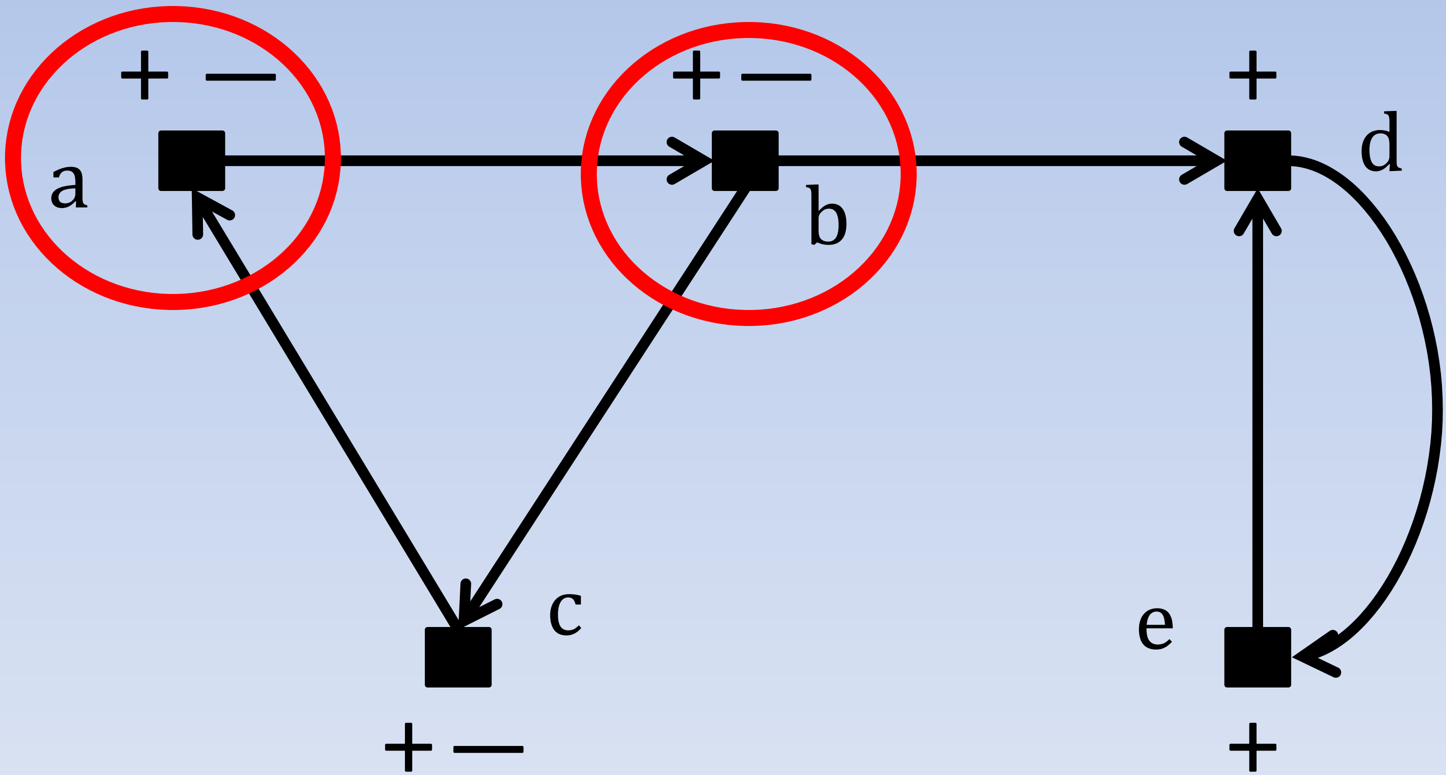
Ισχυρή Συνεκτικότητα Αλγόριθμος

Οι κορυφές που αποτελούν τη συνεκτική συνιστώσα της κορυφής **a**.



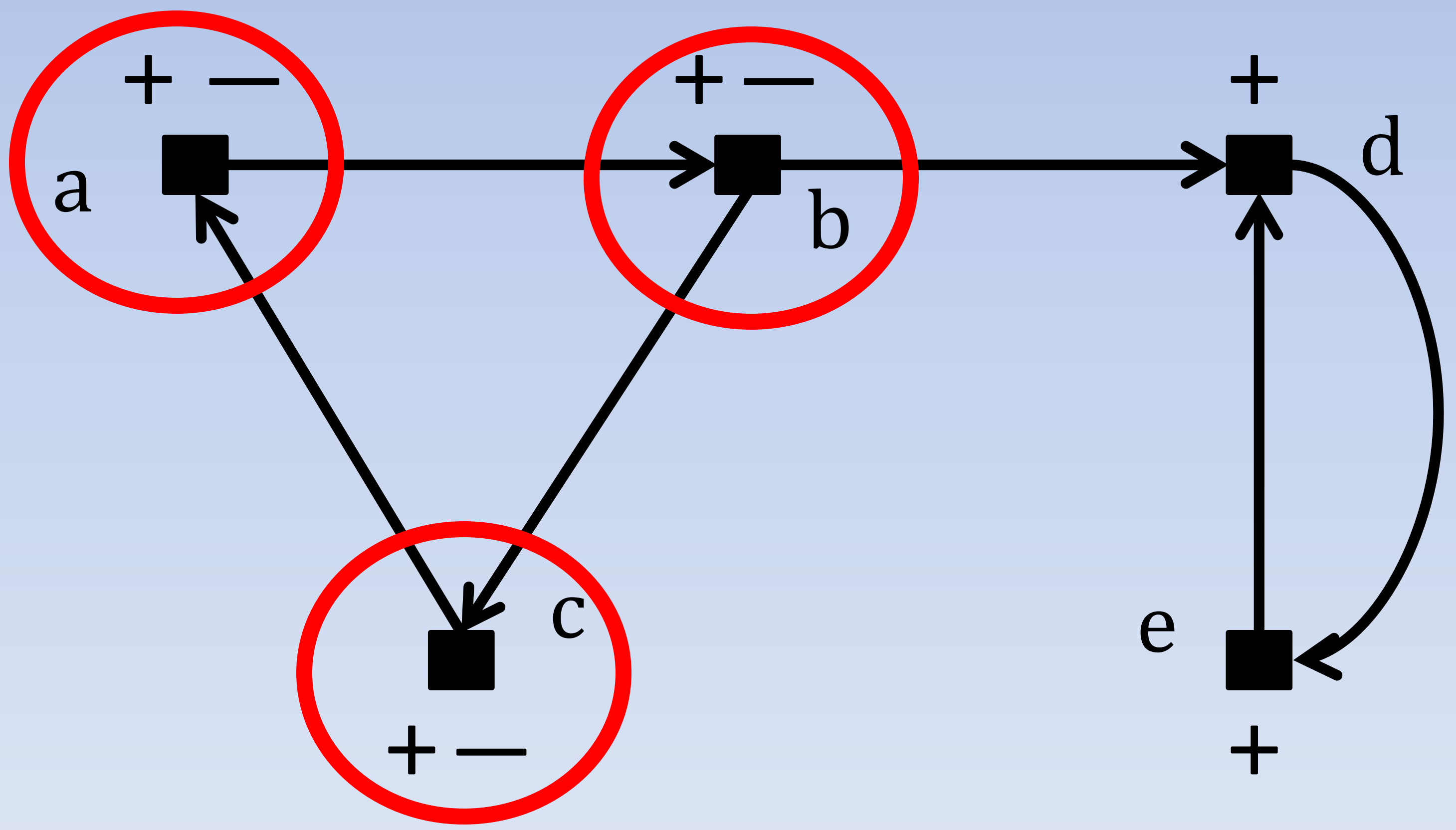
Ισχυρή Συνεκτικότητα Αλγόριθμος

Οι κορυφές που αποτελούν τη συνεκτική συνιστώσα της κορυφής **a**.



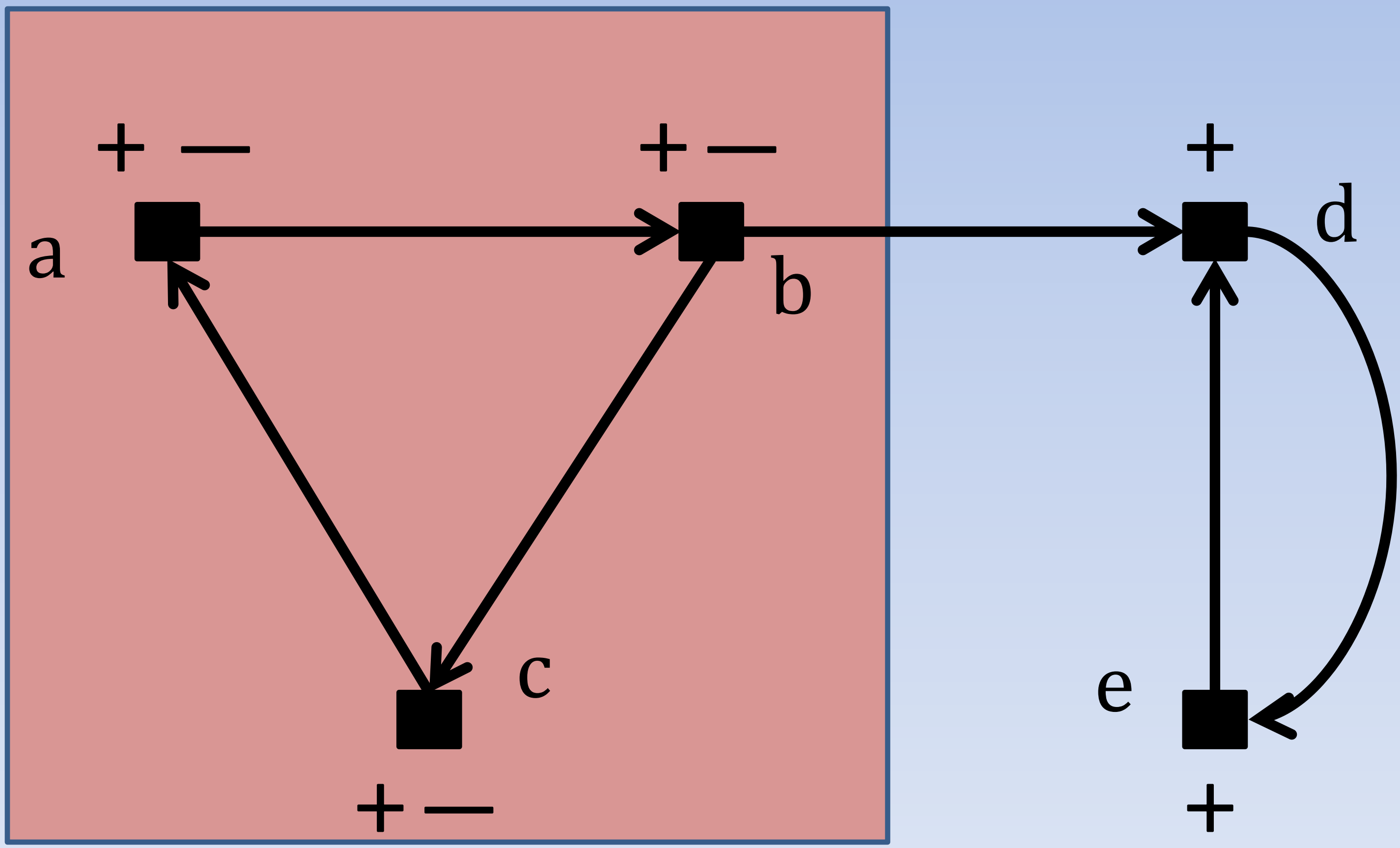
Ισχυρή Συνεκτικότητα Αλγόριθμος

Οι κορυφές που αποτελούν τη συνεκτική συνιστώσα της κορυφής **a**.



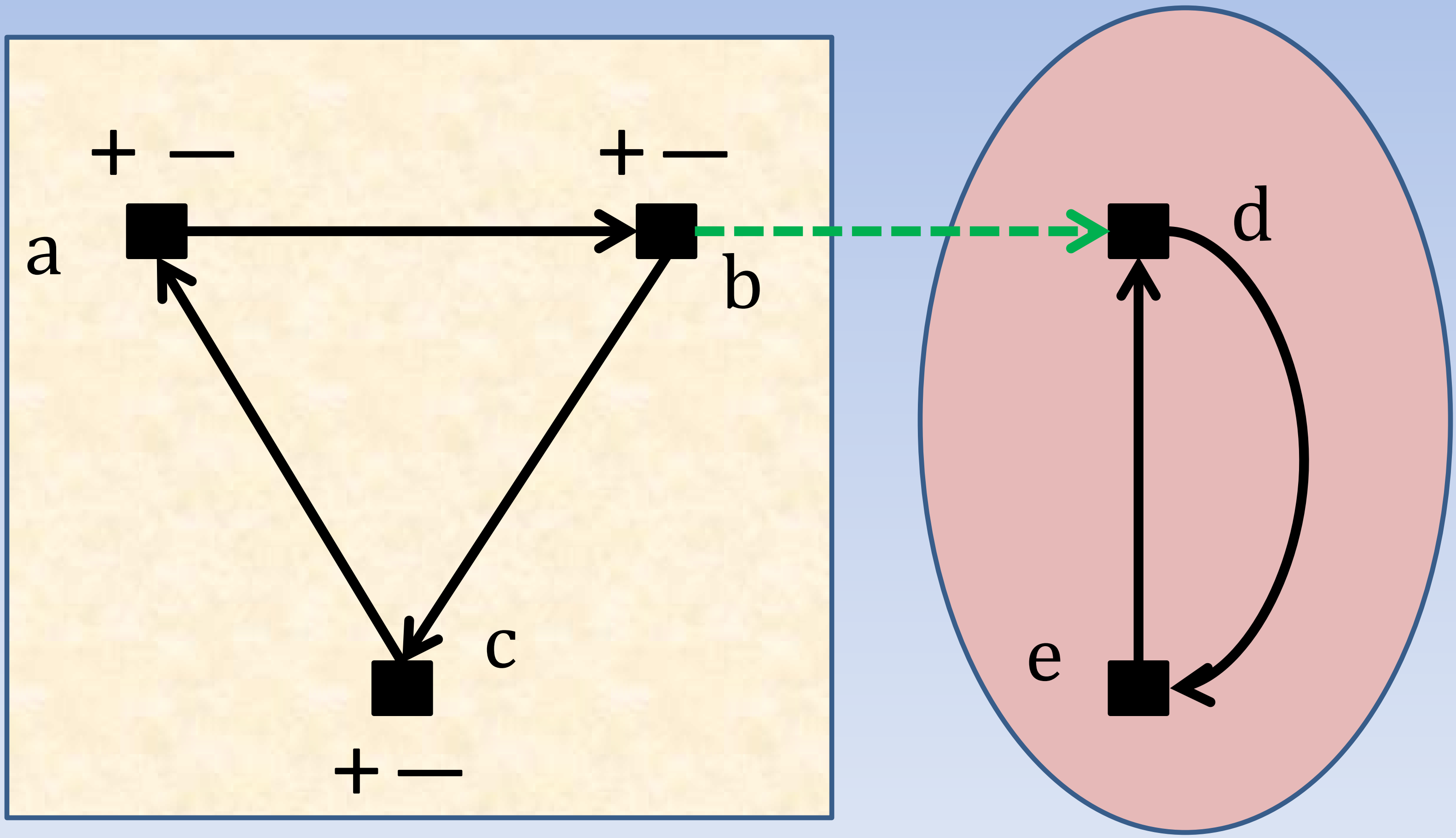
Γενίκευση του Αλγορίθμου

Θεωρούμε το υπογράφημα που ορίζουν οι κορυφές **{a, b, c}**.



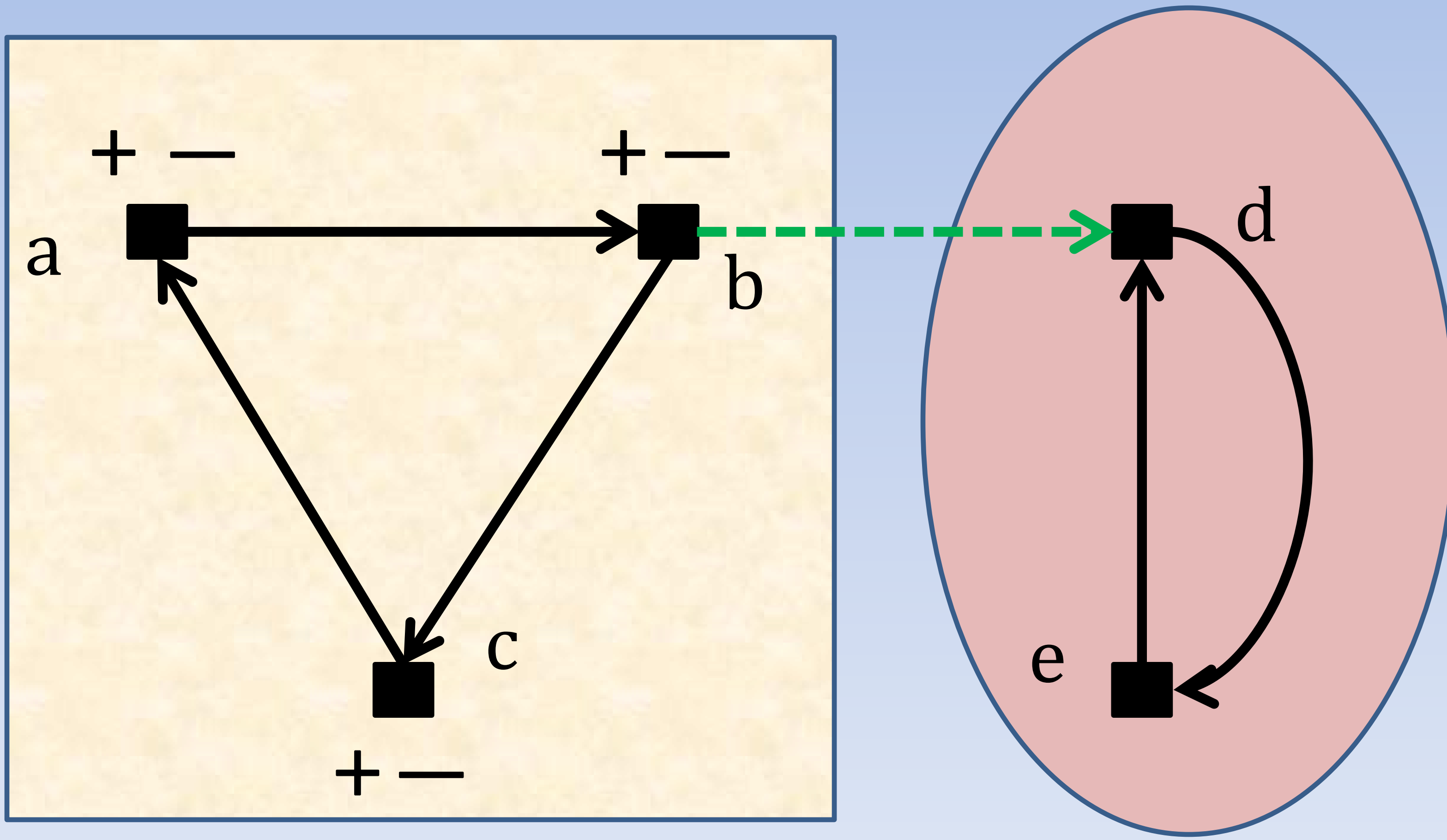
Γενίκευση του Αλγορίθμου

Θεωρούμε το υπογράφημα που ορίζουν οι κορυφές **{d, e}**.



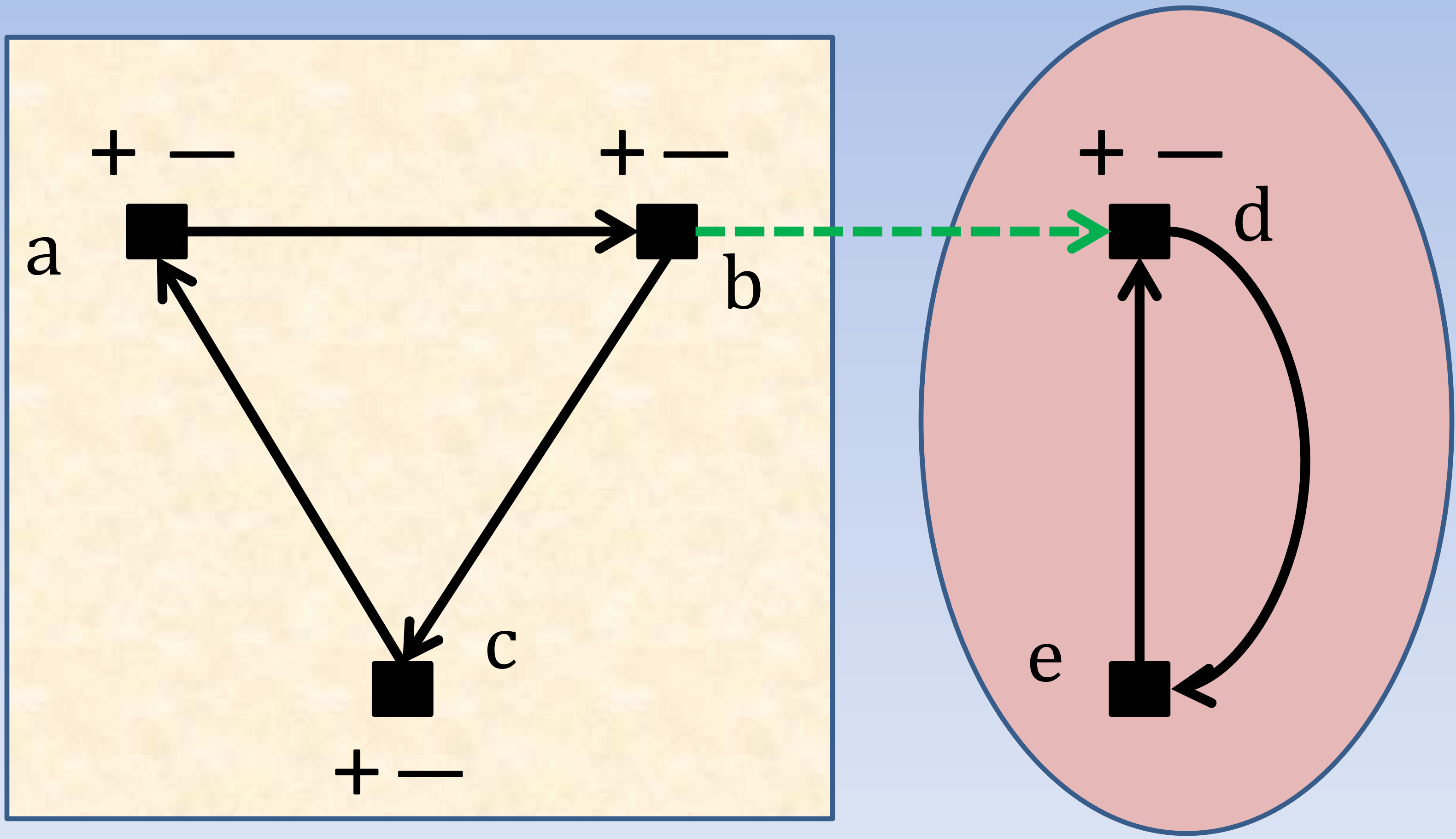
Γενίκευση του Αλγορίθμου

Επιλέγουμε τυχαία μια κορυφή και ξεκινάμε εκ νέου τον αλγόριθμο.



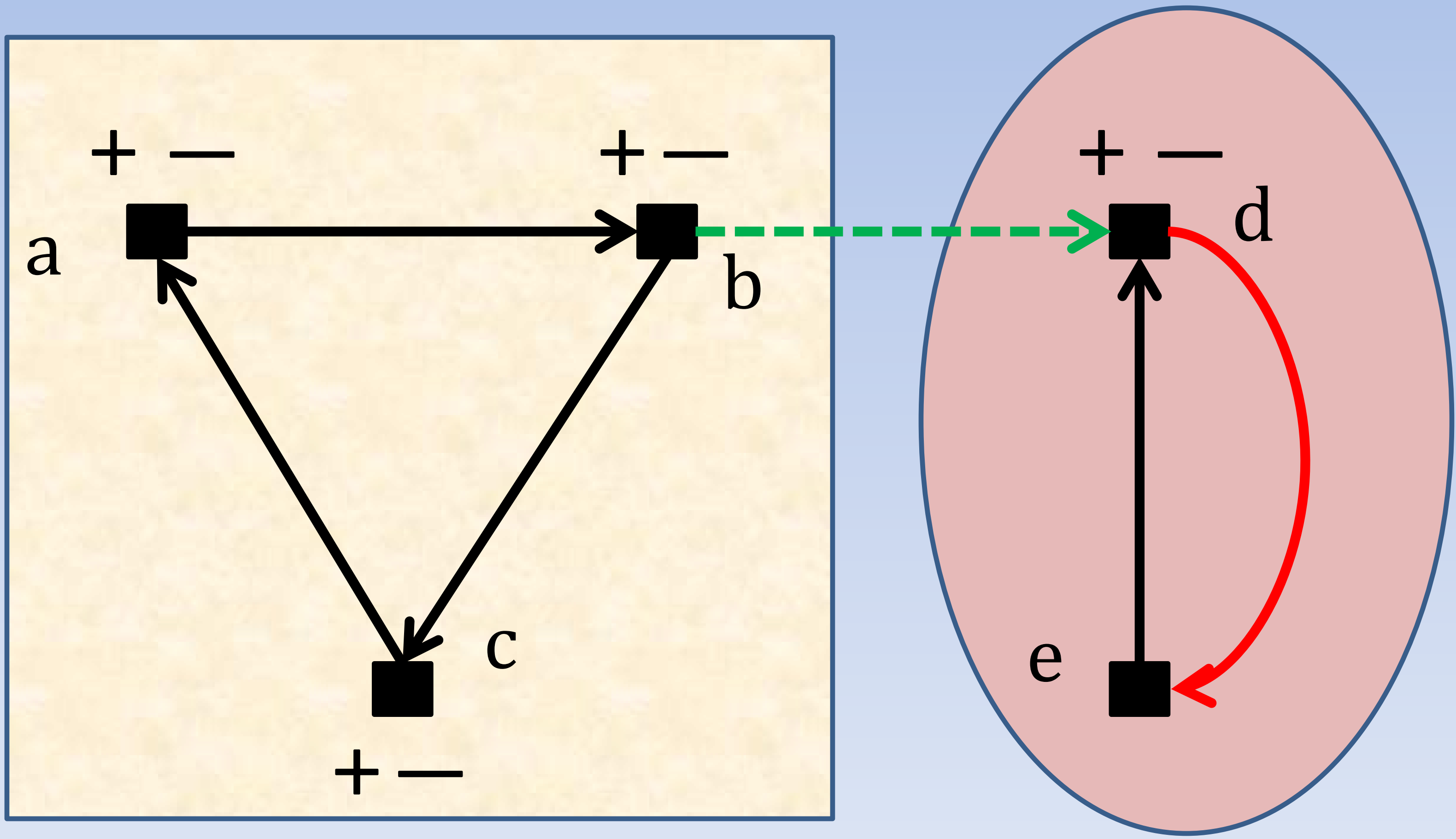
Γενίκευση του Αλγορίθμου

Βήμα (0) : Αρχικοποίηση. Στην κορυφή **d** δίνονται τα σήματα **+** και **–**
Συνέχεια στο **Βήμα (1)**



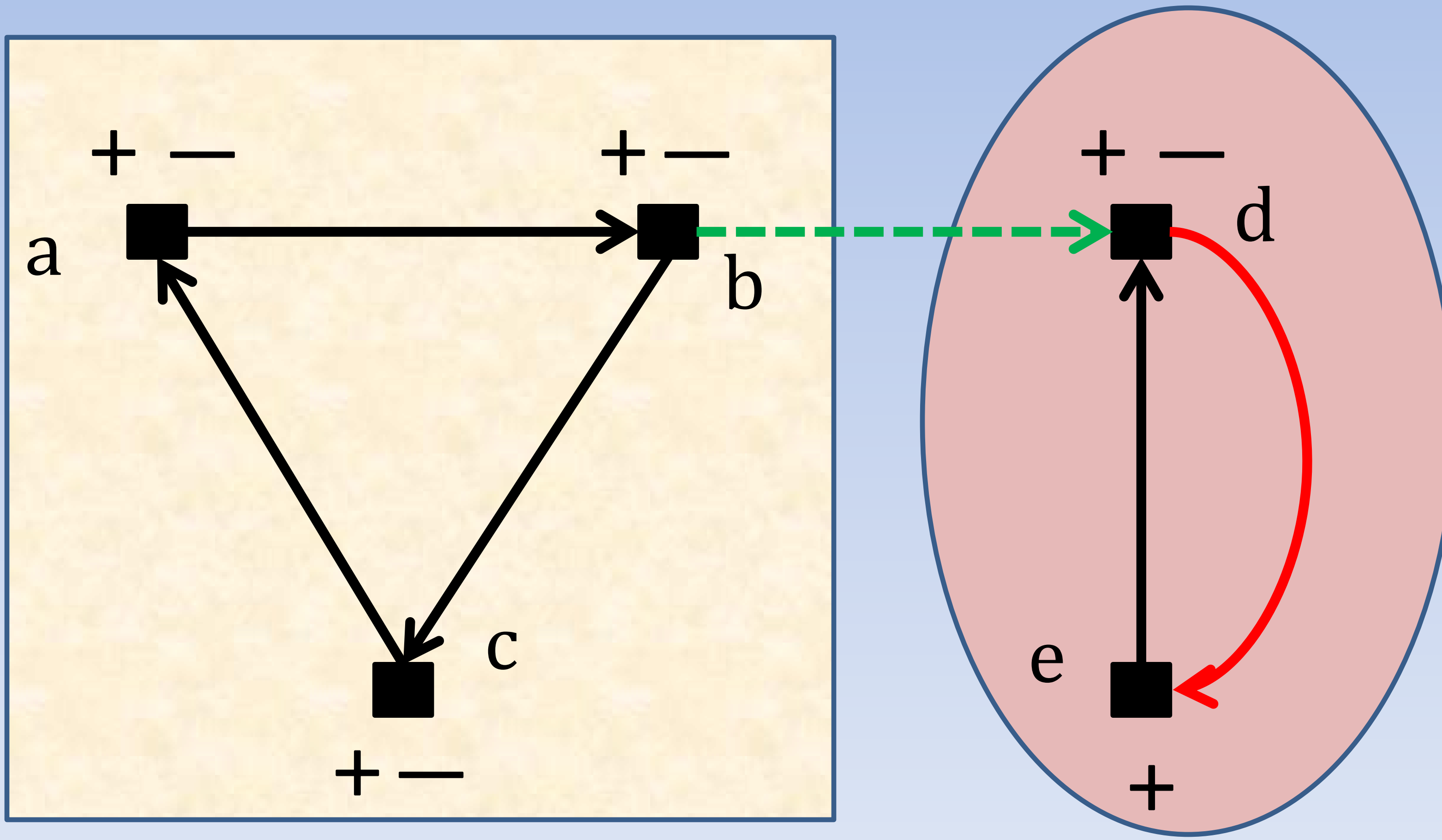
Γενίκευση του Αλγορίθμου

Βήμα (1) : Επιλέγεται η ακμή **(d, e).** Συνέχεια στο **Βήμα (2)**



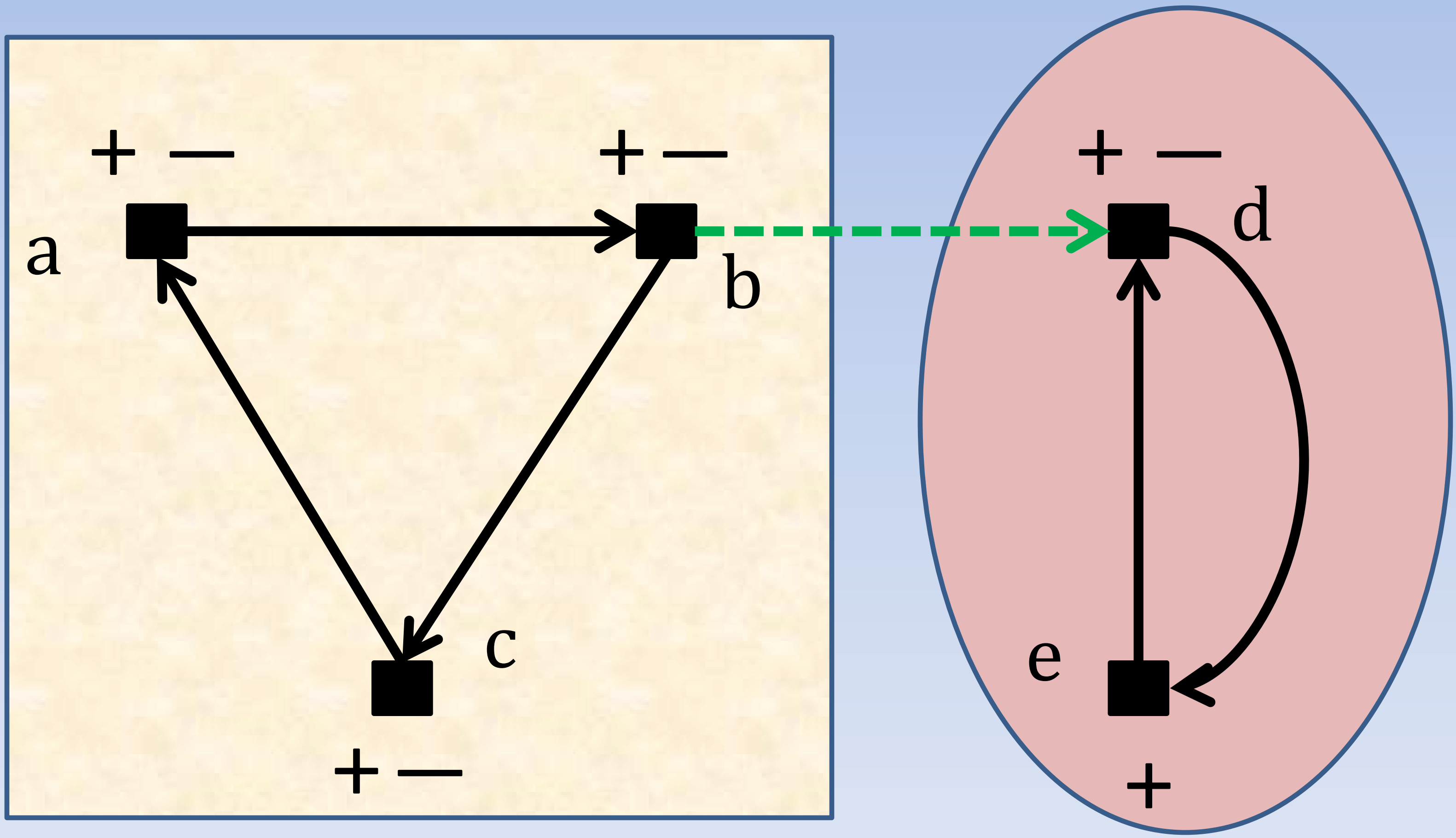
Γενίκευση του Αλγορίθμου

Βήμα (2) : Στην κορυφή **e** δίνεται το σήμα **+** . Συνέχεια στο **Βήμα (1)**



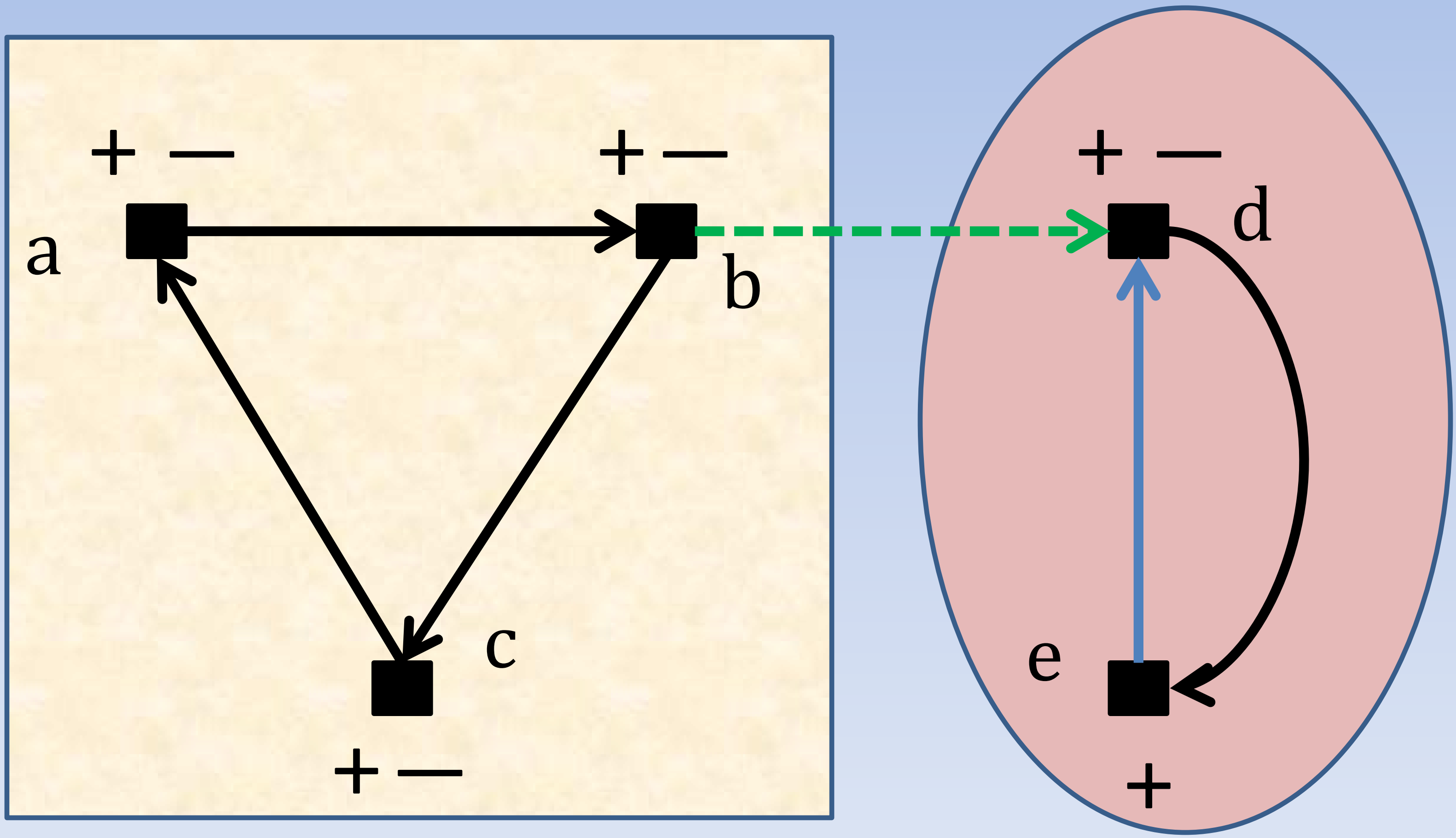
Γενίκευση του Αλγορίθμου

Βήμα (1) : Η συνθήκη δεν ικανοποιείται. Συνέχεια στο **Βήμα (3)**



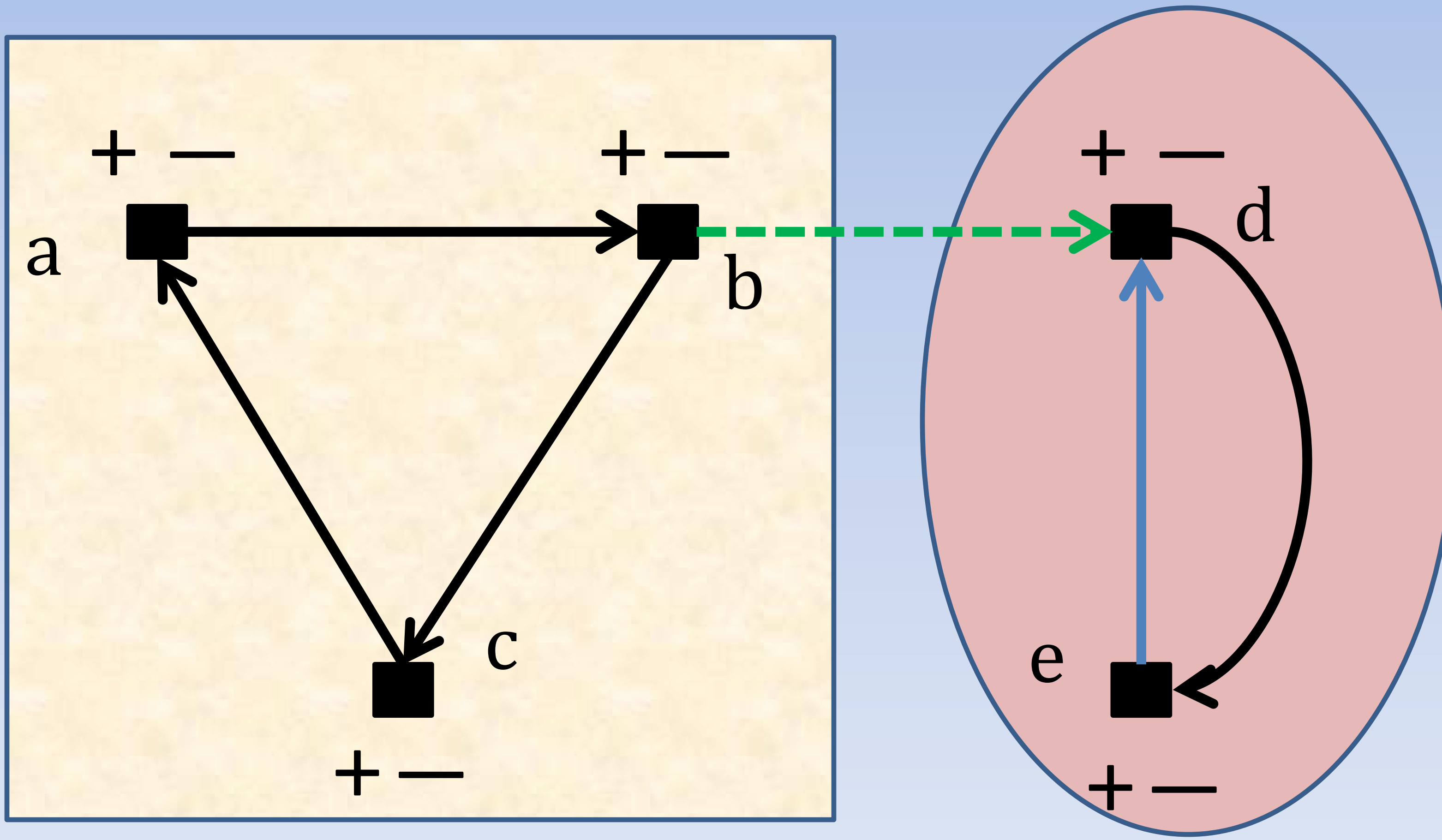
Γενίκευση του Αλγορίθμου

Βήμα (3): Επιλέγεται η ακμή **(e, d).** Συνέχεια στο **Βήμα (4)**



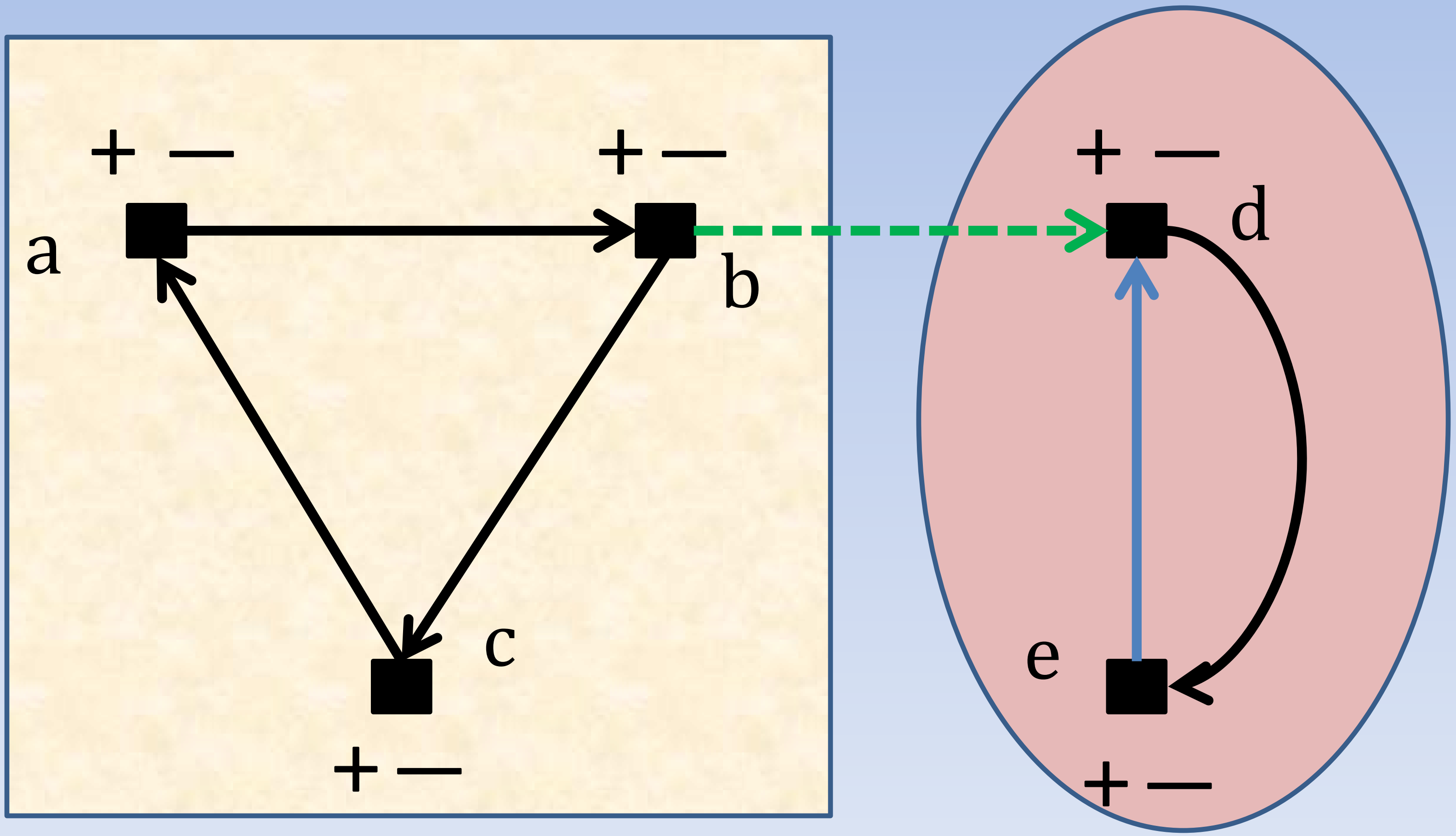
Γενίκευση του Αλγορίθμου

Βήμα (4): Στην κορυφή **e** δίνεται το σήμα **– .** Συνέχεια στο **Βήμα (3)**



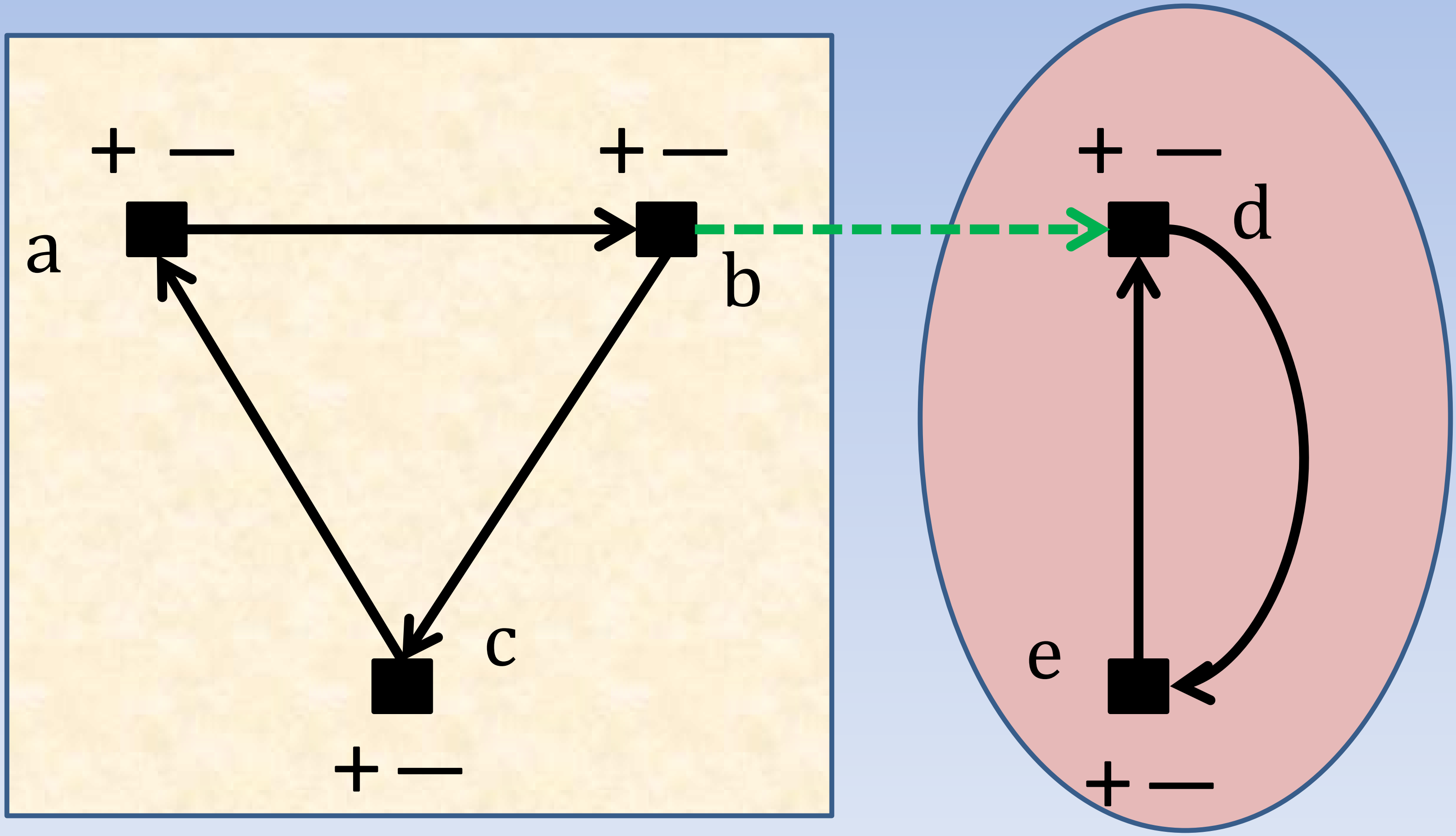
Γενίκευση του Αλγορίθμου

Βήμα (3) : Η συνθήκη δεν ικανοποιείται. Συνέχεια στο **Βήμα (5)**



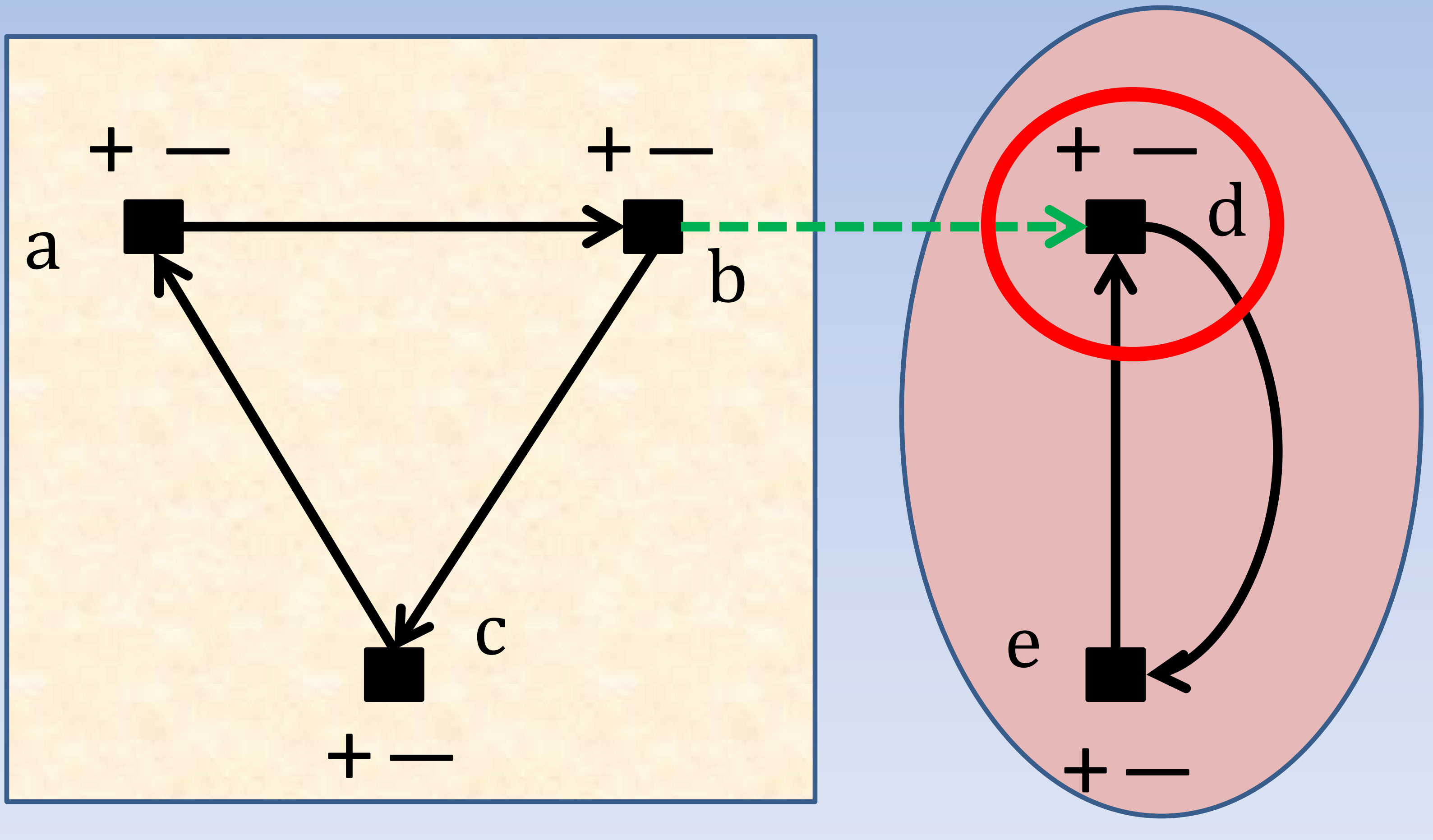
Γενίκευση του Αλγορίθμου

Βήμα (5) : Τέλος αλγορίθμου.



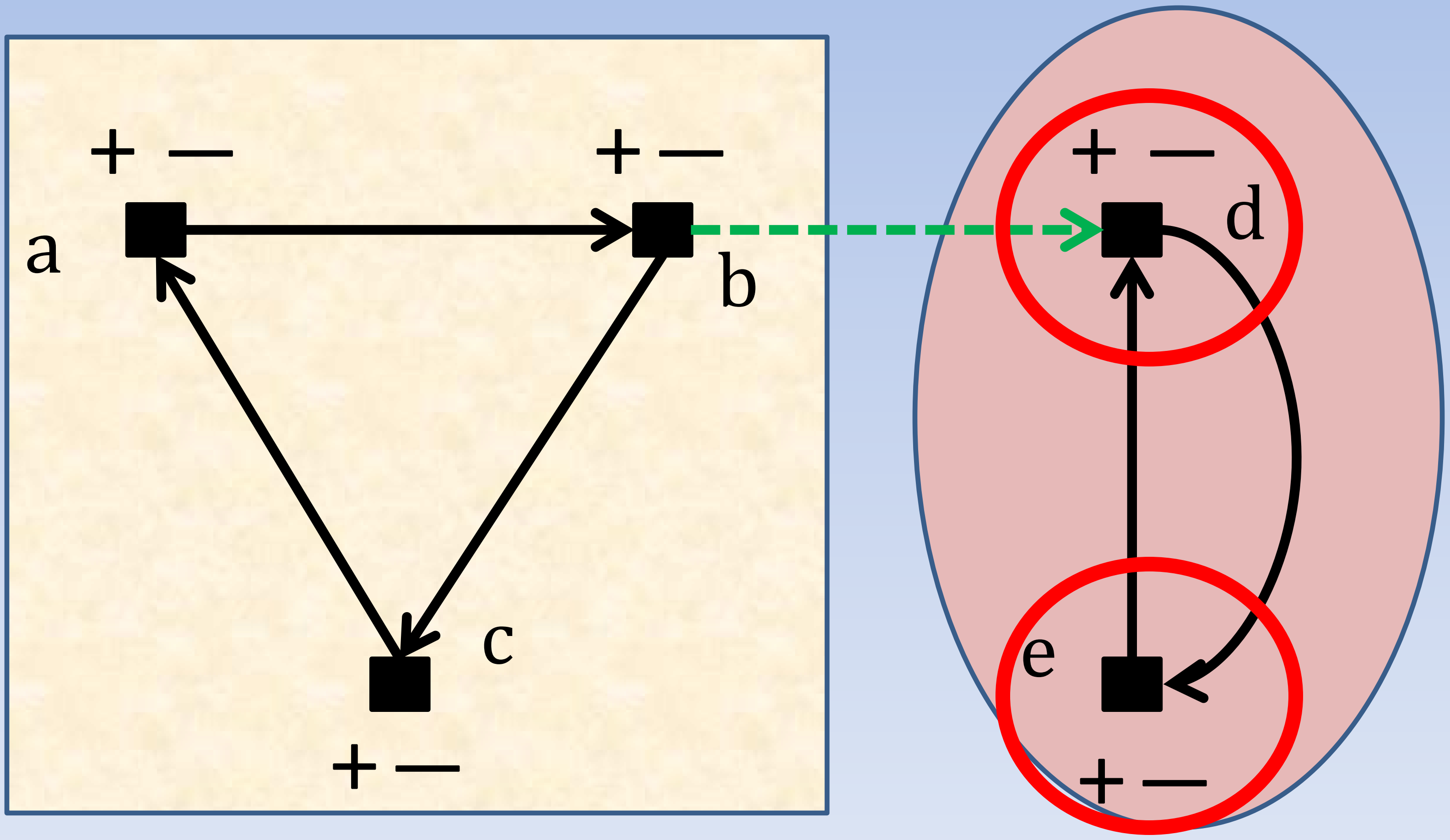
Γενίκευση του Αλγορίθμου

Οι κορυφές που αποτελούν τη συνεκτική συνιστώσα της κορυφής **d**.



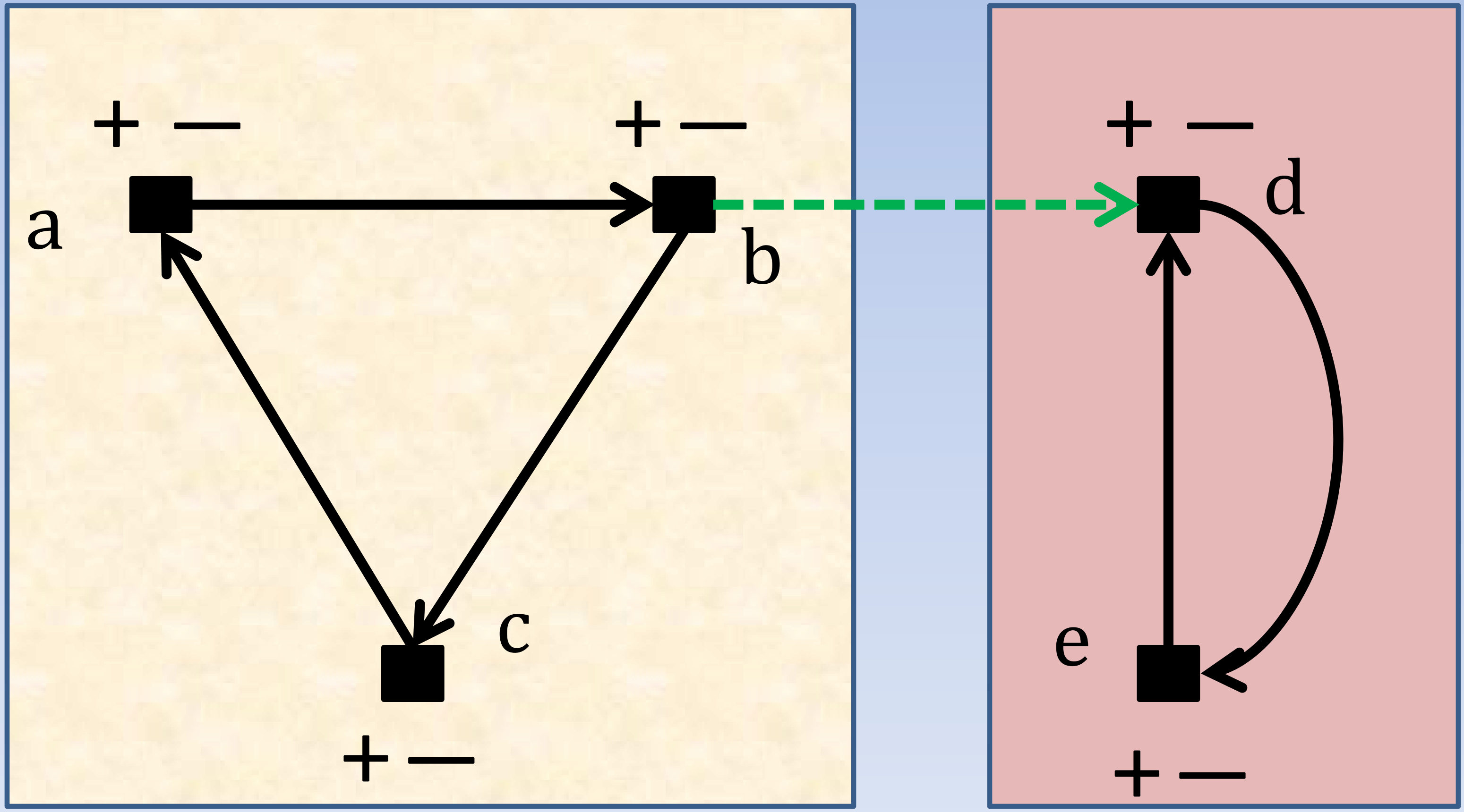
Γενίκευση του Αλγορίθμου

Οι κορυφές που αποτελούν τη συνεκτική συνιστώσα της κορυφής **d**.



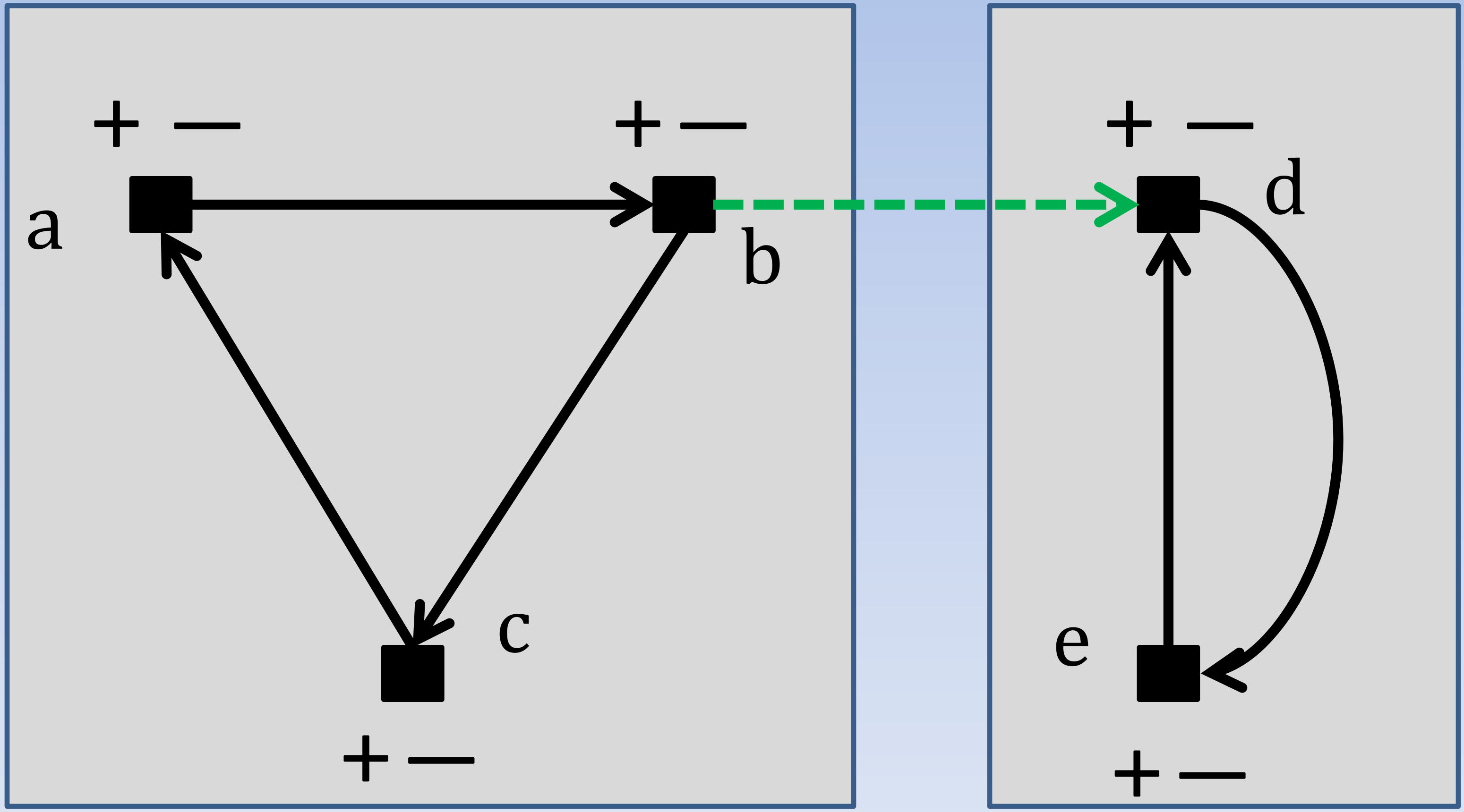
Γενίκευση του Αλγορίθμου

Οι κορυφές **{d, e}** συνιστούν ένα δεύτερο υπογράφημα.



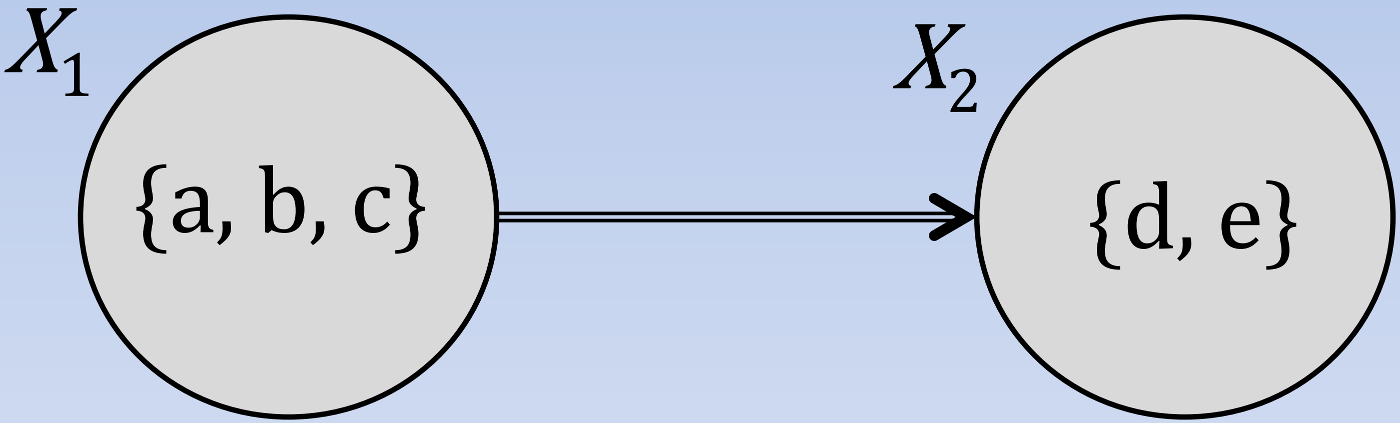
Γενίκευση του Αλγορίθμου

Άρα έχουμε δύο ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες.



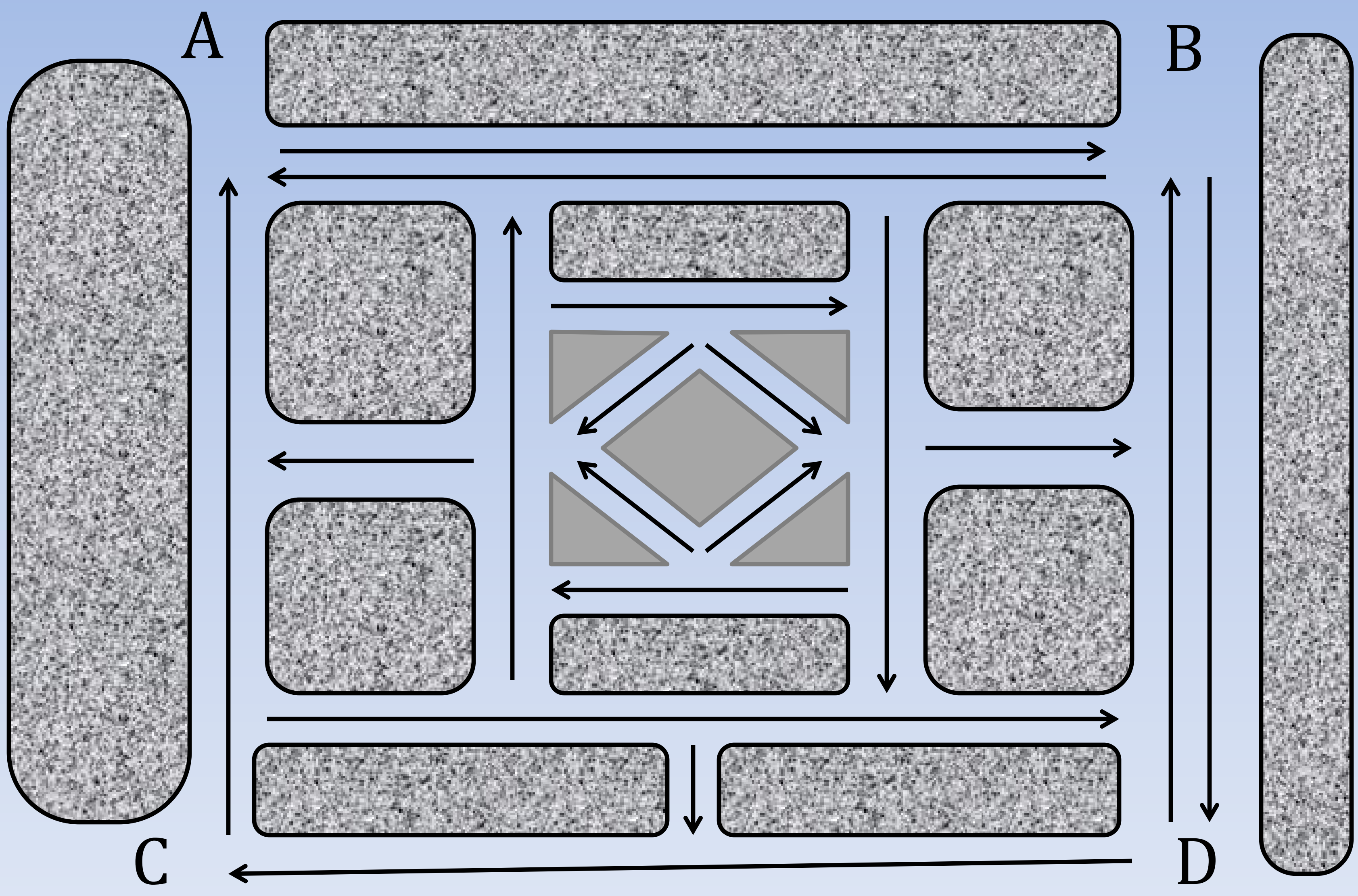
Απλοποιημένο Γράφημα

Ως αποτέλεσμα εφαρμογής του αλγορίθμου λαμβάνουμε το απλοποιημένο γράφημα του αρχικού γραφήματος.

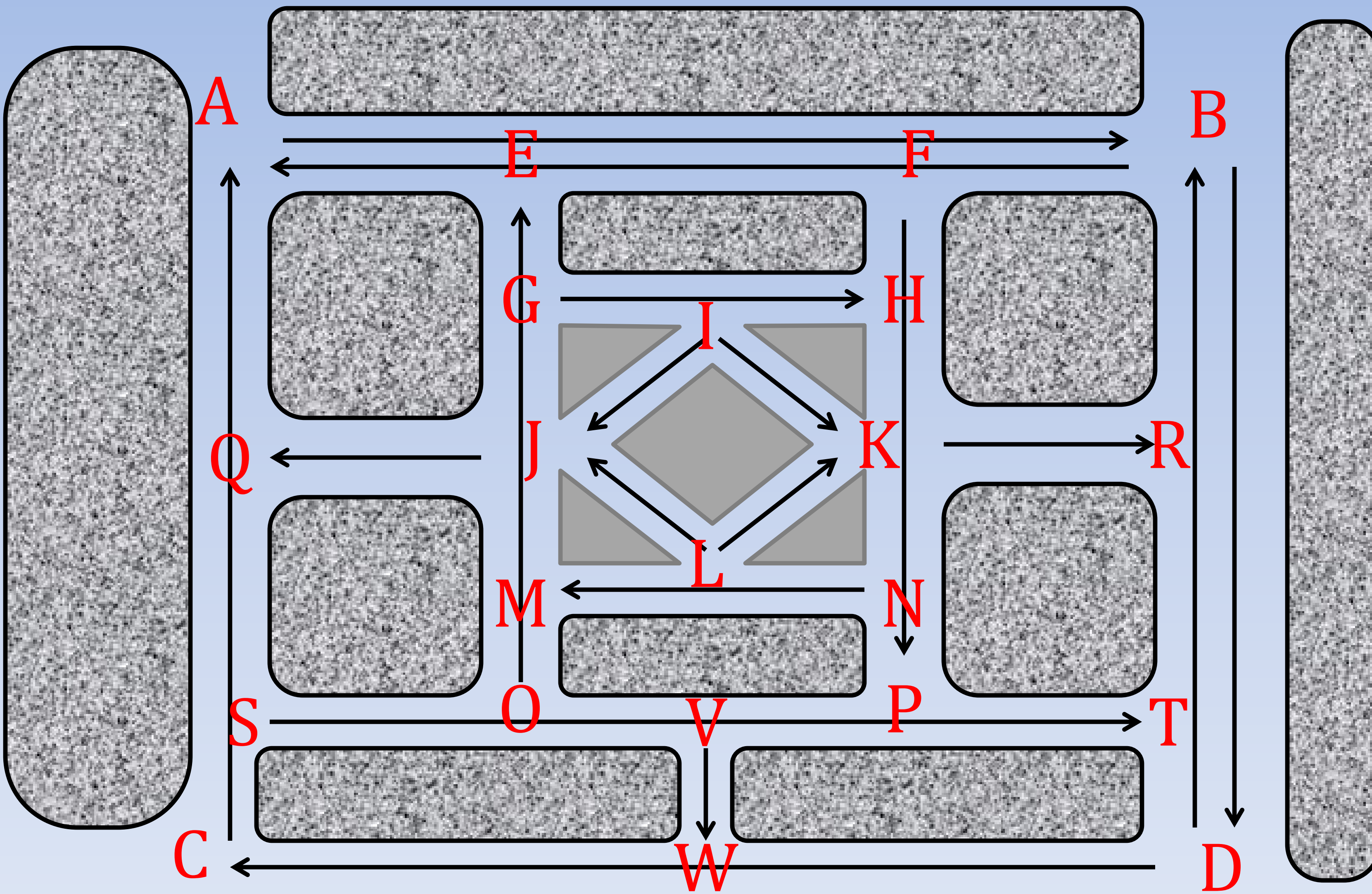


Παρατηρήσεις;

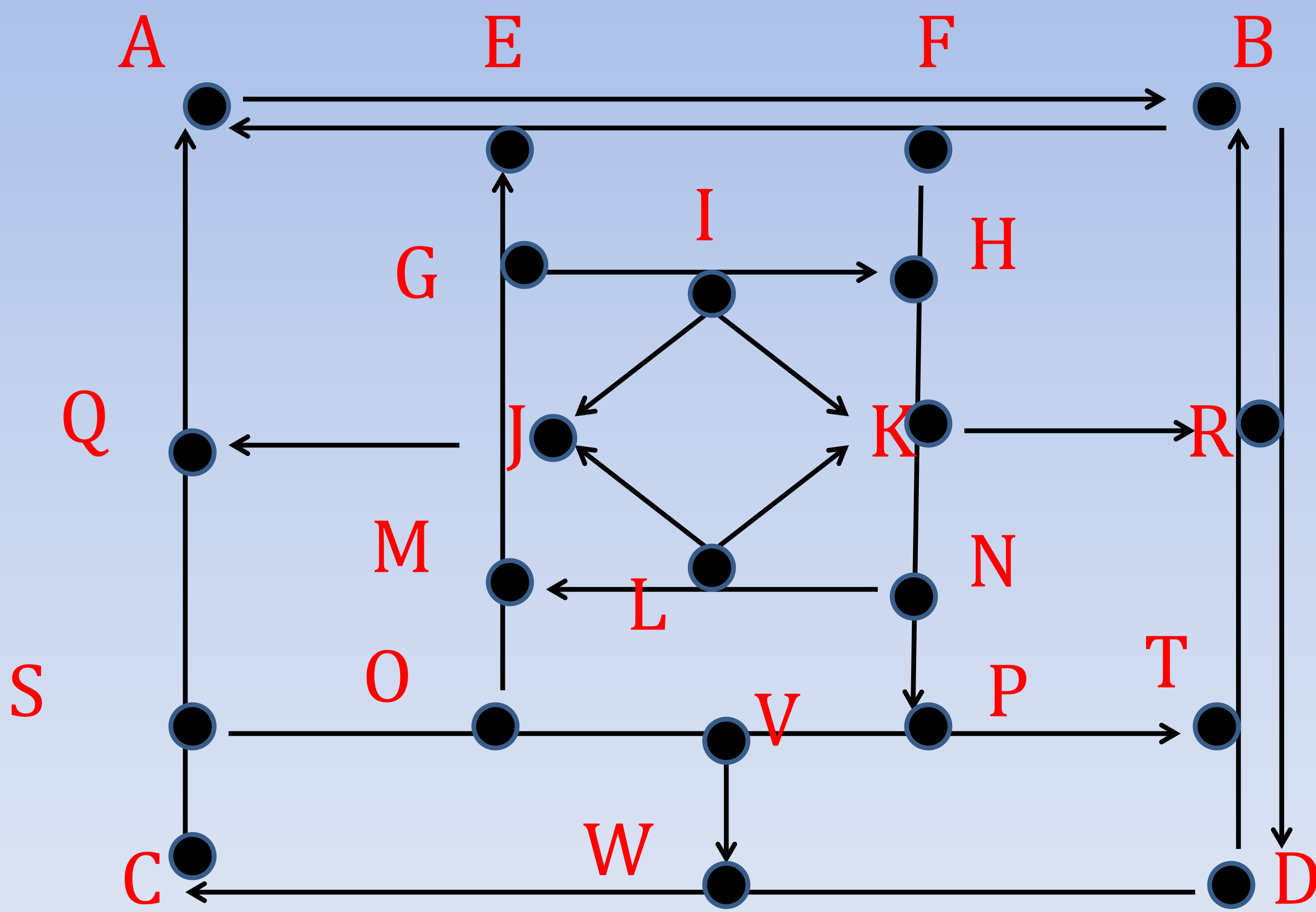
Μια Εφαρμογή της Έννοιας της Συνεκτικότητας



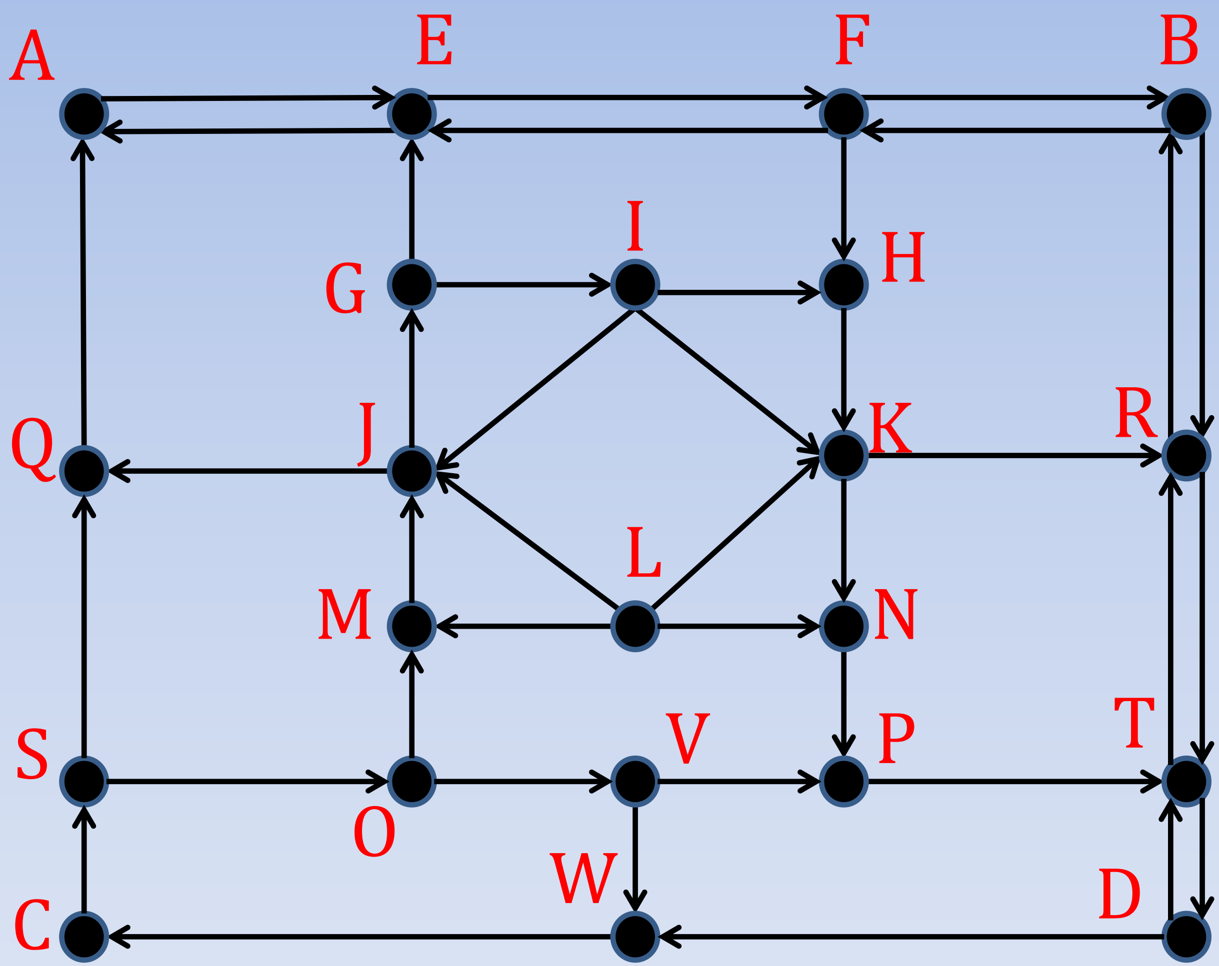
Μια Εφαρμογή της Έννοιας της Συνεκτικότητας



Μια Εφαρμογή της Έννοιας της Συνεκτικότητας

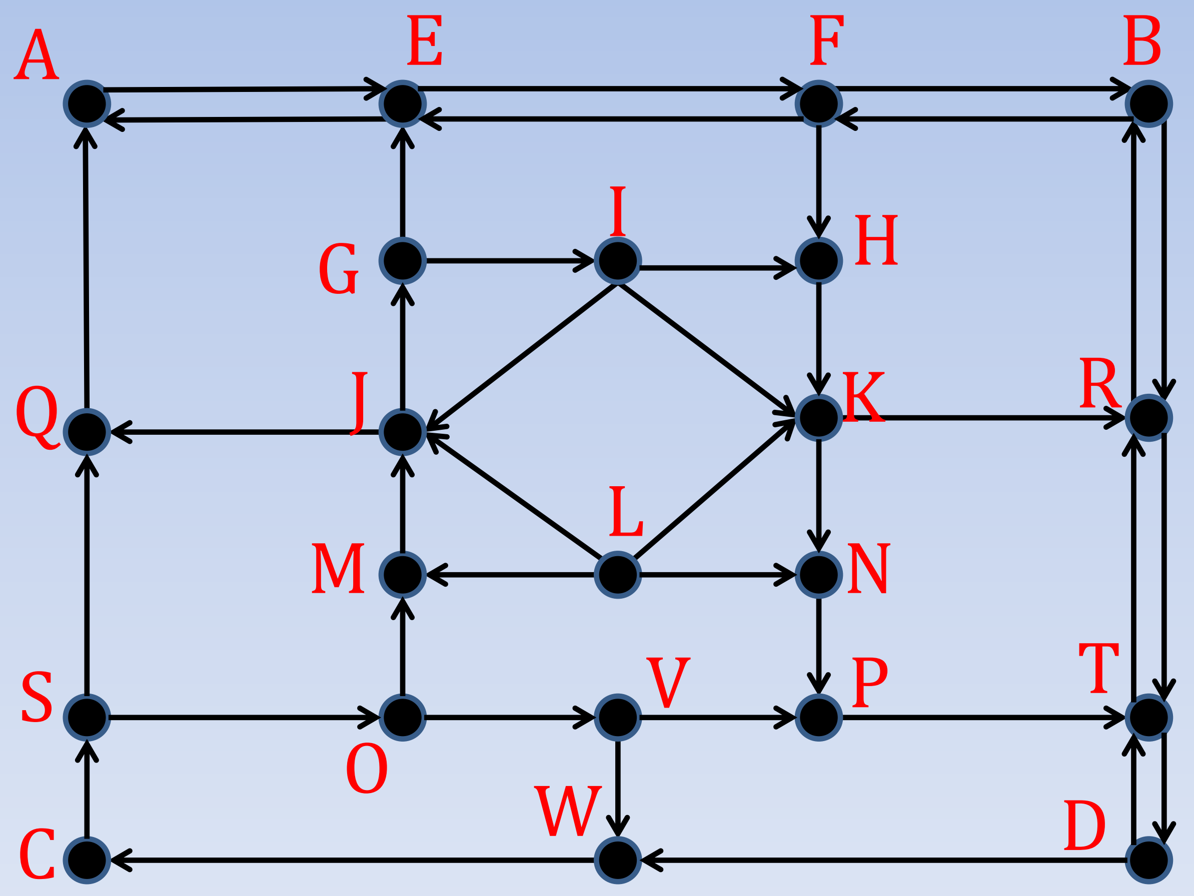


Μια Εφαρμογή της Έννοιας της Συνεκτικότητας



Μια Εφαρμογή της Έννοιας της Συνεκτικότητας

Τι πρέπει να συμβαίνει στο γράφημα αυτό ώστε να είναι δυνατή η μετάβαση από ένα σημείο σε οποιοδήποτε άλλο;



Συνεκτικότητα και Ιδιότητες

Ορισμός - Συνεκτικότητα

Έστω $\mathbf{G} = (\mathbf{X}, \mathbf{U})$ ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα. Η έννοια της συνεκτικότητας είναι μια διμελής σχέση επί του $\mathbf{X}$ που θα συμβολίζεται με $\check{\mathbf{C}}$ και ορίζεται ως εξής:

δύο κορυφές $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{X}$, δίνουν ένα ζεύγος $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ το οποίο ανήκει στη σχέση $\check{\mathbf{C}}$ και γράφουμε $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \check{\mathbf{C}}$ ή $\mathbf{x}\,\check{\mathbf{C}}\,\mathbf{y}$ τότε και μόνον τότε αν,

- είτε $\mathbf{x} = \mathbf{y}$,
- είτε υπάρχει στο $\mathbf{G}$ ένα μονοπάτι (ή αλλιώς μια αλυσίδα) που συνδέει $\mathbf{x}$ με το $\mathbf{y}$.

Συνεκτικότητα και Ιδιότητες

Συνεκτικότητα (συνέχεια)

Η σχέση $\mathbf{\check{C}}$ όπως ορίστηκε προηγουμένως για το γράφημα $\mathbf{G} = (\mathbf{X}, \mathbf{U})$ είναι μια σχέση ισοδυναμίας επί του $\mathbf{X}$.

Οι κλάσεις ισοδυναμίας της οποίας ονομάζονται συνεκτικές συνιστώσες του γραφήματος $\mathbf{G}$.

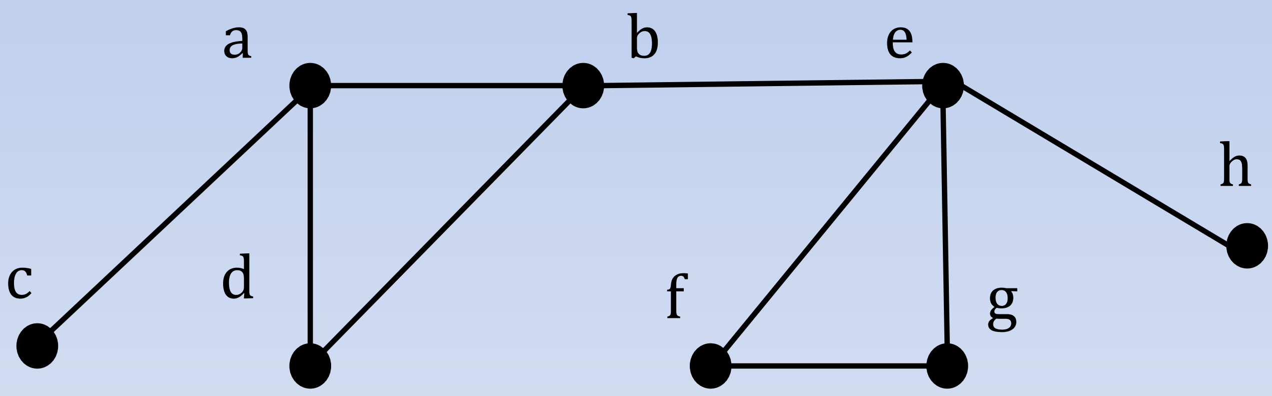
Άσκηση

Να αποδείξετε ότι η σχέση $\mathbf{\check{C}}$ για ένα γράφημα $\mathbf{G} = (\mathbf{X}, \mathbf{U})$ ικανοποιεί όλες τις ιδιότητες μιας σχέσης ισοδυναμίας.

Συνεκτικότητα και Ιδιότητες

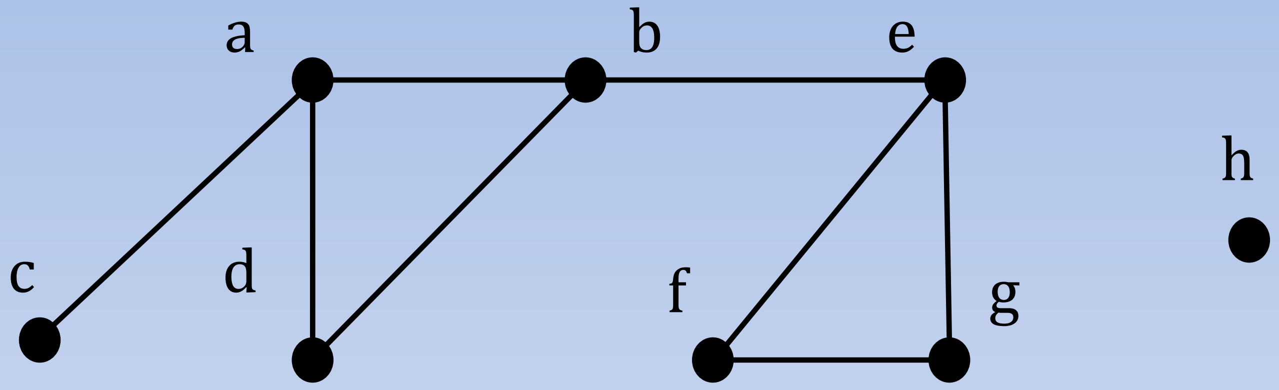
Διαισθητικά η έννοια της συνεκτικότητας σε ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα $\mathbf{G} = (\mathbf{X}, \mathbf{U})$ χαρακτηρίζει τα διαφορετικά «τμήματα» του γραφήματος και το αν είναι ή όχι διασυνδεδεμένα μεταξύ τους.

Παράδειγμα: Γράφημα με 1 συνεκτική συνιστώσα

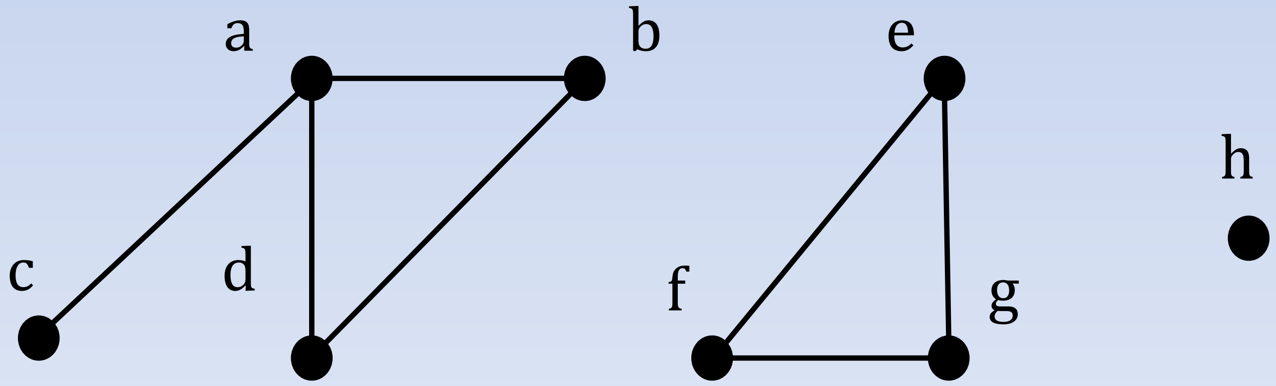


Συνεκτικότητα και Ιδιότητες

Παράδειγμα: Γράφημα με 2 συνεκτικές συνιστώσες



Παράδειγμα: Γράφημα με 3 συνεκτικές συνιστώσες



Συνεκτικότητα και Ιδιότητες

Ορισμοί

- Ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα $\mathbf{G} = (\mathbf{X}, \mathbf{U})$ ονομάζεται συνεκτικό αν αποτελείται από μία μοναδική συνεκτική συνιστώσα.

Συνεκτικότητα και Ιδιότητες

Ορισμοί

- Ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα $\mathbf{G} = (\mathbf{X}, \mathbf{U})$ ονομάζεται συνεκτικό αν αποτελείται από μία μοναδική συνεκτική συνιστώσα.
- Ένα κατευθυνόμενο γράφημα $\mathbf{G} = (\mathbf{X}, \mathbf{U})$ ονομάζεται ισχυρά συνεκτικό αν το απλοποιημένο γράφημα είναι το τετριμένο με μία κορυφή.

Συνεκτικότητα και Ιδιότητες

Ορισμοί

- Ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα $\mathbf{G} = (\mathbf{X}, \mathbf{U})$ ονομάζεται συνεκτικό αν αποτελείται από μία μοναδική συνεκτική συνιστώσα.
- Ένα κατευθυνόμενο γράφημα $\mathbf{G} = (\mathbf{X}, \mathbf{U})$ ονομάζεται ισχυρά συνεκτικό αν το απλοποιημένο γράφημα είναι το τετριμένο με μία κορυφή.
- Ένα κατευθυνόμενο γράφημα $\mathbf{G} = (\mathbf{X}, \mathbf{U})$ ονομάζεται ασθενώς συνεκτικό όταν υπάρχει ένα μη κατευθυνόμενο μονοπάτι που συνδέει όλες τις κορυφές.

Συνεκτικότητα και Ιδιότητες

Ορισμοί

- Ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα $\mathbf{G} = (\mathbf{X}, \mathbf{U})$ ονομάζεται συνεκτικό αν αποτελείται από μία μοναδική συνεκτική συνιστώσα.
- Ένα κατευθυνόμενο γράφημα $\mathbf{G} = (\mathbf{X}, \mathbf{U})$ ονομάζεται ισχυρά συνεκτικό αν το απλοποιημένο γράφημα είναι το τετριμένο με μία κορυφή.
- Ένα κατευθυνόμενο γράφημα $\mathbf{G} = (\mathbf{X}, \mathbf{U})$ ονομάζεται ασθενώς συνεκτικό όταν υπάρχει ένα μη κατευθυνόμενο μονοπάτι που συνδέει όλες τις κορυφές.

$\rightarrow$ Σύμφωνα με τα προηγούμενα η χρήση του όρου συνεκτικότητα για ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα $\mathbf{G} = (\mathbf{X}, \mathbf{U})$ αφορά την ισχυρή συνεκτικότητα υπό την προϋπόθεση ότι δεν δημιουργείται σύγχιση στην ορολογία.

Συνεκτικότητα και Ιδιότητες

Ορισμός

Μία ακμή μη κατευθυνόμενου συνεκτικού γραφήματος $\mathbf{G} = (\mathbf{X}, \mathbf{U})$ ονομάζεται ισθμός αν η αφαίρεση της από το γράφημα δημιουργεί δύο συνεκτικές συνιστώσες.

Συνεκτικότητα και Ιδιότητες

Ορισμός

Μία ακμή μη κατευθυνόμενου συνεκτικού γραφήματος $\mathbf{G = (X, U)}$ ονομάζεται ισθμός αν η αφαίρεση της από το γράφημα δημιουργεί δύο συνεκτικές συνιστώσες. Γενικώτερα, μια ακμή αυξάνει κατά 1 το πλήθος των συνεκτικών συνιστωσών ενός μη κατευθυνόμενου γραφήματος.

Ερωτήματα:

- Πως θα μπορούσαμε να ορίσουμε το απλοποιημένο γράφημα για ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα;
- Τι μορφή έχει το απλοποιημένο γράφημα στην περίπτωση συνεκτικού μη κατευθυνόμενου γραφήματος;

Συνεκτικότητα και Ιδιότητες

Το ερώτημα που τίθεται είναι :

«για ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα $\mathbf{G} = (\mathbf{X}, \mathbf{U})$ πως είναι δυνατό να υπολογιστούν οι συνεκτικές συνιστώσες από τις οποίες αποτελείται;»

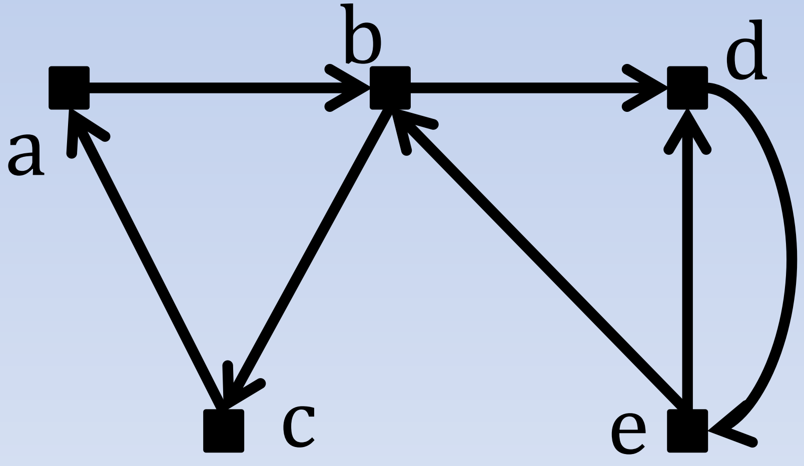
$\rightarrow$ Αλγόριθμος αντίστοιχος του αλγορίθμου υπολογισμού των ισχυρά συνεκτικών συνιστωσών για ένα κατευθυνόμενο γράφημα.

Η διατύπωση και εφαρμογή του αλγορίθμου αφήνεται ως άσκηση.

Δομές Αναπαράστασης Γραφημάτων

Πίνακας Γειτνίασης (adjacency matrix)

Για ένα οποιοδήποτε γράφημα $\mathbf{G} = (\mathbf{X}, \mathbf{U})$ ο πίνακας γειτνίασης είναι ένα πίνακας $\mathbf{n} \times \mathbf{n}$ όπου $\mathbf{n} = |\mathbf{X}|$, που αναπαριστά τον τρόπο με τον οποίο συνδέονται οι κορυφές με τις ακμές.

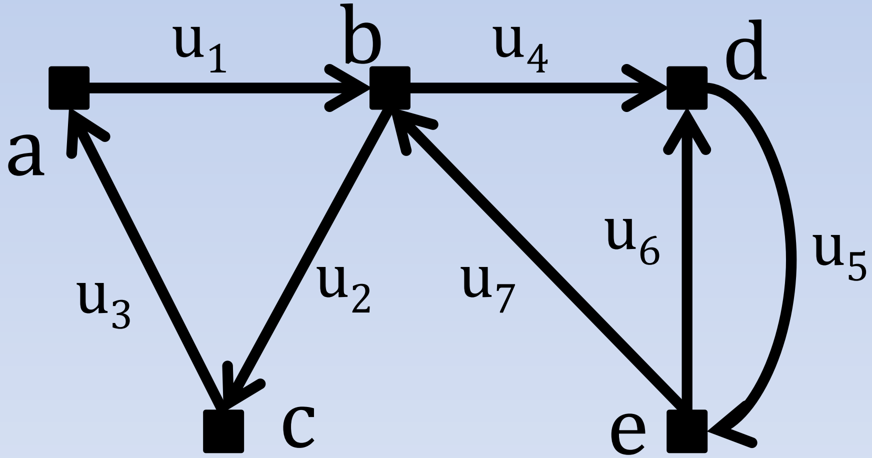


	a	b	c	d	e
a	0	1	0	0	0
b	0	0	1	1	0
c	1	0	0	0	0
d	0	0	0	0	1
e	0	1	0	1	0

Δομές Αναπαράστασης Γραφημάτων

Πίνακας Επίπτωσης (incidence matrix)

Για ένα οποιοδήποτε γράφημα $\mathbf{G} = (\mathbf{X}, \mathbf{U})$ ο πίνακας επίπτωσης είναι ένα πίνακας $\mathbf{n}{\times}\mathbf{m}$ όπου $\mathbf{n} = |\mathbf{X}|$ και $\mathbf{m} = |\mathbf{U}|$ που αναπαριστά για κάθε ακμή τις κορυφές στις οποίες επιπίπτει (είναι προσπίπτουσα).

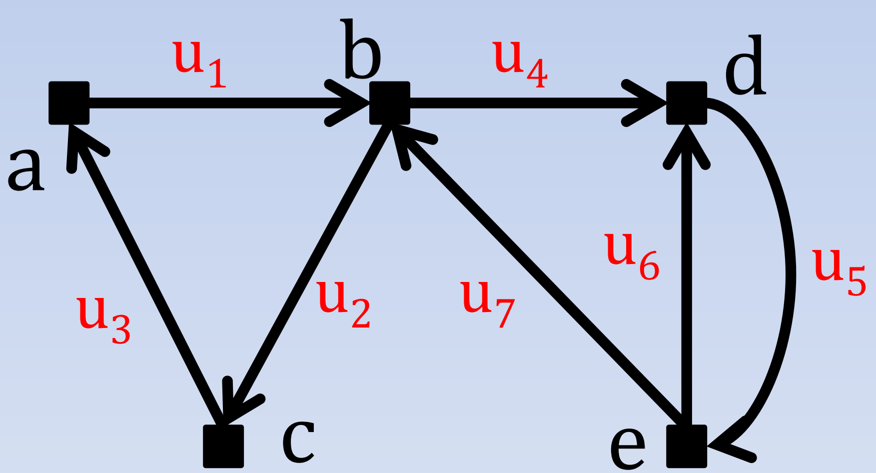


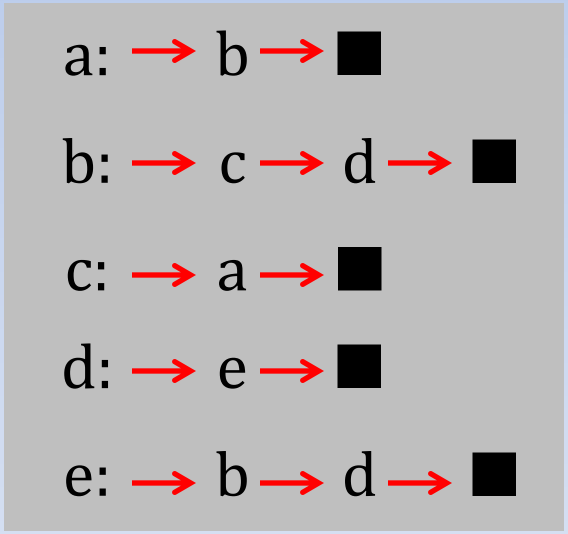
	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7
a	1	0	1	0	0	0	0
b	1	1	0	1	0	0	1
c	0	1	1	0	0	0	0
d	0	0	0	1	1	1	0
e	0	0	0	0	1	1	1

Δομές Αναπαράστασης Γραφημάτων

Λίστα Γειτνίασης (adjacency list)

Για ένα οποιοδήποτε γράφημα $\mathbf{G} = (\mathbf{X}, \mathbf{U})$ η αναπαράσταση με λίστα γειτνίασης για κάθε κορυφή του γραφήματος ορίζει μια λίστα με τις κορυφές οι οποίες είναι γειτονικές με την εν λόγω κορυφή.





Μονοπάτια και Κυκλώματα Euler

Ορισμός

Έστω $\mathbf{G} = (\mathbf{X}, \mathbf{U})$ ένα μη κατευθυνόμενο συνεκτικό γράφημα. Ένα μονοπάτι ή ένα κύκλωμα του Euler είναι μια ακολουθία ακμών η οποία διέρχεται από κάθε ακμή του γραφήματος μία και μόνο μία φορά.

Ο ορισμός είναι αντίστοιχος και στην περίπτωση που το γράφημα είναι κατευθυνόμενο.

Μονοπάτια και Κυκλώματα Euler

Ορισμός

Έστω $\mathbf{G} = (\mathbf{X}, \mathbf{U})$ ένα μη κατευθυνόμενο συνεκτικό γράφημα. Ένα μονοπάτι ή ένα κύκλωμα του Euler είναι μια ακολουθία ακμών η οποία διέρχεται από κάθε ακμή του γραφήματος μία και μόνο μία φορά.

Ο ορισμός είναι αντίστοιχος και στην περίπτωση που το γράφημα είναι κατευθυνόμενο.

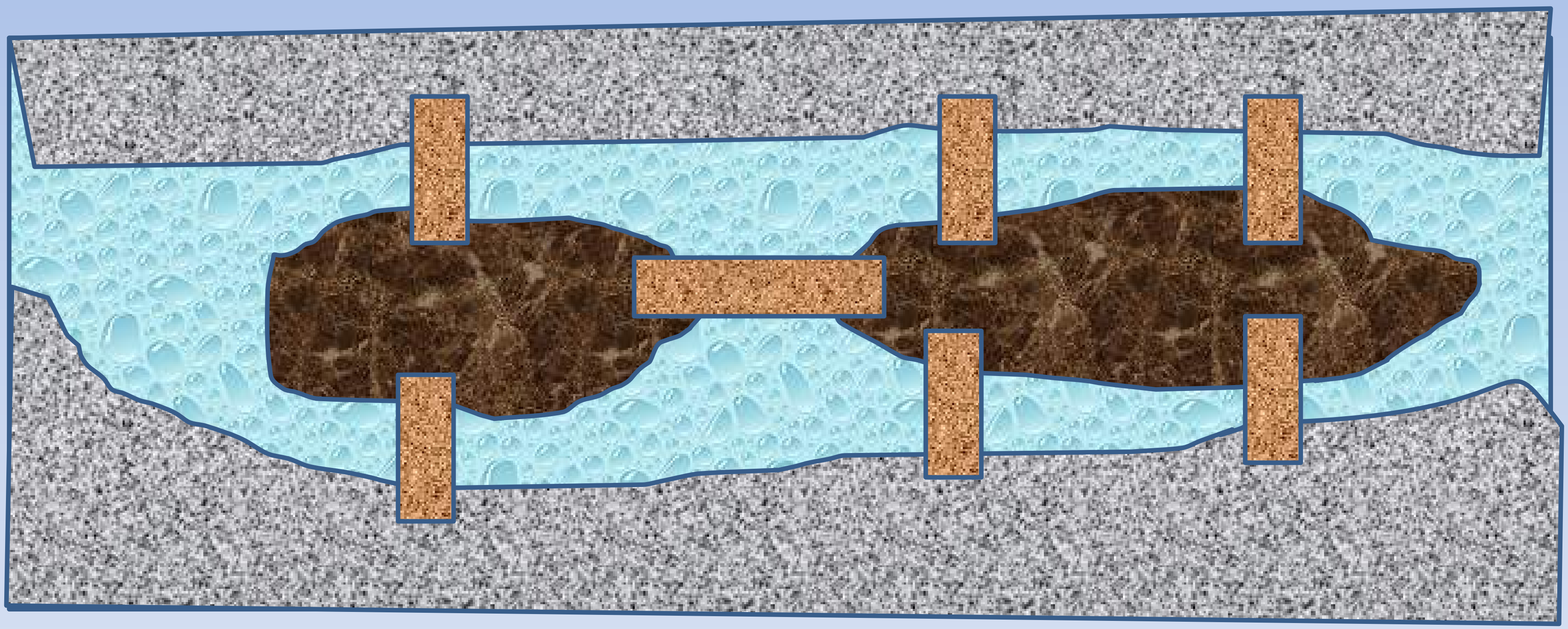
Θεώρημα

Ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα $\mathbf{G} = (\mathbf{X}, \mathbf{U})$ περιέχει ένα μονοπάτι του Euler αν και μόνο αν είναι συνεκτικό και έχει είτε μηδέν είτε δύο κορυφές περιττού βαθμού.

Οι Ορισμοί και τα Θεωρήματα ενδέχεται να διαφοροποιούνται ανάλογα με τον συγγραφέα και το βιβλίο.

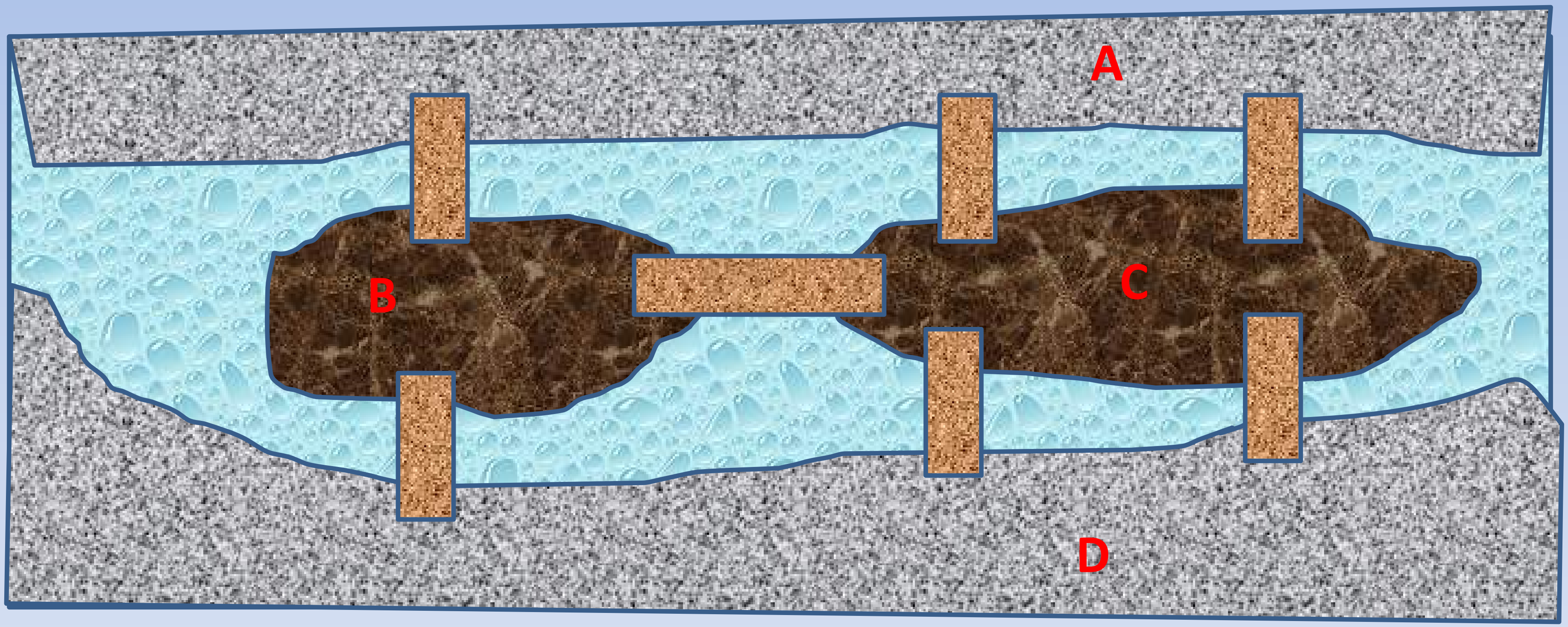
Μονοπάτια και Κυκλώματα Euler

Παράδειγμα: οι γέφυρες του Königsberg



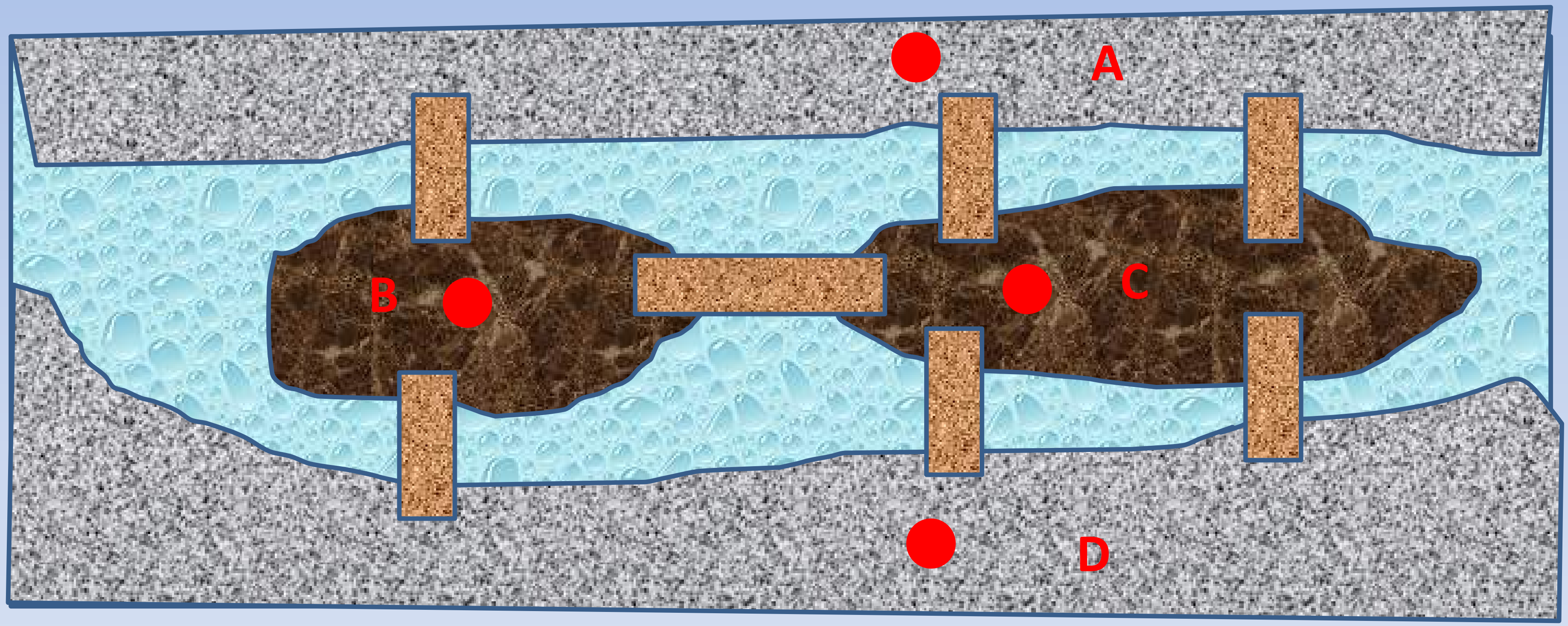
Μονοπάτια και Κυκλώματα Euler

Παράδειγμα: οι γέφυρες του Königsberg



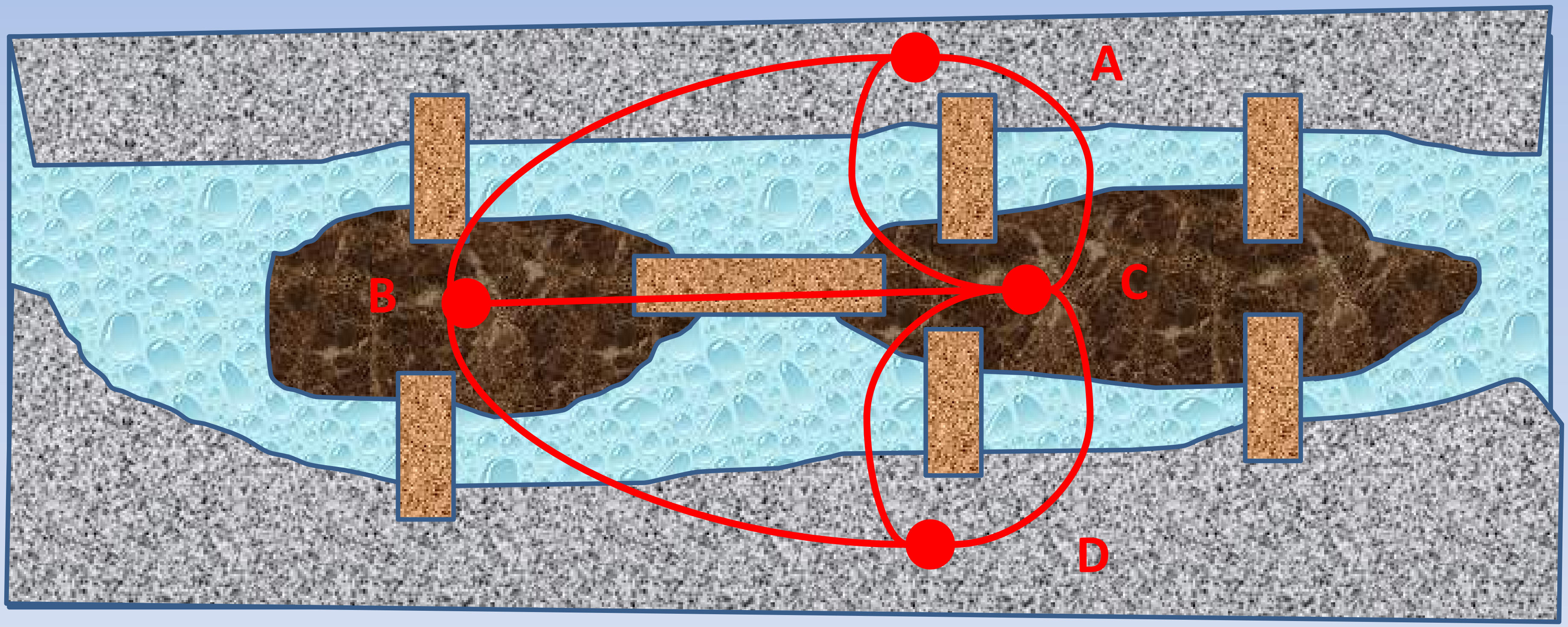
Μονοπάτια και Κυκλώματα Euler

Παράδειγμα: οι γέφυρες του Königsberg



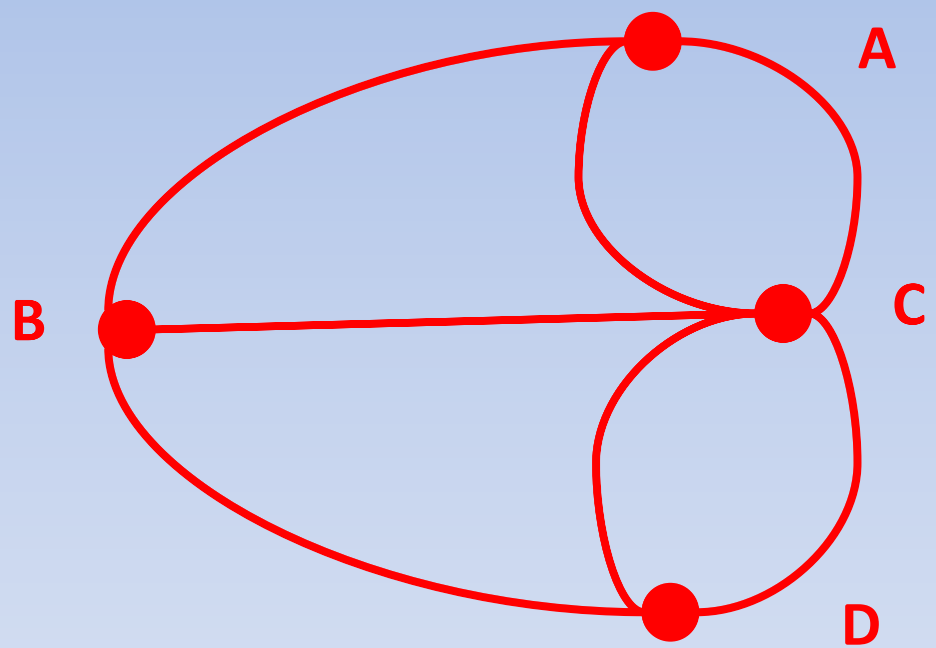
Μονοπάτια και Κυκλώματα Euler

Παράδειγμα: οι γέφυρες του Königsberg



Μονοπάτια και Κυκλώματα Euler

Παράδειγμα: οι γέφυρες του Königsberg



Μονοπάτια και Κυκλώματα Euler

Θεώρημα

Ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα $\mathbf{G} = (\mathbf{X}, \mathbf{U})$ περιέχει ένα μονοπάτι του Euler αν και μόνο αν είναι συνεκτικό και έχει είτε μηδέν είτε δύο κορυφές περιττού βαθμού.

Ερώτημα:

Τι συμβαίνει με τα κανονικά γραφήματα (regular graphs) βαθμού-2 (2-regular), βαθμού-3 (3-regular);

Ειδική περίπτωση το Γράφημα του Cayley. Τι συμβαίνει στην περίπτωση του γραφήματος του Cayley;

https://en.wikipedia.org/wiki/Cayley_graph

https://en.wikipedia.org/wiki/Eulerian_path

Οι Ορισμοί και τα Θεωρήματα ενδέχεται να διαφοροποιούνται ανάλογα με τον συγγραφέα και το βιβλίο.

Μονοπάτια και Κυκλώματα Euler

Πόρισμα

Ένα κατευθυνόμενο γράφημα $\mathbf{G} = (\mathbf{X}, \mathbf{U})$ περιέχει ένα κύκλωμα του Euler <u>αν και μόνο αν</u> είναι ισχυρά συνεκτικό και όλες οι κορυφές του είναι άρτιου βαθμού.

Οι Ορισμοί και τα Θεωρήματα ενδέχεται να διαφοροποιούνται ανάλογα με τον συγγραφέα και το βιβλίο.

Μονοπάτια και Κυκλώματα Euler

Θεώρημα

Ένα κατευθυνόμενο γράφημα $\mathbf{G} = (\mathbf{X}, \mathbf{U})$ περιέχει ένα μονοπάτι του Euler αν και μόνο αν είναι ισχυρά συνεκτικό και ο εισερχόμενος βαθμός κάθε κορυφής είναι ίσος με τον εξερχόμενο βαθμό με πιθανή εξαίρεση την αρχική και την τελική κορυφή του μονοπατιού. Για μεν την αρχική κορυφή είναι δυνατόν ο εξερχόμενος βαθμός να είναι κατά ένα μεγαλύτερος του εισερχόμενου ενώ για την τελική ο εισερχόμενος να είναι κατά ένα μεγαλύτερος από τον εξερχόμενο.

Οι Ορισμοί και τα Θεωρήματα ενδέχεται να διαφοροποιούνται ανάλογα με τον συγγραφέα και το βιβλίο.

Μονοπάτια και Κυκλώματα Euler

Θεώρημα

Ένα κατευθυνόμενο γράφημα $\mathbf{G} = (\mathbf{X}, \mathbf{U})$ περιέχει ένα μονοπάτι του Euler αν και μόνο αν είναι ισχυρά συνεκτικό και ο εισερχόμενος βαθμός κάθε κορυφής είναι ίσος με τον εξερχόμενο βαθμό με πιθανή εξαίρεση την αρχική και την τελική κορυφή του μονοπατιού. Για μεν την αρχική κορυφή είναι δυνατόν ο εξερχόμενος βαθμός να είναι κατά ένα μεγαλύτερος του εισερχόμενου ενώ για την τελική ο εισερχόμενος να είναι κατά ένα μεγαλύτερος από τον εξερχόμενο.

Θεώρημα

Ένα κατευθυνόμενο γράφημα $\mathbf{G} = (\mathbf{X}, \mathbf{U})$ περιέχει ένα κύκλωμα του Euler αν και μόνο αν είναι ισχυρά συνεκτικό και ο εισερχόμενος βαθμός κάθε κορυφής είναι ίσος με τον εξερχόμενο βαθμό.

Οι Ορισμοί και τα Θεωρήματα ενδέχεται να διαφοροποιούνται ανάλογα με τον συγγραφέα και το βιβλίο.

Αλγόριθμος Αναζήτησης ενός Κυκλώματος του Euler

<u>Υποθέσεις</u>

Έστω $\mathbf{G} = (\mathbf{X}, \mathbf{U})$ ένα κατευθυνόμενο γράφημα για το οποίο ισχύει ότι:

- το γράφημα είναι ισχυρά συνεκτικό
- για κάθε $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ $\quad d_G^+(\mathbf{x}) = d_G^-(\mathbf{x})$

Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα οι υποθέσεις εξασφαλίζουν ότι στο γράφημα υπάρχει ένα κύκλωμα του Euler.

Αλγόριθμος Αναζήτησης ενός Κυκλώματος του Euler

Υποθέσεις

Έστω $\mathbf{G} = (\mathbf{X}, \mathbf{U})$ ένα κατευθυνόμενο γράφημα για το οποίο ισχύει ότι:

- το γράφημα είναι ισχυρά συνεκτικό
- για κάθε $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ $\quad d_G^+(\mathbf{x}) = d_G^-(\mathbf{x})$

Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα οι υποθέσεις εξασφαλίζουν ότι στο γράφημα υπάρχει ένα κύκλωμα του Euler.

Η πρώτη υπόθεση θα μπορεί να είναι πιό «χαλαρή» αν θεωρήσουμε ότι όλες οι ακμές του γραφήματος βρίσκονται στην ίδια ισχυρά συνεκτική συνιστώσα και ότι όλες οι άλλες ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες αποτελούνται από απομονωμένες κορυφές.

Αλγόριθμος Αναζήτησης ενός Κυκλώματος του Euler

Υπάρχει αλγόριθμος που προσδιορίζει σταδιακά κυκλώματα τα οποία συνενώνονται για να δώσουν το ζητούμενο κύκλωμα του Euler.

Έστω ότι έχουν προσδιοριστεί δύο κυκλώματα $\mathbf{C_1}$ και $\mathbf{C_2}$ που έχουν κοινή κορυφή έστω $\mathbf{x_1}$, αλλά δεν περιέχουν κοινή ακμή.

Αν παραστήσουμε με $\mathbf{C_1=(x_0\,, u_1, u_2, \ldots, x_1, \ldots, u_k,\ \ x_0)}$ το ένα κύκλωμα και $\mathbf{C_2=(x_1, v_1, v_2, \ldots\,, v_m,\ \ x_1)}$ το δεύτερο κύκλωμα τότε η συνένωση των $\mathbf{C_1}$ και $\boldsymbol{C_2}$ δίνει το κύκλωμα:

$\rightarrow\ \ \mathbf{(x_0\,, u_1, u_2, \ldots, x_1, v_1, v_2, \ldots\,, v_m, x_1\,, \ldots\,, u_k, x_0)}$

Αλγόριθμος Αναζήτησης ενός Κυκλώματος του Euler

Περιγραφή της μεθόδου

Ξεκινώντας από οποιαδήποτε κορυφή η αναζήτηση του κυκλώματος γίνεται με μετακίνηση κατά την έννοια της κατεύθυνσης των ακμών, αποκλείοντας τη δίοδο από την ίδια ακμή δεύτερη φορά. Κάθε φορά που συναντάται μια κορυφή αυτή χρωματίζεται ως εξής:

- με πράσινο χρώμα αν πρόκειται για μια κορυφή που αποτελεί αφετηρία,
- με μπλέ χρώμα αν υπάρχει δυνατότητα διόδου εκ νέου από την κορυφή αυτή,
- με κόκκινο χρώμα αν δεν υπάρχει δυνατότητα διόδου εκ νέου από την κορυφή.

Η κατάληξη της μετακίνησης αυτής είναι η κορυφή που είναι χρωματισμένη με πράσινο χρώμα.

Αλγόριθμος Αναζήτησης ενός Κυκλώματος του Euler

Περιγραφή της μεθόδου (συνέχεια)

Τότε υπάρχουν δύο δυνατότητες:

- αν είναι δυνατή η εκ νέου αναχώρηση από την πράσινη κορυφή, τότε ξεκινάει η αναζήτηση ενός νέου κυκλώματος χωρίς αλλαγή του χρώματος της πράσινης κορυφής,
- στην περίπτωση που δεν είναι δυνατή μία νέα αναζήτηση με αφετηρία την πράσινη κορυφή τότε αυτή χρωματίζεται με κόκκινο χρώμα.

  Στη συνέχεια επιλέγεται, αν υπάρχει, μια κορυφή με μπλέ χρώμα η οποία χρωματίζεται με πράσινο χρώμα και ξεκινάει μια νέα αναζήτηση από αυτή την κορυφή.

Αλγόριθμος Αναζήτησης ενός Κυκλώματος του Euler

Περιγραφή της μεθόδου (συνέχεια)

Κάθε φορά που υπάρχει επιστροφή σε μία πράσινη κορυφή, εκτός της αρχικής, υπάρχουν δύο κυκλώματα που ξεκινούν από την ίδια πράσινη κορυφή.

Αυτά τα δύο κυκλώματα συνενώνονται σε ένα και η διαδικασία αναζήτησης κυκλώματος ξεκινάει εκ νέου από μία πράσινη ή από μία μπλέ κορυφή.

Αν δεν υπάρχει τέτοια κορυφή τότε ο αλγόριθμος έχει τελειώσει.

Αλγόριθμος Αναζήτησης ενός Κυκλώματος του Euler

Συμβολισμοί

- $\mathbf{G} = (\mathbf{X}, \mathbf{U})$ ένα κατευθυνόμενο γράφημα.
- $\mathbf{C}=(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k)$ είναι μια ακολουθία ακμών που περιγράφει ένα κύκλωμα. Αρχικά είναι κενή και στο τέλος περιέχει την ακολουθία των ακμών του ζητούμενου κυκλώματος.
- $\hat{\mathbf{U}}$: το σύνολο των ακμών του $\mathbf{G}$ που σε κάθε φάση δεν έχουν ακόμα ενταχθεί στο $\mathbf{C}$. Ισχύει η σχέση $\hat{\mathbf{U}}=\mathbf{U} - \mathbf{C}$.
- Τα χρώματα για μια κορυφή αντιστοιχούν στις ακόλουθες σχέσεις:
  - **κόκκινο:** $d^-_{(\mathrm{X},\hat{\mathrm{U}})}(\mathbf{x}) = 0$
  - **μπλέ:** $0 < d_{(\mathrm{X},\hat{\mathrm{U}})}(\mathbf{x}) < d_{\mathbf{G}}(\mathbf{x})$ **και** $d^+_{(\mathrm{X},\hat{\mathrm{U}})}(\mathbf{x}) < d^-_{(\mathrm{X},\hat{\mathrm{U}})}(\mathbf{x})$
  - **πράσινο:** $d^+_{(\mathrm{X},\hat{\mathrm{U}})}(\mathbf{x}) < d^-_{(\mathrm{X},\hat{\mathrm{U}})}(\mathbf{x})$

Περιγραφή του Αλγορίθμου

Βήμα (0) : Αρχικοποίηση. Δεν υπάρχει χρωματισμένη κορυφή στο γράφημα. Έστω ότι η κορυφή $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες. Η κορυφή $\mathbf{x}$ χρωματίζεται με πράσινο χρώμα και θέτουμε $\hat{\mathbf{U}} = \mathbf{U}$, $\mathbf{C} = \mathbf{C}'$ και $\mathbf{F} = \mathbf{0}$. Συνέχεια στο **Βήμα (1).**

Περιγραφή του Αλγορίθμου

Βήμα (0) : Αρχικοποίηση. Δεν υπάρχει χρωματισμένη κορυφή στο γράφημα. Έστω ότι η κορυφή $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες. Η κορυφή $\mathbf{x}$ χρωματίζεται με πράσινο χρώμα και θέτουμε $\hat{\mathbf{U}} = \mathbf{U}$, $\mathbf{C} = \mathbf{C}'$ και $\mathbf{F} = \mathbf{0}$. Συνέχεια στο **Βήμα (1).**

Βήμα (1) : Έστω $\mathbf{u} = (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \hat{\mathbf{U}}$. Η ακμή $\mathbf{u}$ αφαιρείται από το $\hat{\mathbf{U}}$ και προστίθεται στο $\mathbf{C}'$. Δηλαδή, $\mathbf{C}' = \mathbf{C}' \cup \{\mathbf{u}\}$.
Αν το $\mathbf{y}$ δεν είναι χρωματισμένο πράσινο τότε συνέχεια στο **Βήμα (2).**
Αν το $\mathbf{y}$ είναι χρωματισμένο πράσινο, τότε συνέχεια στο **Βήμα (3).**

Περιγραφή του Αλγορίθμου

Βήμα $(\mathbf{0})$: Αρχικοποίηση. Δεν υπάρχει χρωματισμένη κορυφή στο γράφημα. Έστω ότι η κορυφή $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες. Η κορυφή $\mathbf{x}$ χρωματίζεται με πράσινο χρώμα και θέτουμε $\hat{\mathbf{U}} = \mathbf{U}$, $\mathbf{C} = \mathbf{C}'$ και $\mathbf{F} = \mathbf{0}$. Συνέχεια στο **Βήμα $(\mathbf{1})$.**

Βήμα $(\mathbf{1})$: Έστω $\mathbf{u} = (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \hat{\mathbf{U}}$. Η ακμή $\mathbf{u}$ αφαιρείται από το $\hat{\mathbf{U}}$ και προστίθεται στο $\mathbf{C}'$. Δηλαδή, $\mathbf{C}' = \mathbf{C}' \cup \{\mathbf{u}\}$.
Αν το $\mathbf{y}$ δεν είναι χρωματισμένο πράσινο τότε συνέχεια στο **Βήμα $(\mathbf{2})$.**
Αν το $\mathbf{y}$ είναι χρωματισμένο πράσινο, τότε συνέχεια στο **Βήμα $(\mathbf{3})$.**

Βήμα $(\mathbf{2})$: Αν

- $\boldsymbol{d}^{-}_{(\mathbf{x},\hat{\mathbf{U}})}(\mathbf{y}) = \mathbf{0}$ τότε το $\mathbf{y}$ χρωματίζεται κόκκινο
- $\boldsymbol{d}^{-}_{(\mathbf{x},\hat{\mathbf{U}})}(\mathbf{y}) > \mathbf{0}$ τότε το $\mathbf{y}$ χρωματίζεται μπλε

Θέτουμε $\mathbf{x} = \mathbf{y}$, συνέχεια στο **Βήμα $(\mathbf{1})$**.

Περιγραφή του Αλγορίθμου

Βήμα (3) : Αν

- $d^{-}_{(\mathbf{x},\hat{\mathrm{U}})}(\mathbf{y}) = \mathbf{0}$ τότε το $\mathbf{y}$ χρωματίζεται κόκκινο .
  Συνέχεια στο **Βήμα (4).**

- $d^{-}_{(\mathbf{x},\hat{\mathrm{U}})}(\mathbf{y}) > \mathbf{0}$ τότε θέτουμε $\mathbf{x} = \mathbf{y}$.
  Συνέχεια στο **Βήμα (1)**.

Περιγραφή του Αλγορίθμου

Βήμα (3) : Αν,

- $d^{-}_{(\mathbf{x},\hat{\mathrm{U}})}(\mathbf{y}) = \mathbf{0}$ τότε το **y** χρωματίζεται κόκκινο .
  Συνέχεια στο **Βήμα (4).**

- $d^{-}_{(\mathbf{x},\hat{\mathrm{U}})}(\mathbf{y}) > \mathbf{0}$ τότε θέτουμε $\mathbf{x} = \mathbf{y}$.
  Συνέχεια στο **Βήμα (1)**.

Βήμα (4) : Αν,

- $\mathbf{F} = \mathbf{0}$, τότε θέτουμε $\mathbf{C} = \mathbf{C'}, \mathbf{C'} = \emptyset, \mathbf{F} = \mathbf{1}$.
  Συνέχεια στο **Βήμα (1)**.
- $\mathbf{F} = \mathbf{1}$, τότε τότε τα κυκλώματα $\mathbf{C}$ και $\mathbf{C'}$ έχουν κοινή την κορυφή $\mathbf{y}$.
  Συνένωση των $\mathbf{C}$ και $\mathbf{C'}$ σε ένα κύκλωμα $\mathbf{C} = \mathbf{C} \cup \mathbf{C'}$.
  Συνέχεια στο **Βήμα (5)**.

Περιγραφή του Αλγορίθμου

Βήμα (5) :

- Αν υπάρχει κορυφή χρωματισμένη μπλέ, έστω **x,** τότε αυτή η κορυφή χρωματίζεται πράσινη.
  Συνέχεια στο **Βήμα (1)**.
- Αν δεν υπάρχει τέτοια κορυφή τότε τέλος του αλγορίθμου.

→ Το ζητούμενο κύκλωμα περιγράφεται από την ακολουθία των ακμών του **C.**

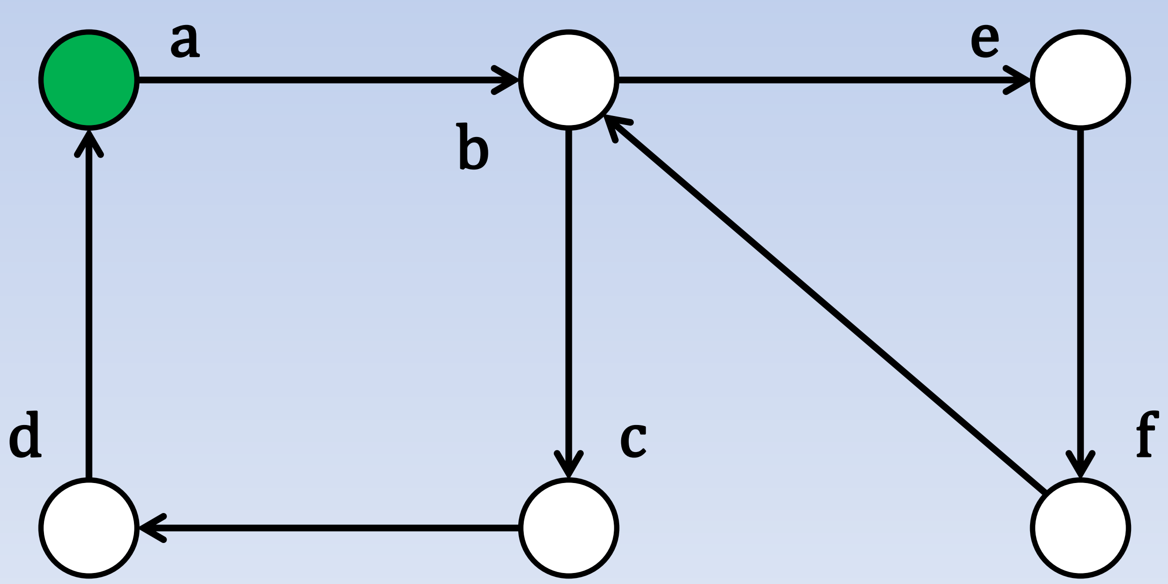
Ο αλγόριθμος που επιδεικνύεται στη συνέχεια είναι προσαρμοσμένος ειδικά σε μονο-κατευθυνόμενο γράφημα δηλ. οι συνδέσεις μεταξύ των κορυφών είναι μονής κατεύθυνσης.

Επίδειξη του Αλγορίθμου

Βήμα (0) : Αρχικοποίηση. Επιλέγεται η κορυφή $\mathbf{a \in X}$ και χρωματίζεται με πράσινο χρώμα.

$\hat{\mathbf{U}} = \mathbf{U} = \{\ \mathbf{(a, b), (b, c), (c, d), (d, a), (b, e), (e, f), (f, b)}\ \}$

$\mathbf{C = C' = \emptyset}$ και $\mathbf{F = 0.}$ Συνέχεια στο **Βήμα (1).**

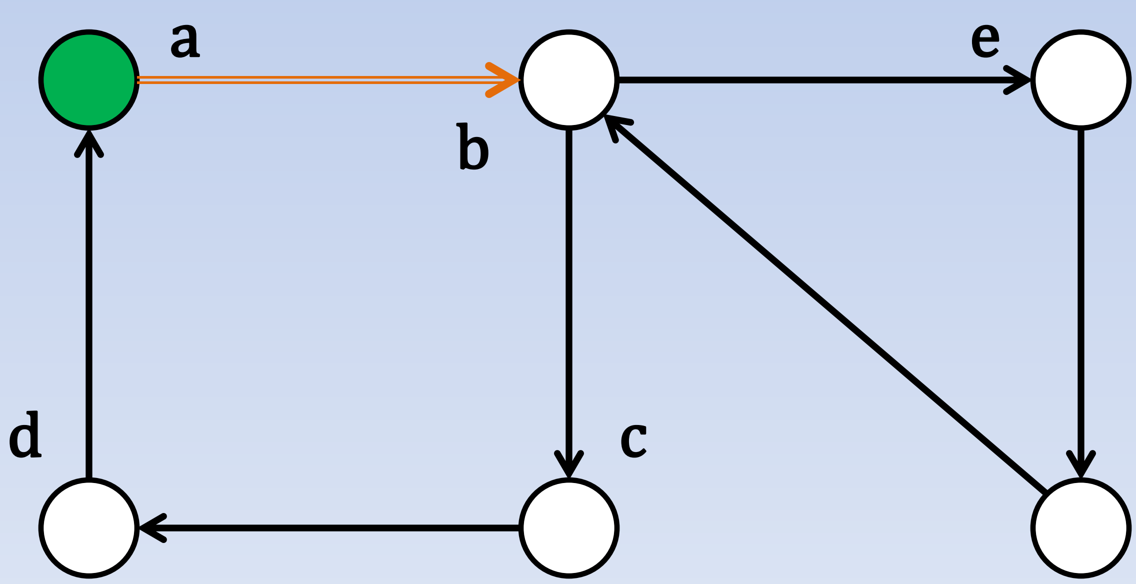


Επίδειξη του Αλγορίθμου

Βήμα (1) : Επιλέγεται η ακμή **(a, b) ∈ Û** η οποία αφαιρείται από το **Û** και προστίθεται στο **C΄**.

Û = { ~~(a, b)~~, (b, c), (c, d), (d, a), (b, e), (e, f), (f, b) }
C΄ = { (a, b) }

Το **b** δεν είναι χρωματισμένο πράσινο. Συνέχεια στο **Βήμα (2).**

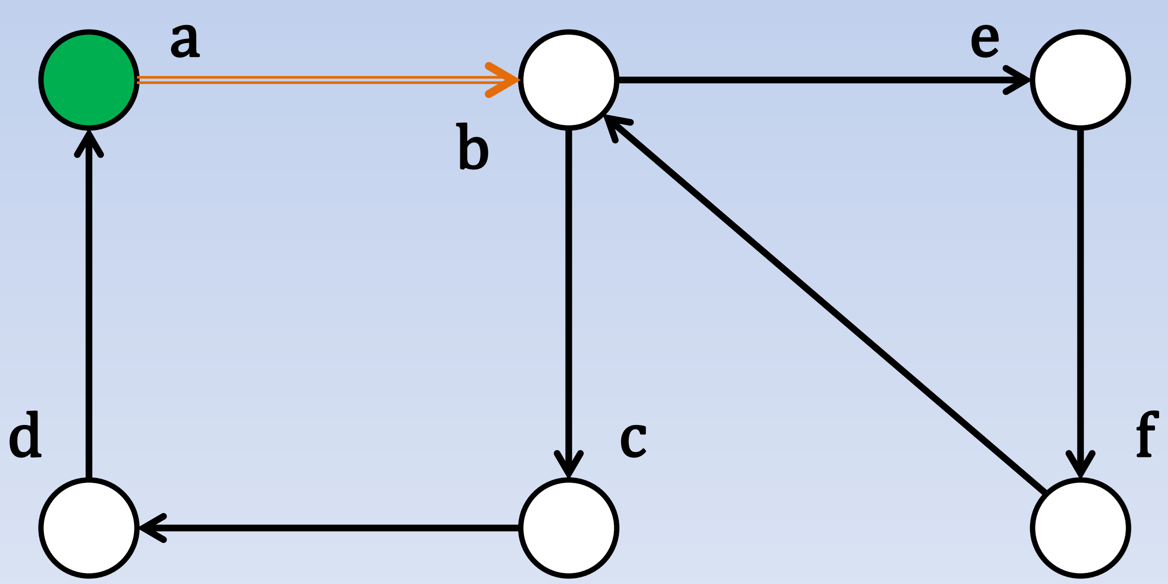


Επίδειξη του Αλγορίθμου

Βήμα (2) : $d^-_{(X,\hat{U})}(b) > 0$

$\hat{U}$ = { (b, c), (c, d), (d, a), (b, e), (e, f), (f, b) }

C′ = { (a, b) }



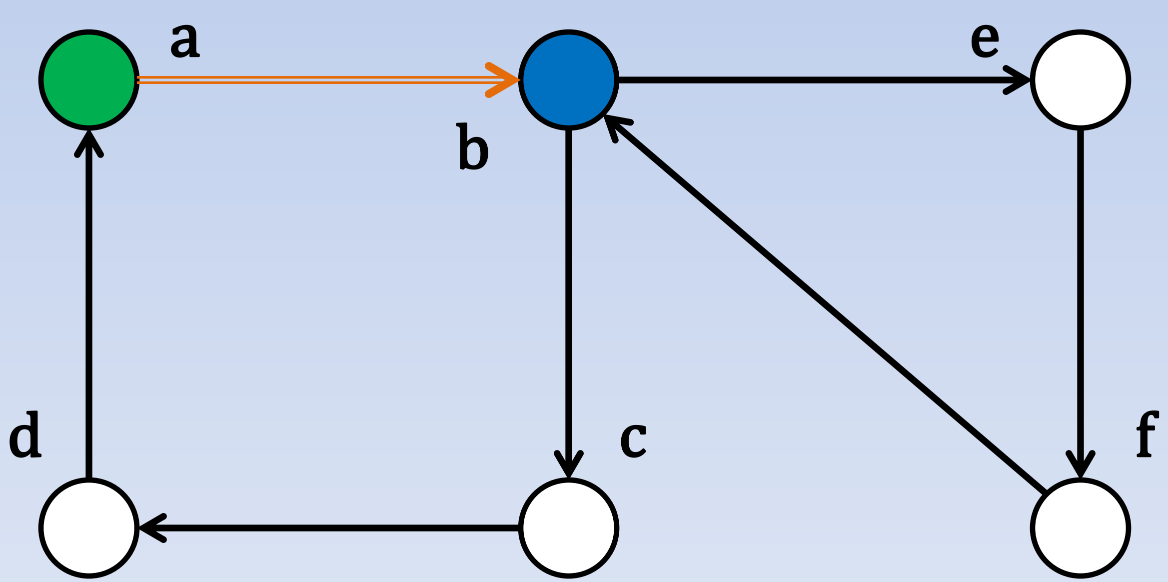
Επίδειξη του Αλγορίθμου

Βήμα (2) : $d^{-}_{(X,\hat{U})}(\mathbf{b}) > \mathbf{0}$ Το **b** χρωματίζεται μπλε.

Û = { (b, c), (c, d), (d, a), (b, e), (e, f), (f, b) }

C΄ = { (a, b) }

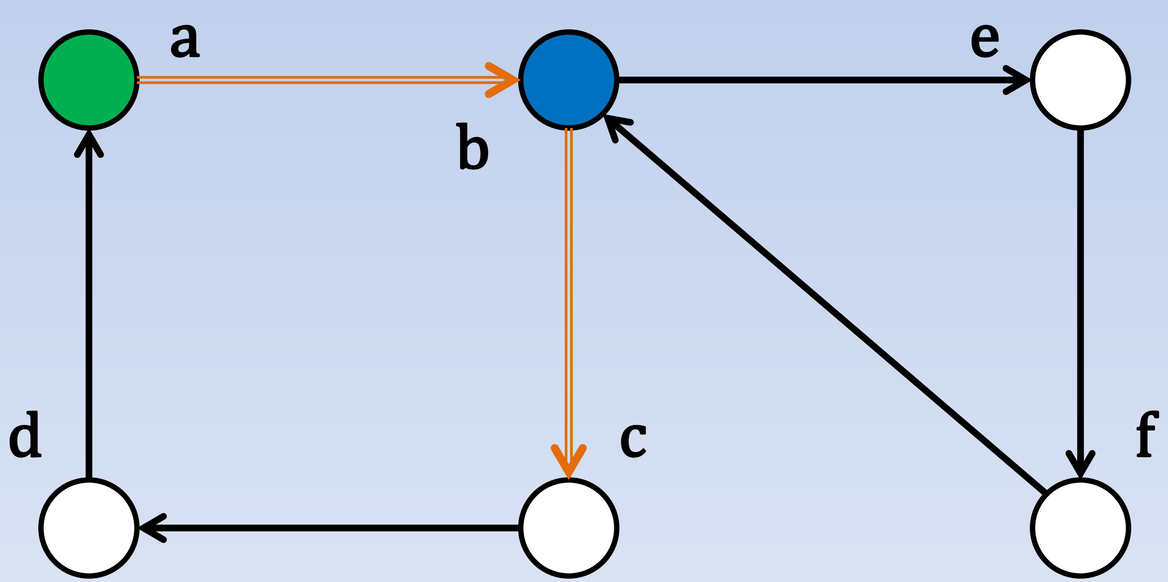
Θέτουμε **x = y** (**= b**). Συνέχεια στο **Βήμα** (1).



Επίδειξη του Αλγορίθμου

Βήμα (1) : Επιλέγεται η ακμή **(b, c) ∈ Û** η οποία αφαιρείται από το **Û** και προστίθεται στο **C΄**.

Û = { ~~(b, c),~~ (c, d), (d, a), (b, e), (e, f), (f, b) }
C΄ = { (a, b), (b, c) }
Το **c** δεν είναι χρωματισμένο πράσινο. Συνέχεια στο **Βήμα (2).**

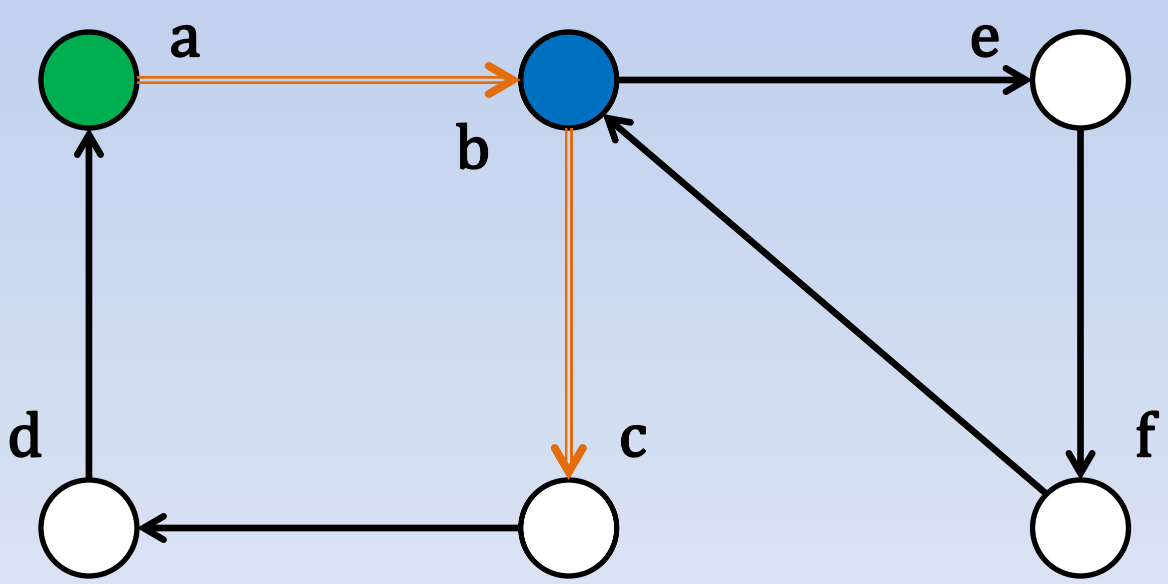


Επίδειξη του Αλγορίθμου

Βήμα (2) : $d^{-}_{(X,\hat{U})}(c) = 0$

$\hat{U}$ = { (c, d), (d, a), (b, e), (e, f), (f, b) }

C′ = { (a, b), (b, c) }



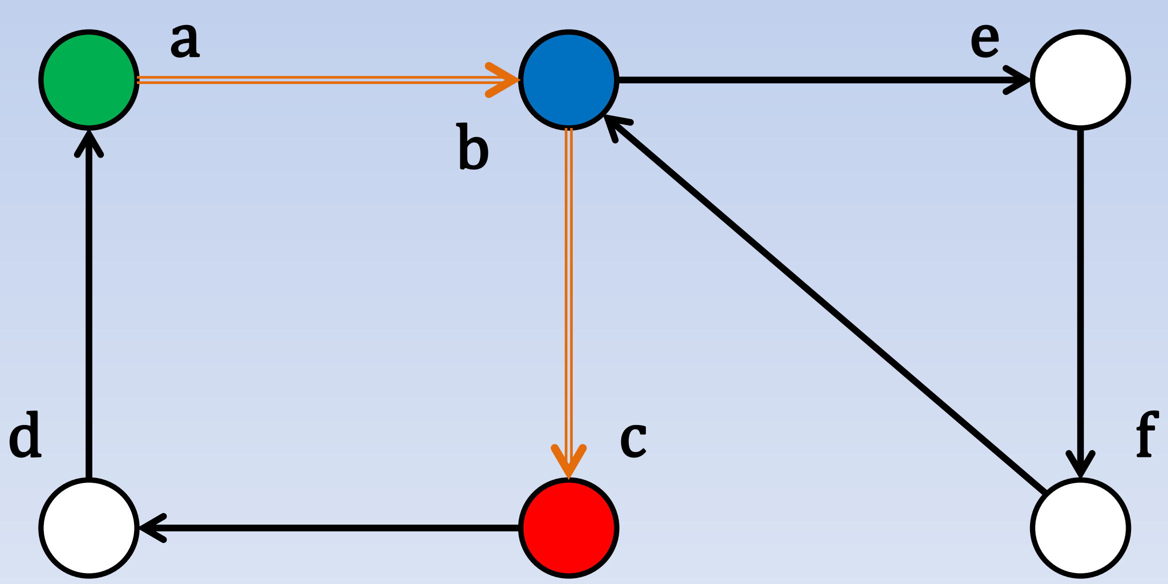
Επίδειξη του Αλγορίθμου

Βήμα (2) : $d^{-}_{(\mathrm{X},\hat{\mathrm{U}})}(\mathbf{c}) = \mathbf{0}$ Το **c** χρωματίζεται κόκκινο

$\hat{\mathrm{U}}$ = { (c, d), (d, a), (b, e), (e, f), (f, b) }

C′ = { (a, b), (b, c) }

Θέτουμε **x = y (= c)**. Συνέχεια στο **Βήμα (1).**

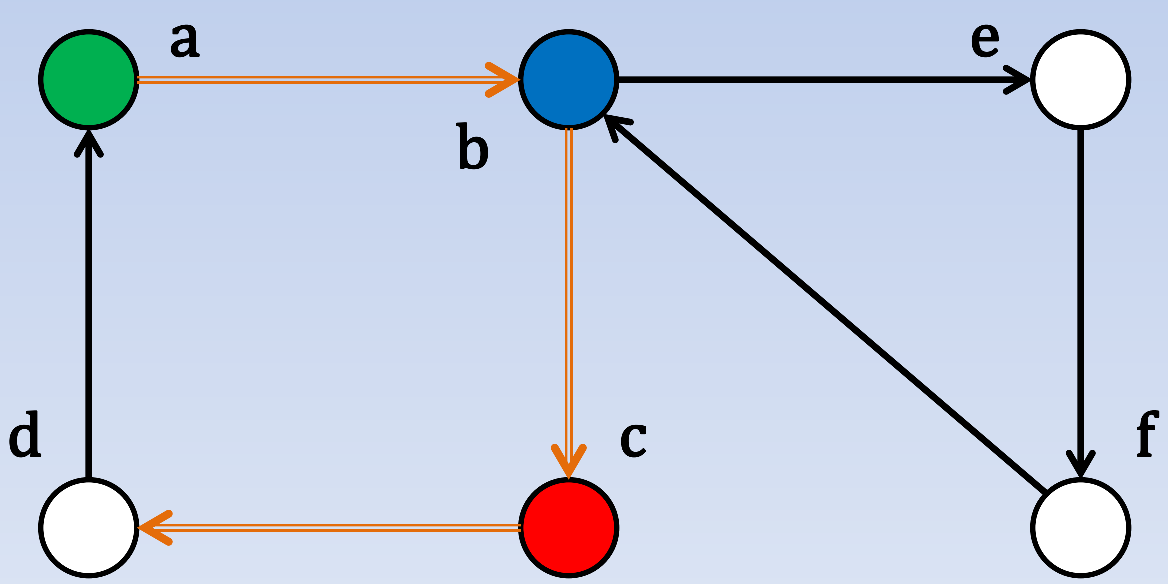


Επίδειξη του Αλγορίθμου

Βήμα (1) : Επιλέγεται η ακμή **(c, d) ∈ Û** η οποία αφαιρείται από το **Û** και προστίθεται στο **C΄**.

Û = { ~~(c, d)~~, (d, a), (b, e), (e, f), (f, b) }
C΄ = { (a, b), (b, c), (c, d) }

Το **d** δεν είναι χρωματισμένο πράσινο. Συνέχεια στο **Βήμα (2).**

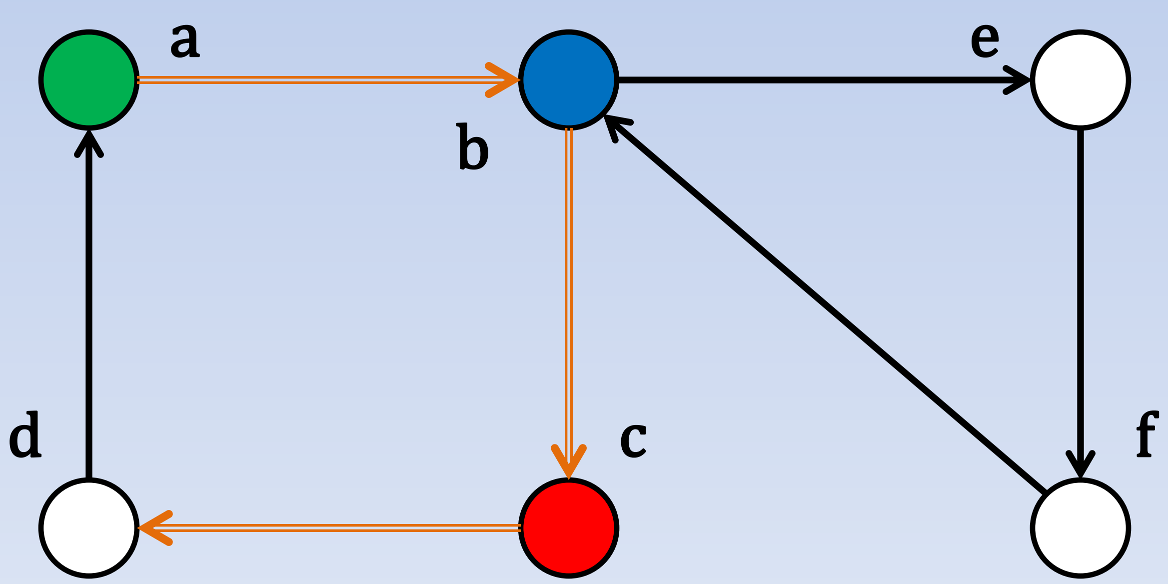


Επίδειξη του Αλγορίθμου

Βήμα (2) : $d^{-}_{(X,\hat{U})}(d) = 0$

$\hat{U} = \{ (d, a), (b, e), (e, f), (f, b) \}$

$C' = \{ (a, b), (b, c), (c, d) \}$



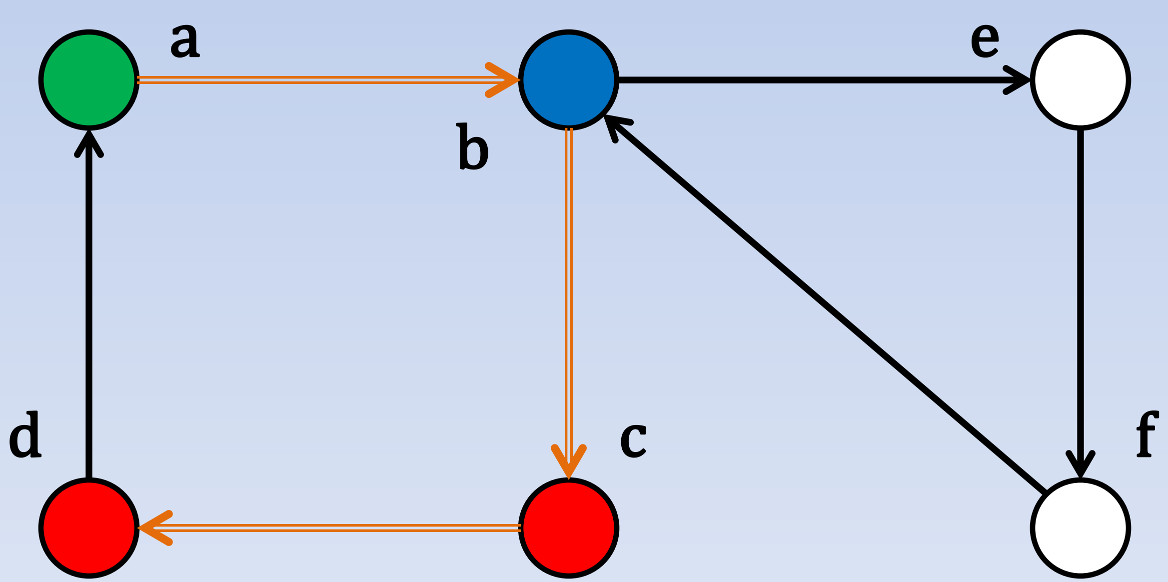
Επίδειξη του Αλγορίθμου

Βήμα (2) : $d^{-}_{(\mathrm{X},\hat{\mathrm{U}})}(\mathbf{d}) = \mathbf{0}$ Το **d** χρωματίζεται κόκκινο

Û = { (d, a), (b, e), (e, f), (f, b) }

C′ = { (a, b), (b, c), (c, d) }

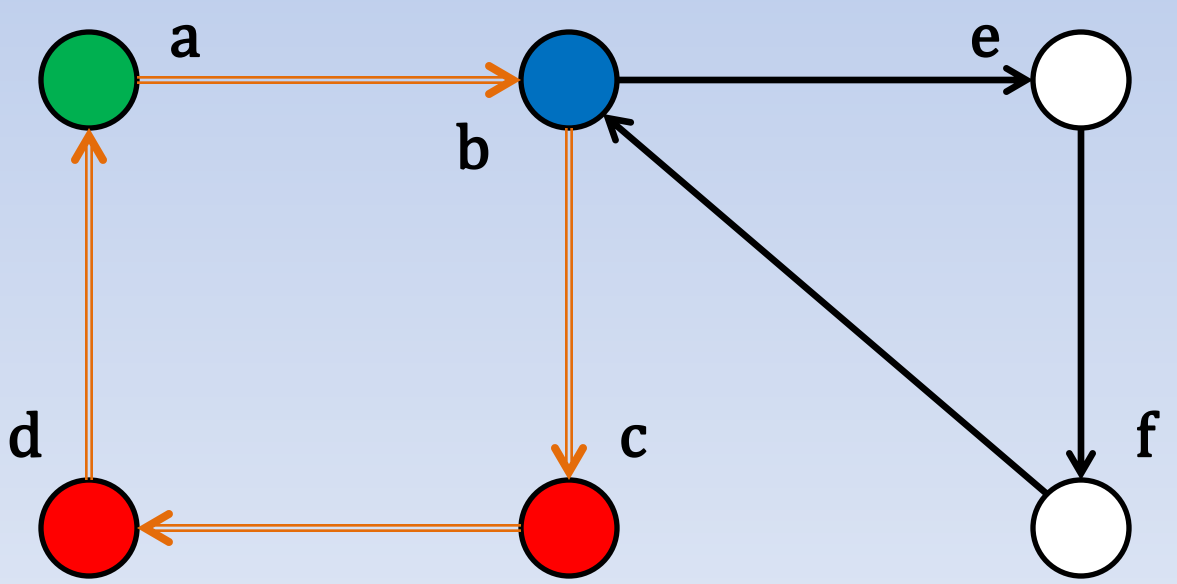
Θέτουμε **x = y (= d)**. Συνέχεια στο **Βήμα (1).**



Επίδειξη του Αλγορίθμου

Βήμα (1) : Επιλέγεται η ακμή **(d, a) ∈ Û** η οποία αφαιρείται από το **Û** και προστίθεται στο **C΄**.

Û = { ~~(d, a)~~, (b, e), (e, f), (f, b) }
C΄ = { (a, b) , (b, c), (c, d), (d, a) }
Το **a** είναι χρωματισμένο πράσινο. Συνέχεια στο **Βήμα (3).**



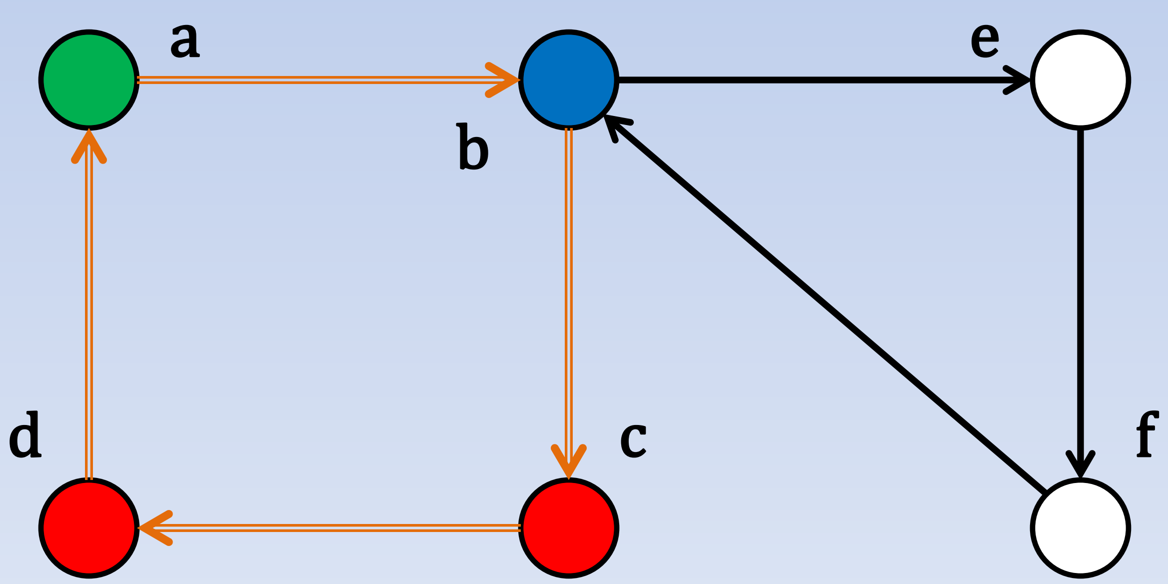
Επίδειξη του Αλγορίθμου

Βήμα (3) : $d^{-}_{(X,\hat{U})}(\mathbf{a}) = 0$

$\hat{U}$ = { (b, e), (e, f), (f, b) }

C′ = { (a, b), (b, c), (c, d), (d, a) }

Το **a** είναι χρωματισμένο πράσινο.



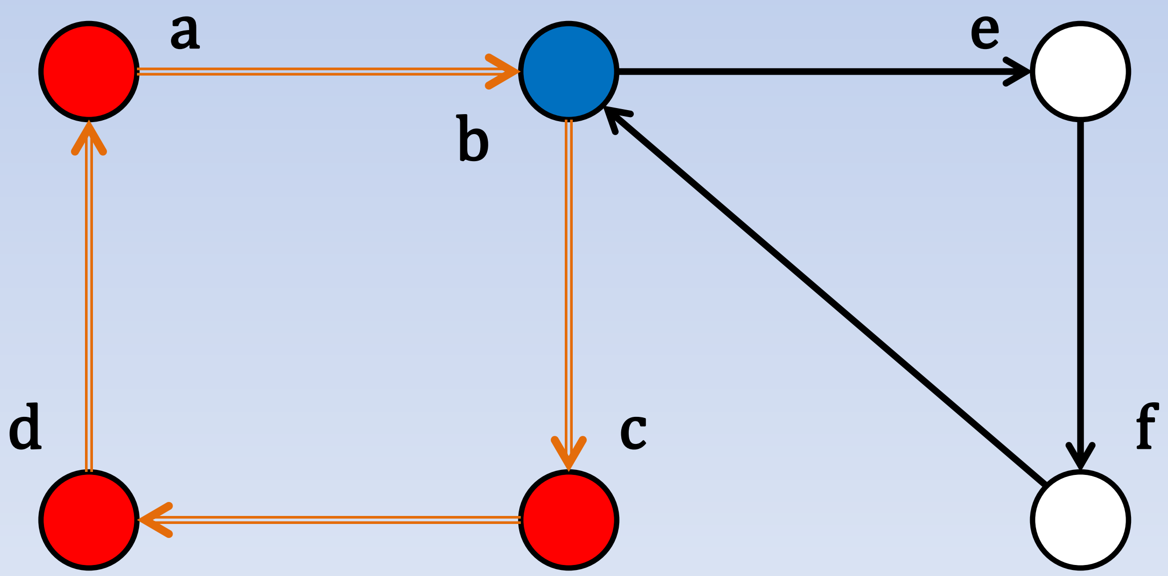
Επίδειξη του Αλγορίθμου

Βήμα (3) : $d^{-}_{(\mathbf{X},\hat{\mathrm{U}})}(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$ Το **a** χρωματίζεται κόκκινο

$\hat{U}$ = { (b, e), (e, f), (f, b) }

C΄ = { (a, b), (b, c), (c, d), (d, a) }

Συνέχεια στο **Βήμα (4).**



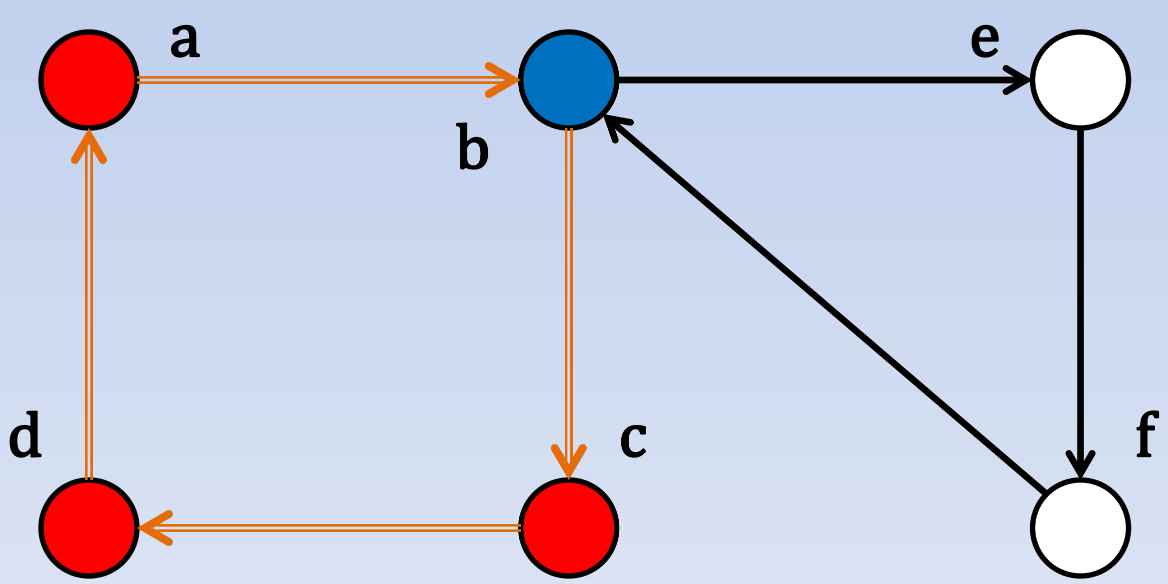
Επίδειξη του Αλγορίθμου

Βήμα (4) : $\mathbf{F = 0}$, Άρα $\mathbf{C = C' = \{ (a, b)\ , (b, c), (c, d), (d, a) \}}$ και $\mathbf{F = 1}$

$\mathbf{\hat{U} = \{ (b, e), (e, f), (f, b) \}}$

$\mathbf{C' = \emptyset}$

Συνέχεια στο **Βήμα (5).**



Επίδειξη του Αλγορίθμου

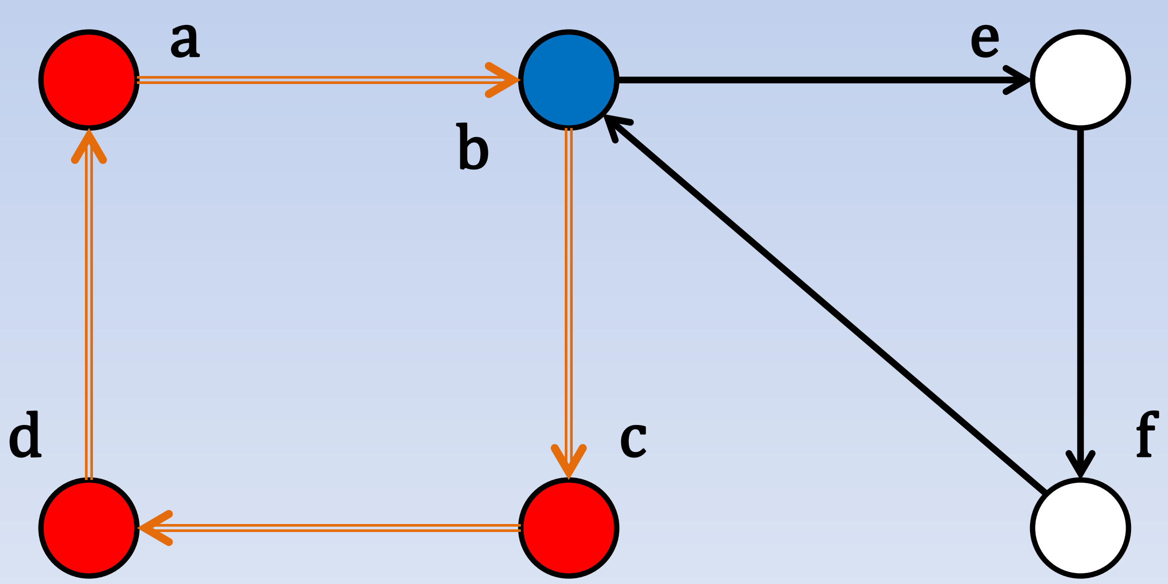
Βήμα (5) : Υπάρχει κορυφή χρωματισμένη με μπλε.

$C = \{ (a, b), (b, c), (c, d), (d, a) \}$

$F = 1$

$\hat{U} = \{ (b, e), (e, f), (f, b) \}$

$C' = \emptyset$



Επίδειξη του Αλγορίθμου

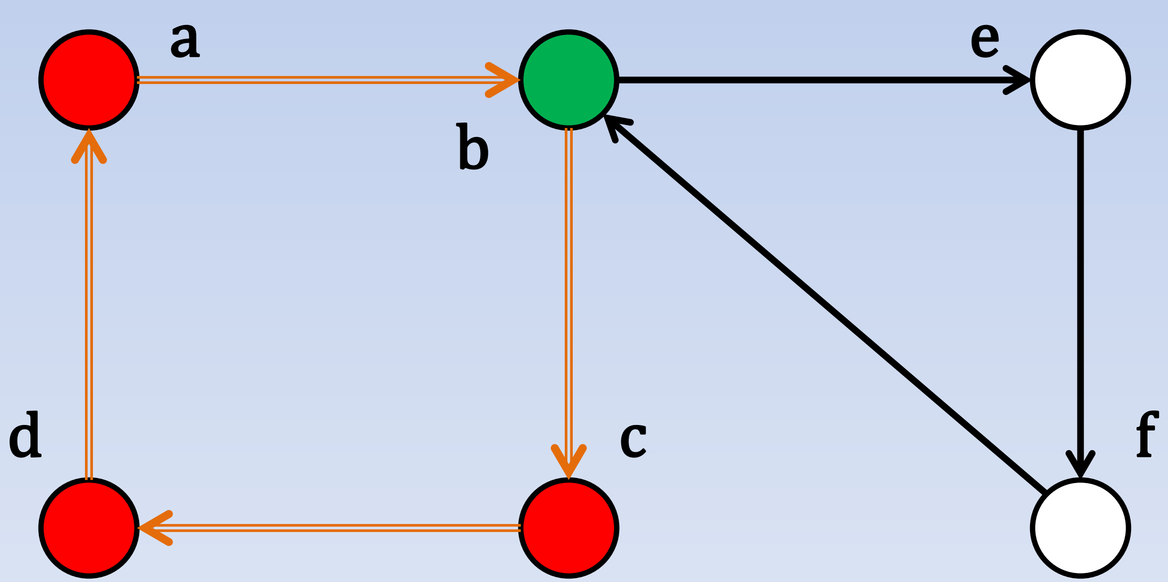
Βήμα (5) : Υπάρχει κορυφή χρωματισμένη με μπλε.

$\mathbf{C = \{ (a, b), (b, c), (c, d), (d, a) \}, F = 1}$

$\mathbf{\hat{U} = \{ (b, e), (e, f), (f, b) \}}$

$\mathbf{C' = \emptyset}$

Η κορυφή **b** χρωματίζεται πράσινη. Συνέχεια στο **Βήμα (1).**



Επίδειξη του Αλγορίθμου

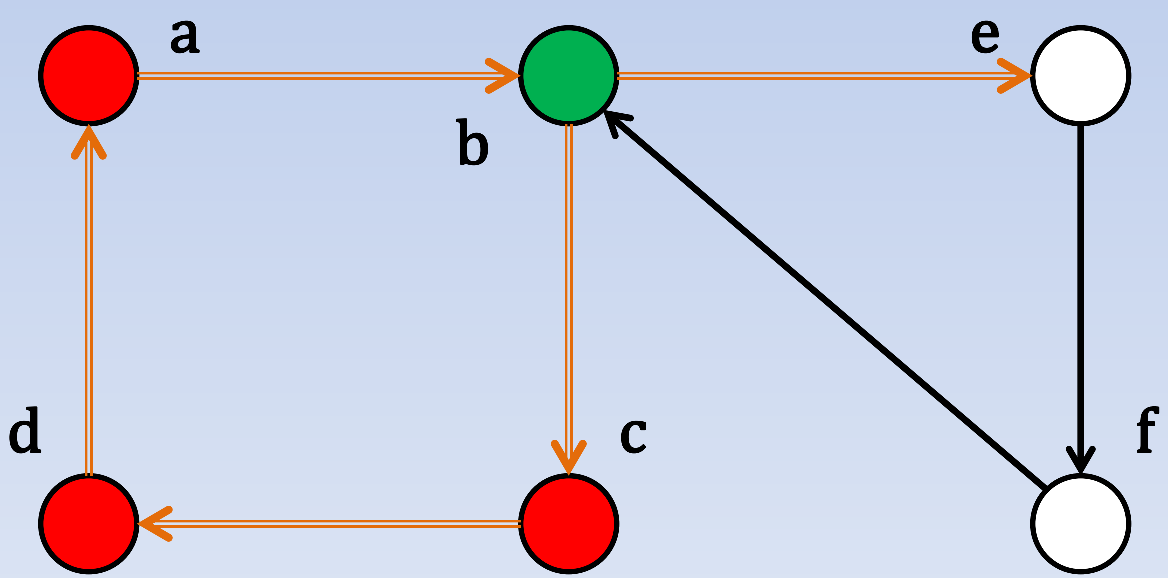
Βήμα (1) : Επιλέγεται η ακμή **(b, e) ∈ Û** η οποία αφαιρείται από το **Û** και προστίθεται στο **C΄**.

C = { (a, b) , (b, c), (c, d), (d, a) } , F = 1

Û = { ~~(b, e)~~, (e, f), (f, b) }

C΄ = { (b, e) }

Το **e** δεν είναι χρωματισμένο πράσινο. Συνέχεια στο **Βήμα (2).**



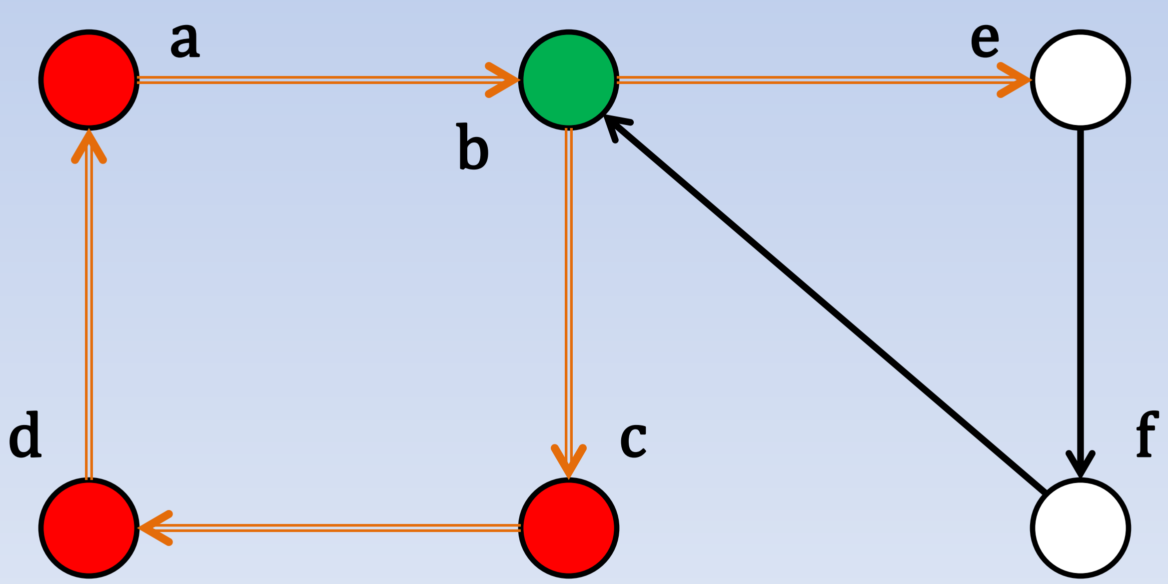
Επίδειξη του Αλγορίθμου

Βήμα (2) : $d^{-}_{(X,\hat{U})}(e) = 0$

$C = \{ (a, b), (b, c), (c, d), (d, a) \}$, $F = 1$

$\hat{U} = \{ (e, f), (f, b) \}$

$C' = \{ (b, e) \}$



Επίδειξη του Αλγορίθμου

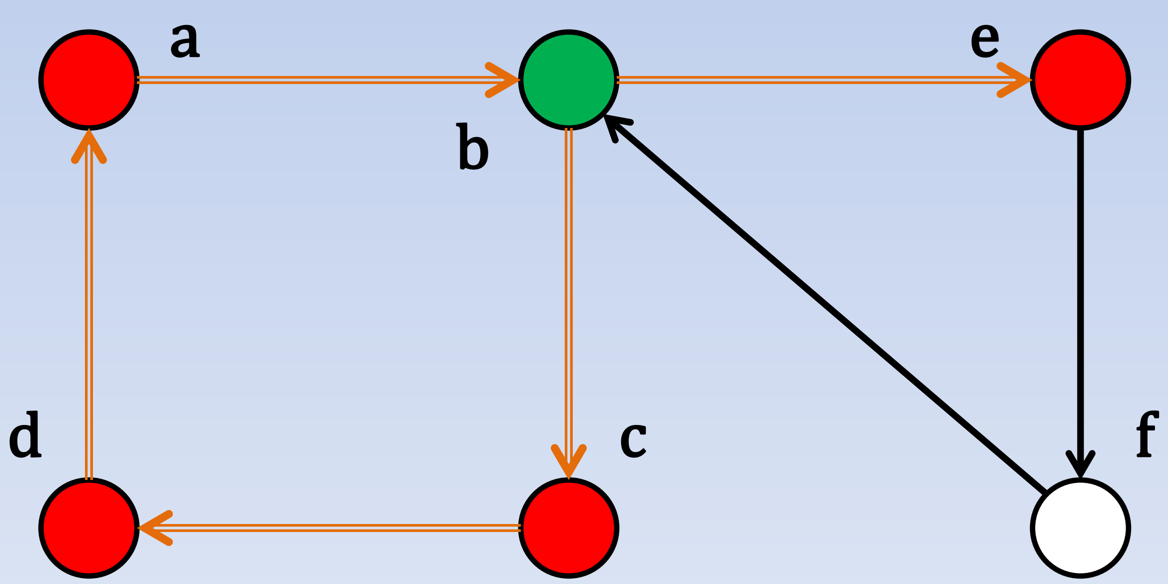
Βήμα (2) : $d^{-}_{(X,\hat{U})}(\mathbf{e}) = \mathbf{0}$ Το **e** χρωματίζεται κόκκινο

C = { (a, b) , (b, c), (c, d), (d, a) } , F = 1

Û = { (e, f), (f, b) }

C΄ = { (b, e) }

Θέτουμε **x = y** (**= e**). Συνέχεια στο **Βήμα** (1).



Επίδειξη του Αλγορίθμου

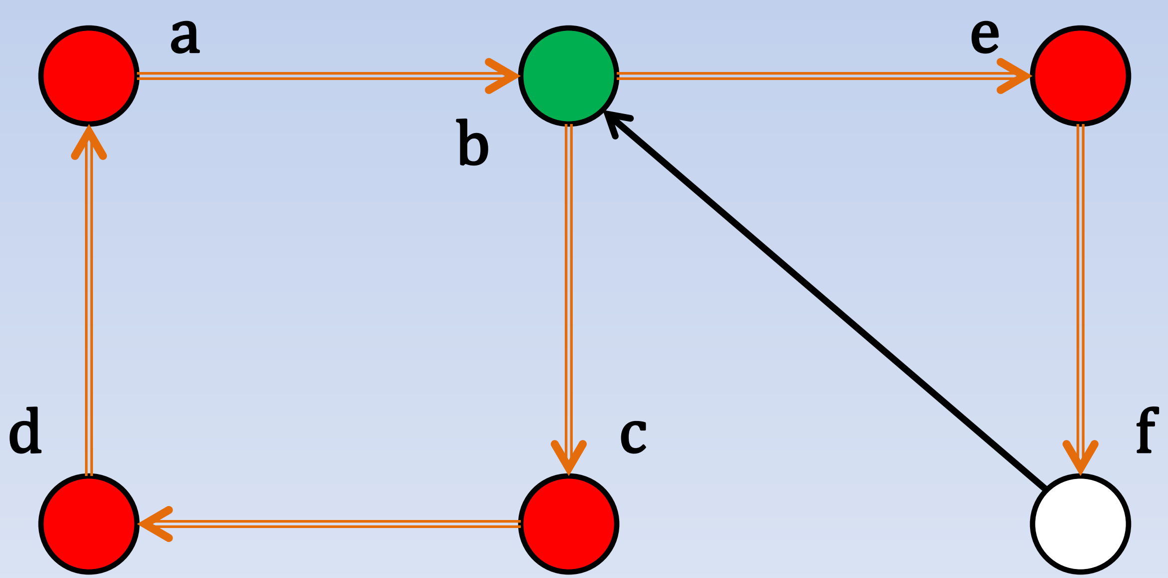
Βήμα (1) : Επιλέγεται η ακμή **(e, f) ∈ Û** η οποία αφαιρείται από το **Û** και προστίθεται στο **C΄**.

C = { (a, b) , (b, c), (c, d), (d, a) } , F = 1

Û = { ~~(e, f)~~, (f, b) }

C΄ = { (b, e), (e, f) }

Το **f** δεν είναι χρωματισμένο πράσινο. Συνέχεια στο **Βήμα (2).**



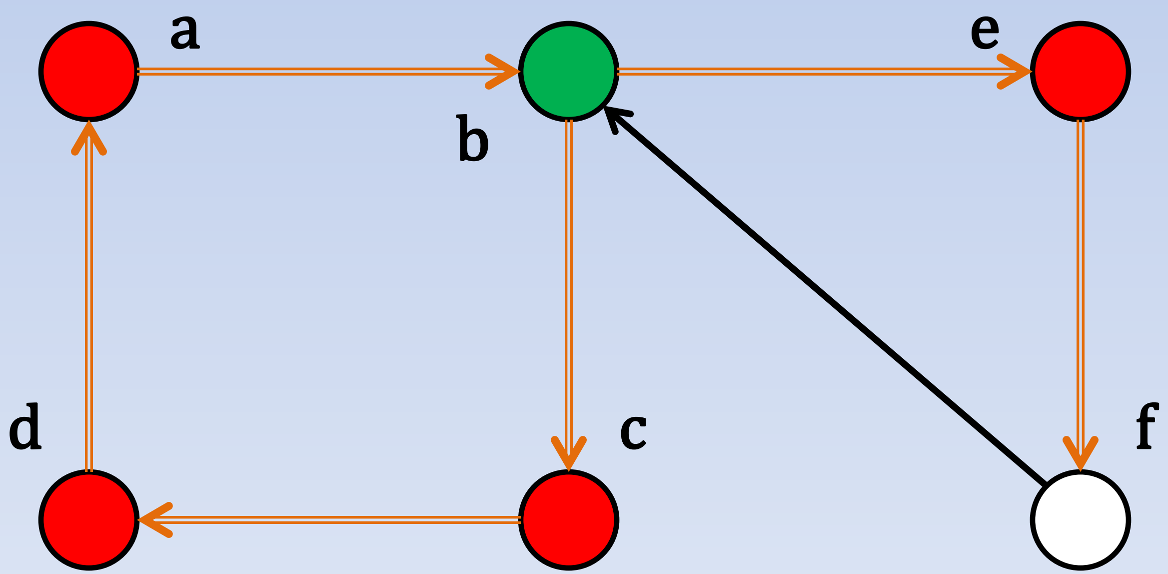
Επίδειξη του Αλγορίθμου

Βήμα (2) : $d^{-}_{(X,\hat{U})}(f) = 0$

$C = \{ (a, b), (b, c), (c, d), (d, a) \}$, $F = 1$

$\hat{U} = \{ (f, b) \}$

$C' = \{ (b, e), (e, f) \}$



Επίδειξη του Αλγορίθμου

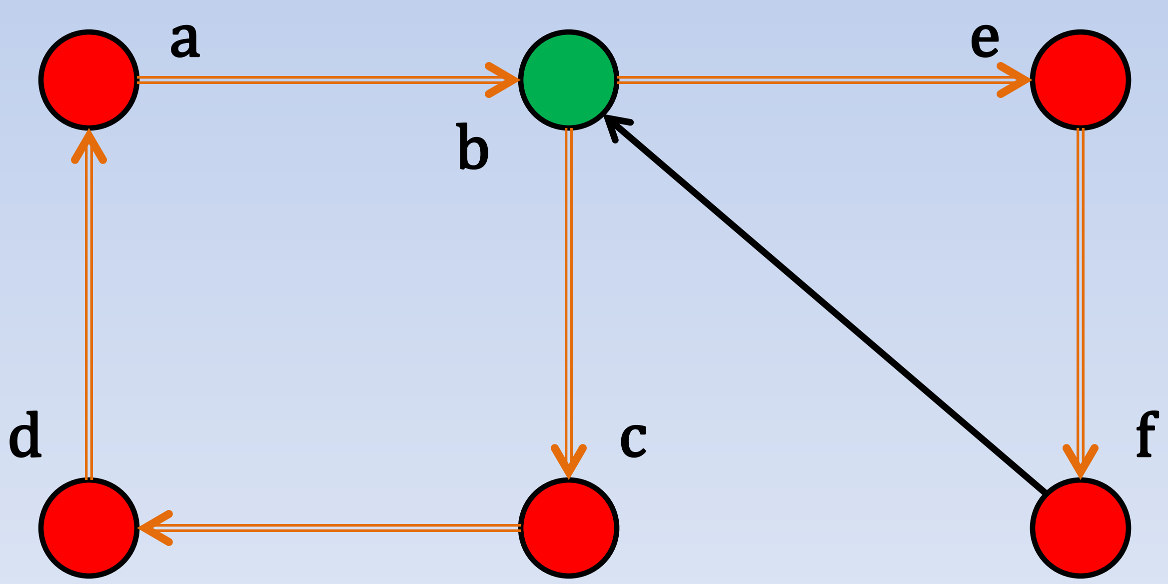
Βήμα (2) : $d^{-}_{(\mathbf{X},\hat{\mathrm{U}})}(\mathbf{f}) = \mathbf{0}$ Το **f** χρωματίζεται κόκκινο

C = { (a, b) , (b, c), (c, d), (d, a) } , F = 1

Û = { (f, b) }

C΄ = { (b, e), (e, f) }

Θέτουμε **x = y (= f)**. Συνέχεια στο **Βήμα (1).**



Επίδειξη του Αλγορίθμου

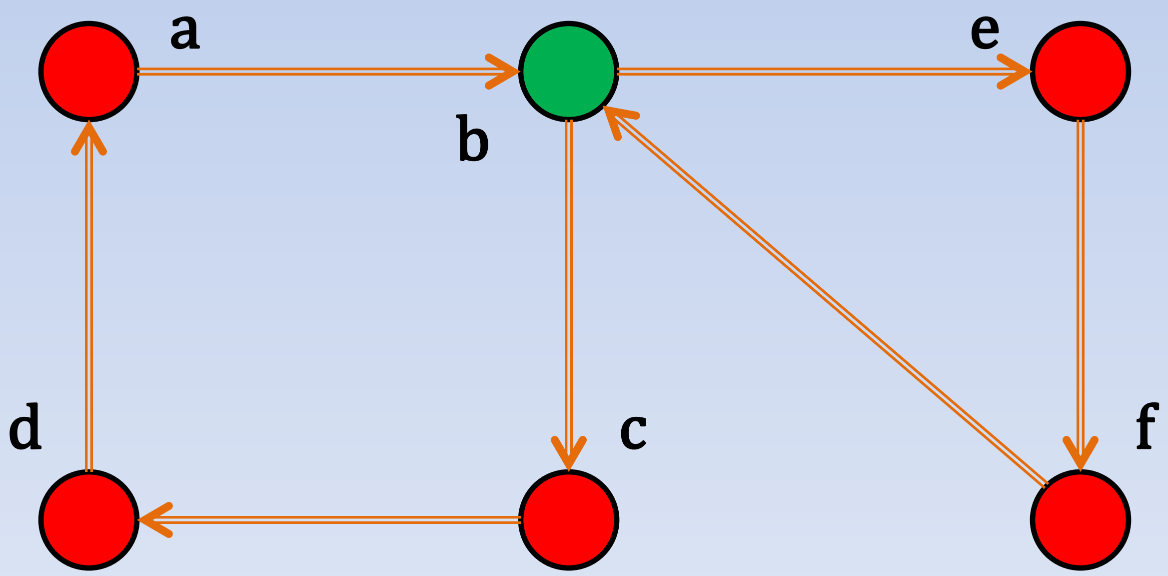
Βήμα (1) : Επιλέγεται η ακμή **(f, b) ∈ Û** η οποία αφαιρείται από το **Û** και προστίθεται στο **C'**.

C = { (a, b) , (b, c), (c, d), (d, a) } , F = 1

Û = { ~~(f, b)~~ }

C' = { (b, e), (e, f), (f, b) }

Το **b** είναι χρωματισμένο πράσινο. Συνέχεια στο **Βήμα (3).**



Επίδειξη του Αλγορίθμου

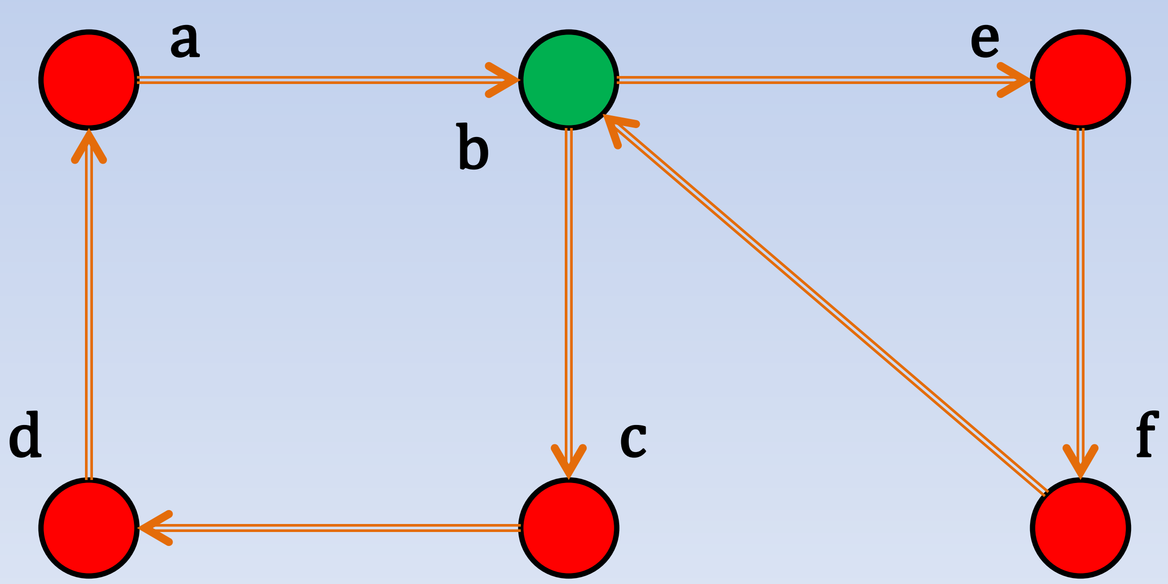
Βήμα (3) : $d^{-}_{(\mathbf{X},\hat{\mathrm{U}})}(\mathbf{b}) = \mathbf{0}$

C = { (a, b) , (b, c), (c, d), (d, a) } , F = 1

Û = { }

C΄ = { (b, e), (e, f), (f, b) }

Το **b** είναι χρωματισμένο πράσινο.



Επίδειξη του Αλγορίθμου

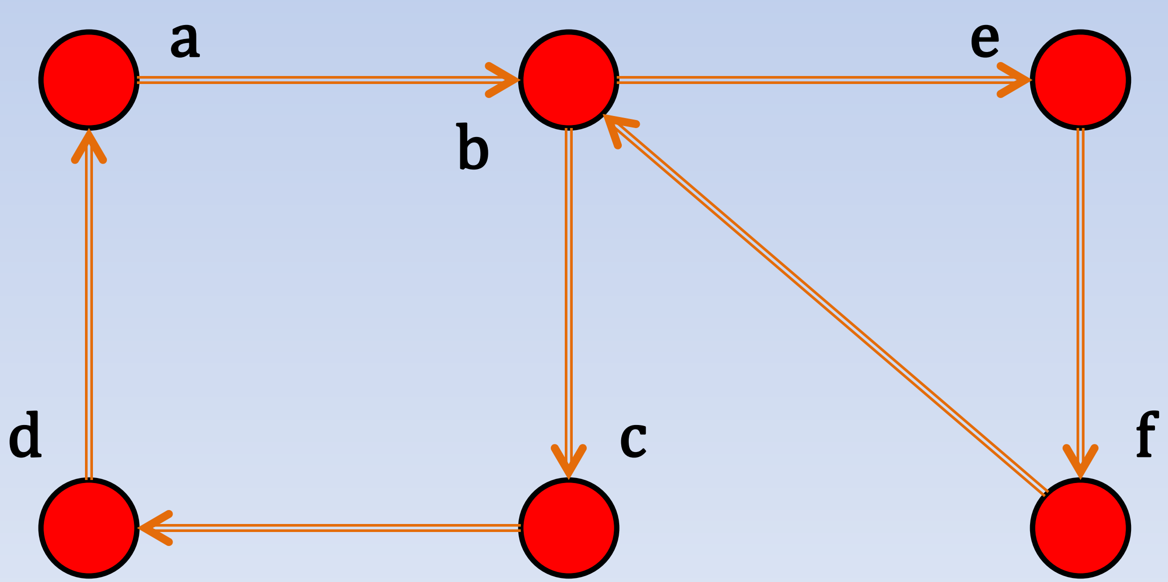
Βήμα (3) : $d^{-}_{(X,\hat{U})}(\mathbf{b}) = 0$ Το **b** χρωματίζεται κόκκινο

C = { (a, b) , (b, c), (c, d), (d, a) } , F = 1

Û = { }

C΄ = { (b, e), (e, f), (f, b) }

Συνέχεια στο **Βήμα (4).**



Επίδειξη του Αλγορίθμου

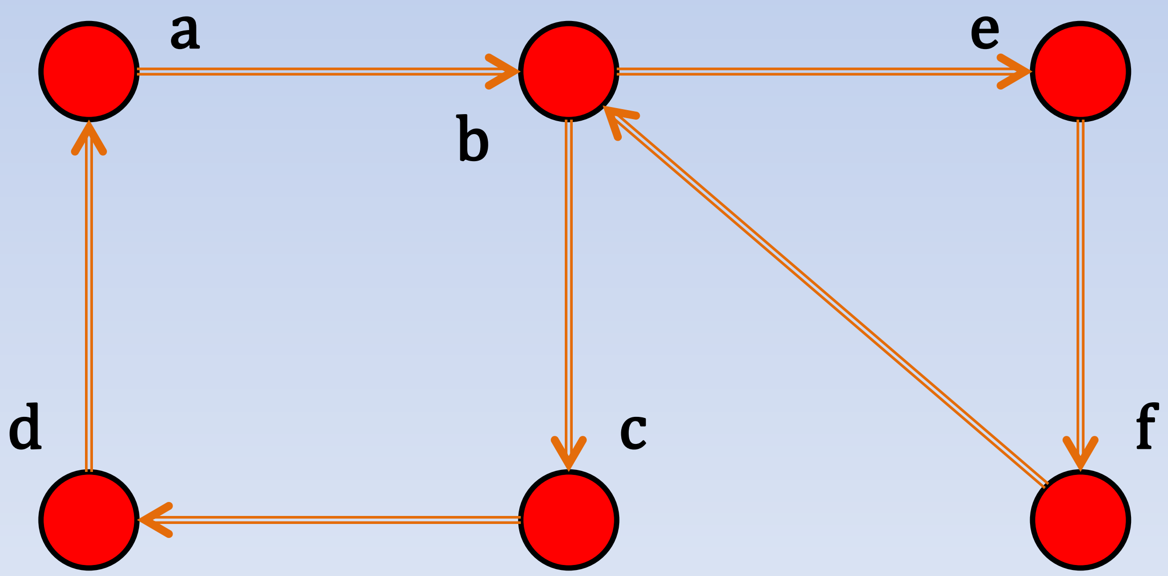
Βήμα (4) : $F = 1$, Άρα συνένωση των **C** και **C΄** στην κοινή κορυφή **b**

$C = \{ (a, b), (b, c), (c, d), (d, a) \}, \ F = 1$

$\hat{U} = \{ \}$

$C' = \{ (b, e), (e, f), (f, b) \}$

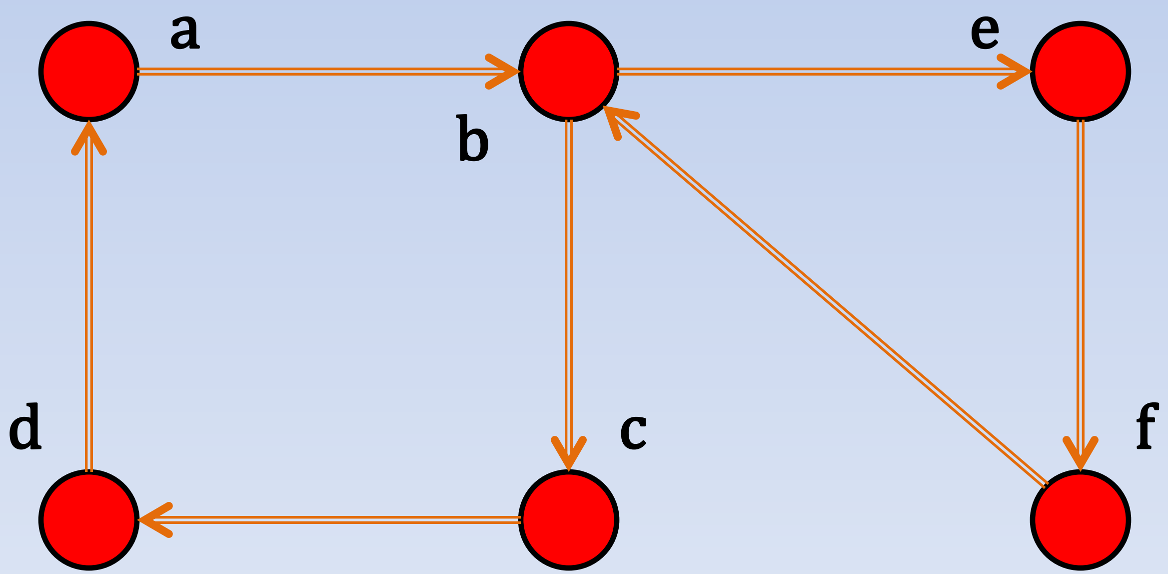
Συνέχεια στο **Βήμα (5).**



Επίδειξη του Αλγορίθμου

Βήμα (5) : Τέλος του αλγορίθμου.

C = { (a, b) , (b, e), (e, f), (f, b), (b, c), (c, d), (d, a) }



Μονοπάτια και Κυκλώματα Hamilton

Ορισμός

Έστω $\mathbf{G} = (\mathbf{X}, \mathbf{U})$ ένα γράφημα (κατεθυνόμενο ή μη). Ένα μονοπάτι ή ένα κύκλωμα του Hamilton είναι μια ακολουθία ακμών η οποία διέρχεται από κάθε κορυφή του γραφήματος μία και μόνο μία φορά.

Να σημειωθεί εδώ ότι η ύπαρξη ενός μονοπατιού ή κυκλώματος του Hamilton έχει ως απαραίτητη προϋπόθεση το γράφημα να αποτελείται από μιά συνεκτική (ή ισχυρά συνεκτική) συνιστώσα.

Θεώρημα

Σε ένα κατευθυνόμενο πλήρες γράφημα υπάρχει πάντα ένα μονοπάτι του Hamilton.

Μονοπάτια και Κυκλώματα Hamilton

Σημείωση

Για ένα οποιοδήποτε γράφημα έστω $\mathbf{G} = (\mathbf{X}, \mathbf{U})$ δεν υπάρχει γενική μέθοδος απόδειξης ότι στο γράφημα αυτό δεν υπάρχει ένα μονοπάτι ή ένα κύκλωμα του Hamilton.

Εξ άλλου το πρόβλημα εύρεσης ενός μονοπατιού ή κυκλώματος του Hamilton βρίσκει άμεση εφαρμογή στο πρόβλημα του περιοδεύοντος πωλητή. Το πρόβλημα αυτό έχει δειχτεί ότι δεν επιλύεται σε πολυωνυμικό χρόνο.

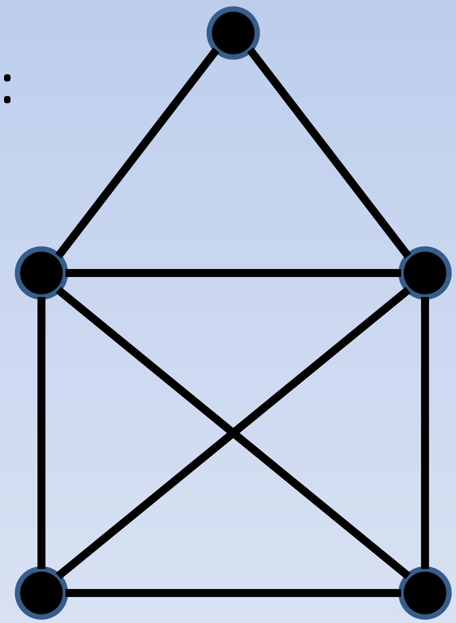
Οι πιό πρόσφατες τεχνικές επίλυσης χρησιμοποιούν μεθόδους Υπολογιστικής Νοημοσύνης και Μηχανικής Μάθησης.

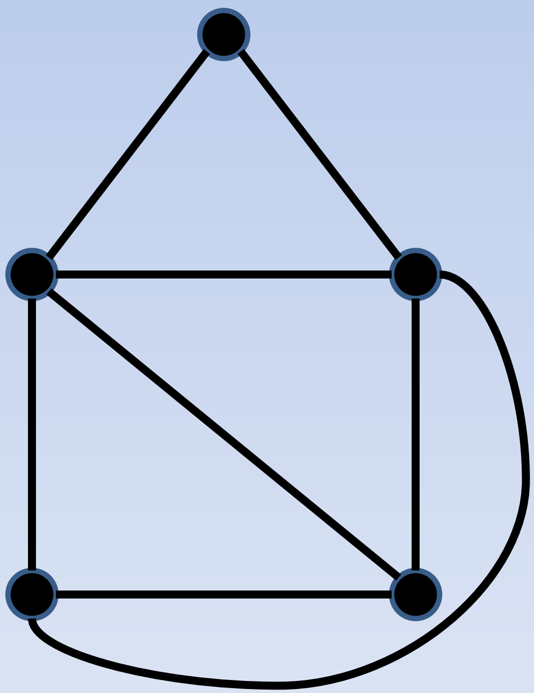
Επίπεδα Γραφήματα

Ορισμός

Ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα $\mathbf{G} = (\mathbf{X}, \mathbf{U})$ ονομάζεται επίπεδο (planar) όταν μπορεί να σχεδιαστεί στο επίπεδο ώστε οι ακμές του να μην τέμνονται σε κανένα άλλο σημείο εκτός από τις κοινές κορυφές τους.

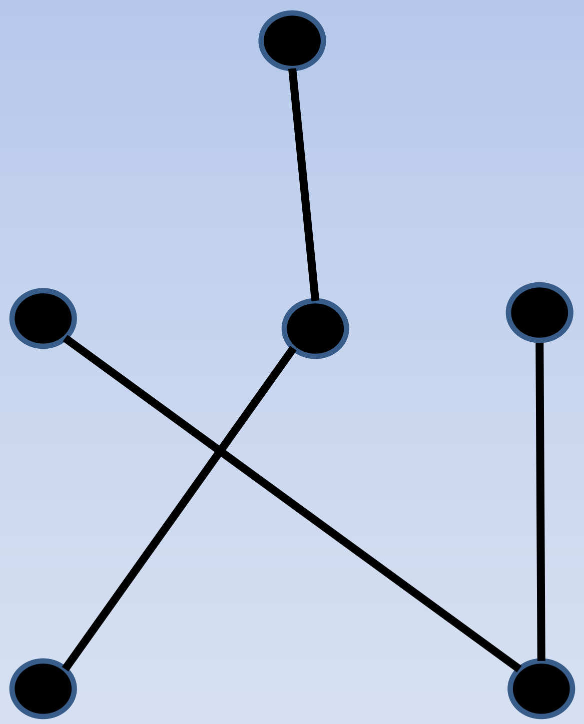
Παράδειγμα:



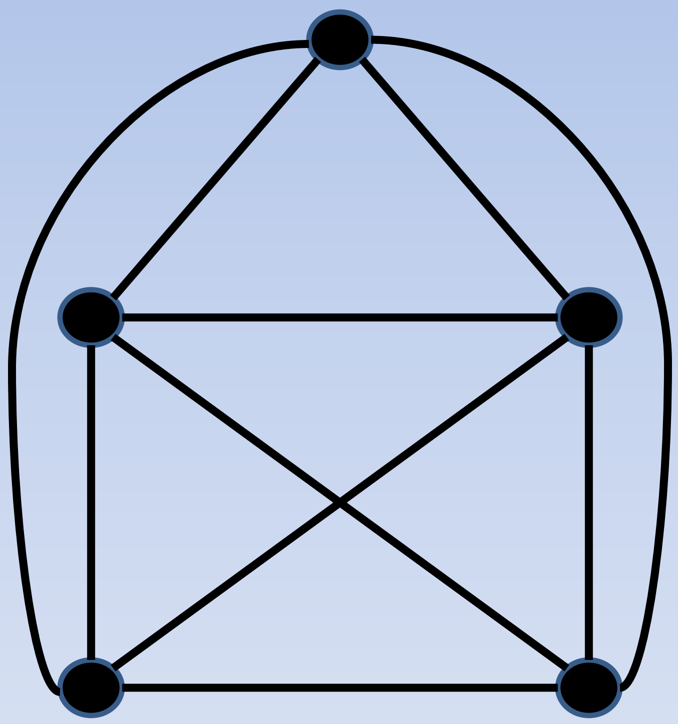


Επίπεδα Γραφήματα

Παράδειγμα

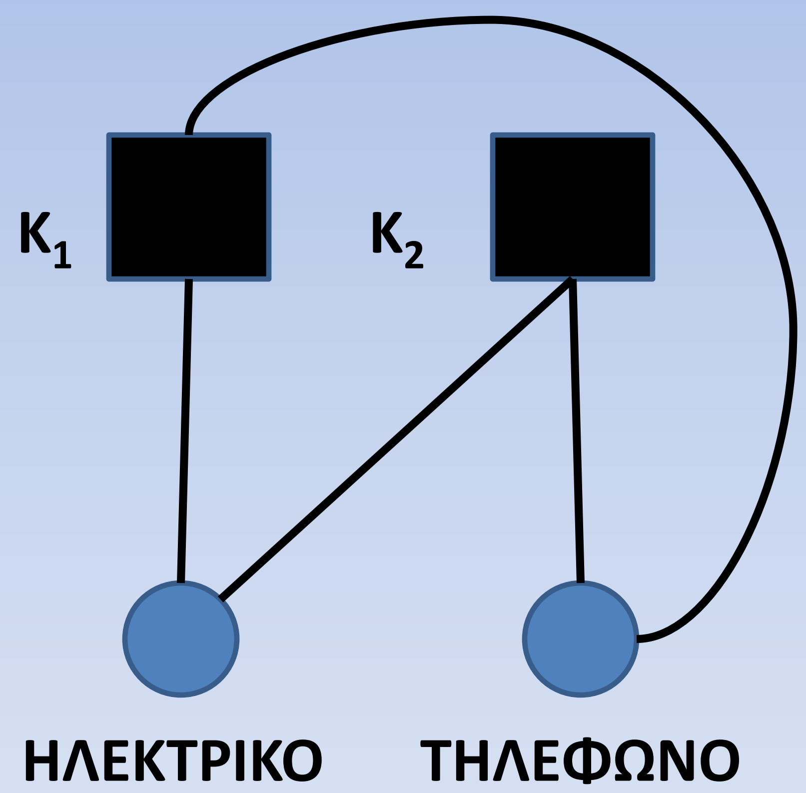


Αντιπαράδειγμα



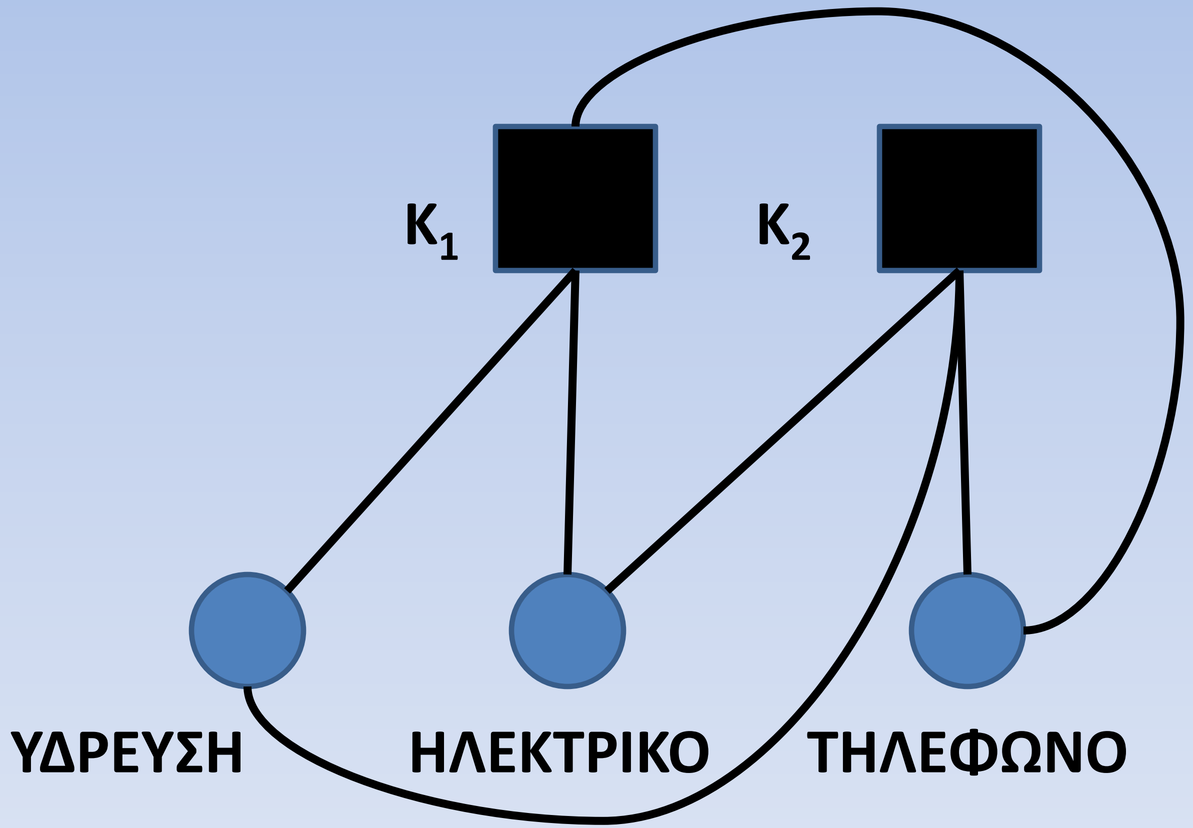
Επίπεδα Γραφήματα

Παράδειγμα εφαρμογής:



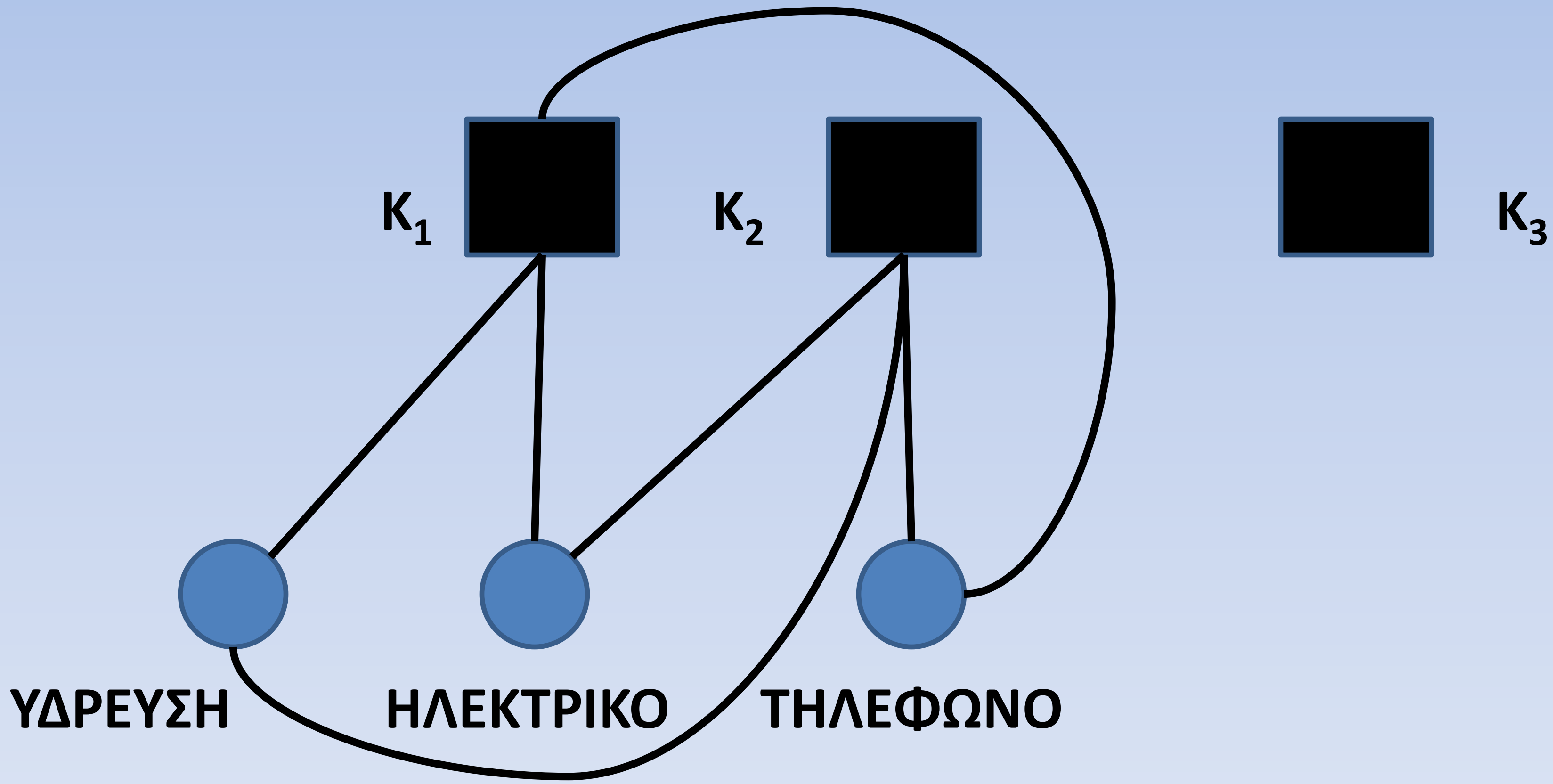
Επίπεδα Γραφήματα

Παράδειγμα εφαρμογής:



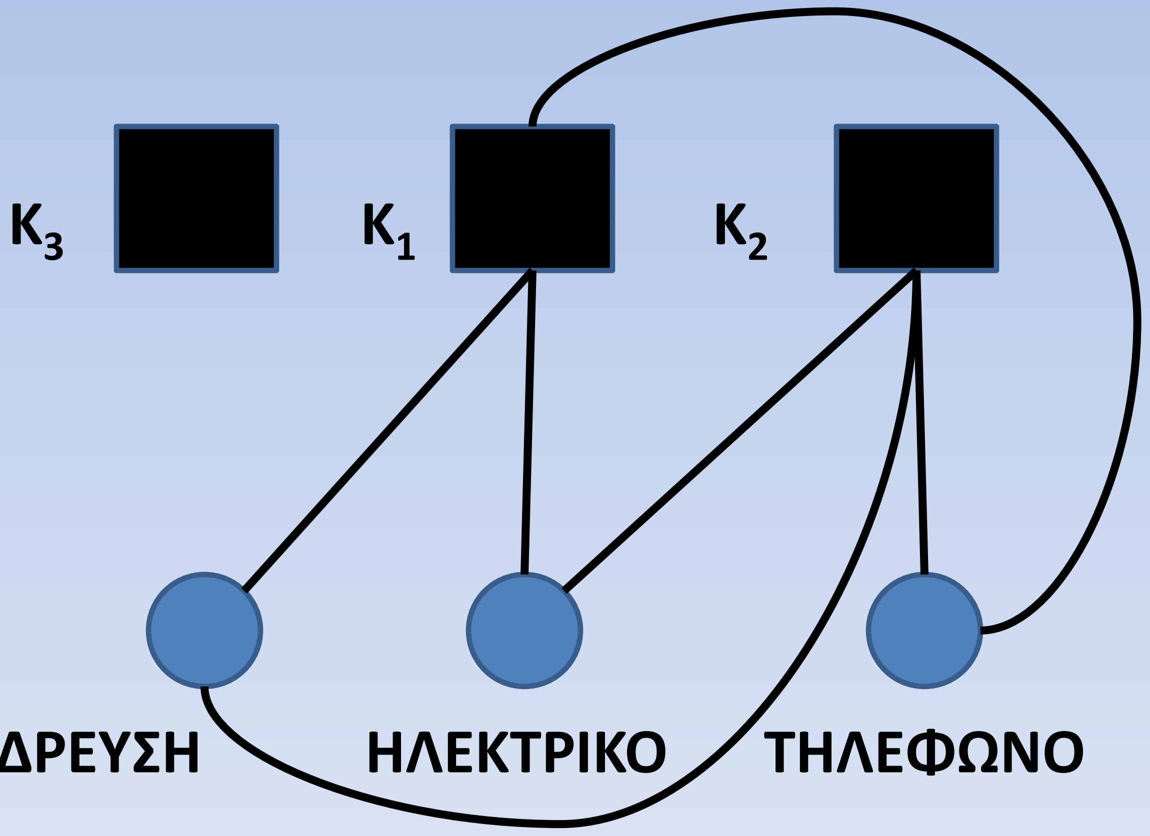
Επίπεδα Γραφήματα

Παράδειγμα εφαρμογής:



Επίπεδα Γραφήματα

Παράδειγμα εφαρμογής:



Επίπεδα Γραφήματα

Ορισμός

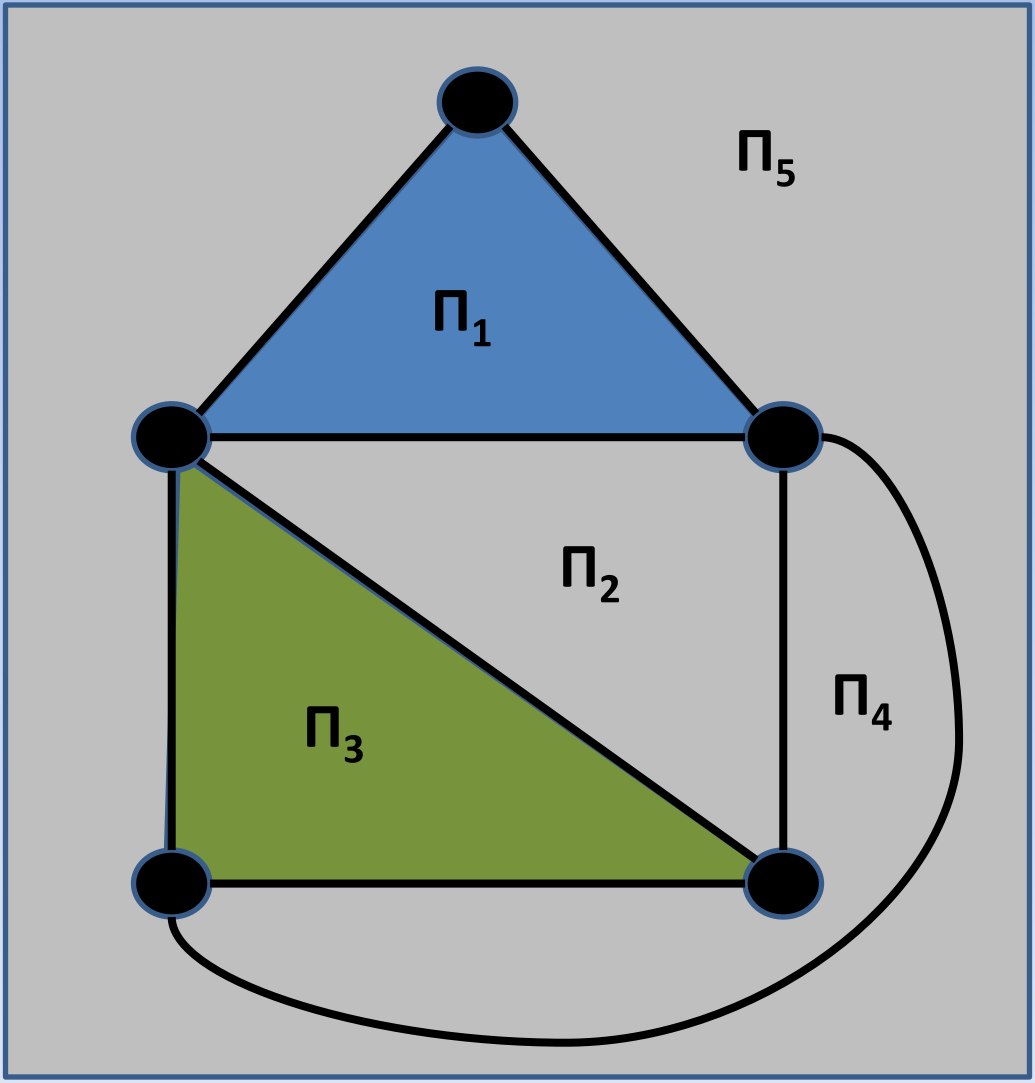
Έστω $\mathbf{G} = (\mathbf{X}, \mathbf{U})$ ένα επίπεδο γράφημα. Μία περιοχή είναι το τμήμα του επιπέδου μεταξύ δύο ή περισσοτέρων ακμών.

Πρακτικά, η περιοχή προκύπτει αν «κοπεί» το επίπεδο κατά μήκος των ακμών του γραφήματος.

Ως περιοχή θεωρείται και το «άπειρου εμβαδού» τμήμα του επιπέδου εκτός των ακμών του γραφήματος.

Επίπεδα Γραφήματα

Παράδειγμα:



Επίπεδα Γραφήματα

Θεώρημα: Τύπος του Euler για επίπεδα γραφήματα

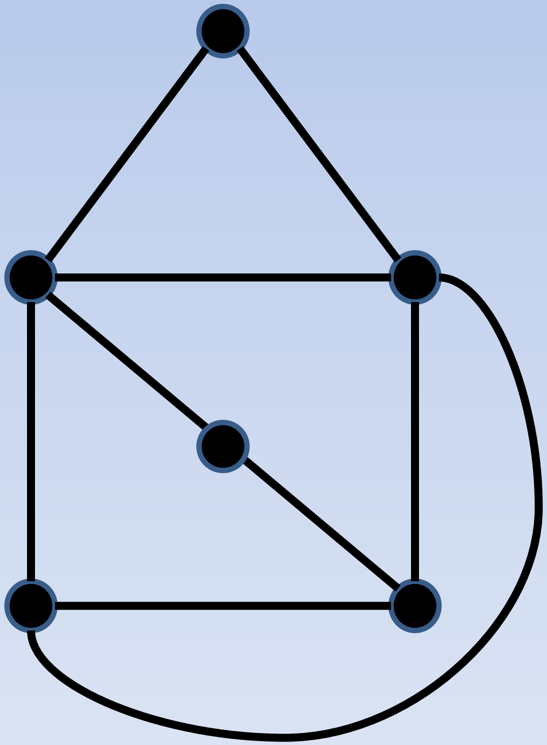
Έστω $\mathbf{G} = (\mathbf{X}, \mathbf{U})$ ένα συνεκτικό επίπεδο γράφημα. Αν συμβολίσουμε με $\mathbf{v}$, $\mathbf{e}$ και $\mathbf{r}$ αντίστοιχα το πλήθος των κορυφών, $\mathbf{v=|X|}$, το πλήθος των ακμών, $\mathbf{e=|U|}$, και το πλήθος των περιοχών του γραφήματος τότε ισχύει η σχέση $\mathbf{v - e + r = 2}$.

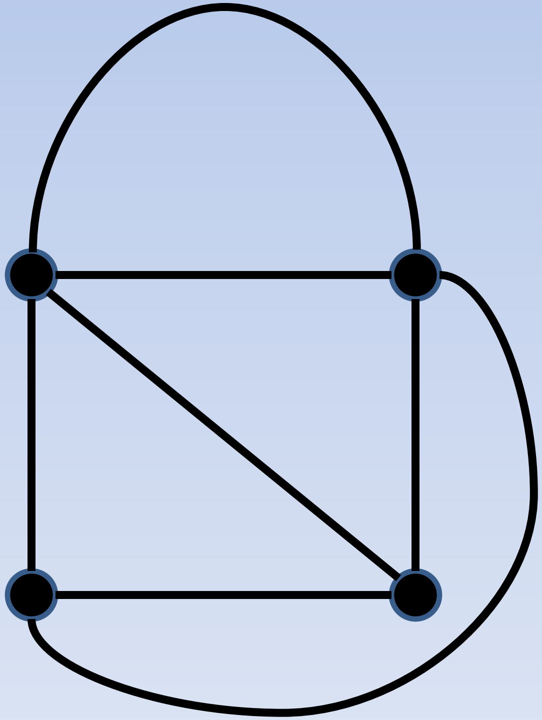
Απόδειξη

Η σχέση αυτή που ισχύει σε κάθε συνεκτικό επίπεδο γράφημα αποδεικνύεται με χρήση της αρχής της επαγωγής επί του πλήθους των ακμών.

Επίπεδα Γραφήματα

Να σημειωθεί ότι η ιδιότητα της επιπεδότητας ενός γραφήματος δεν αλλάζει αν μια ακμή διαιρεθεί σε δύο τμήματα, δηλαδή με την προσθήκη μιας κορυφής βαθμού 2 ή αντίθετα αν δύο ακμές συμπτυχθούν σε μία μέσω μιας κορυφής βαθμού 2.





Επίπεδα Γραφήματα

Ορισμός

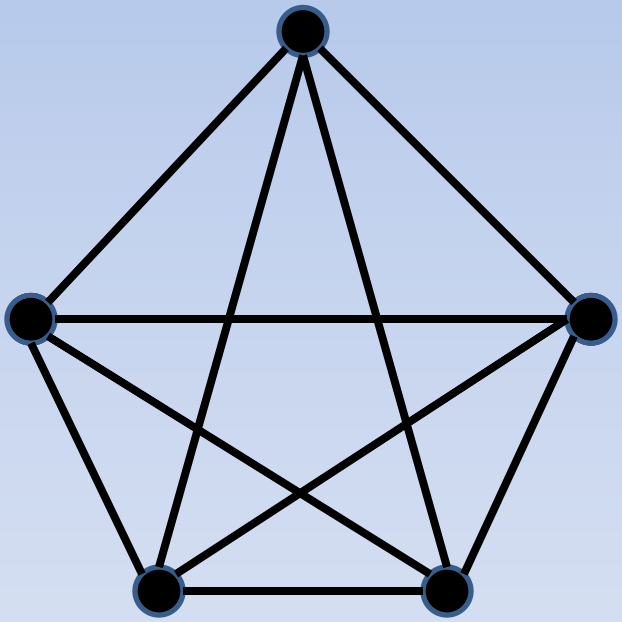
Δύο γραφήματα $\mathbf{G_1}$ και $\mathbf{G_2}$ ονομάζονται ισομορφικά μέχρι κορυφές βαθμού 2 αν είναι ισομορφικά ή το ένα από τα δύο μπορεί να μετασχηματιστεί σε ένα γράφημα ισομορφικό με το άλλο με μια σειρά διαιρέσεων ή και συμπτύξεων ακμών.

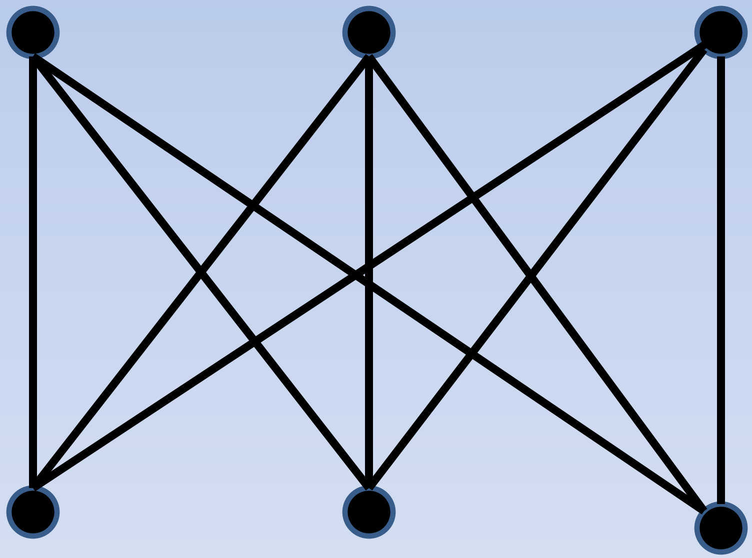
Οι Ορισμοί και τα Θεωρήματα ενδέχεται να διαφοροποιούνται ανάλογα με τον συγγραφέα και το βιβλίο.

Επίπεδα Γραφήματα

Θεώρημα (Kuratowski)

Ένα γράφημα $\mathbf{G} = (\mathbf{X}, \mathbf{U})$ είναι επίπεδο αν και μόνον αν δεν περιέχει κανένα υπογράφημα που να είναι ισομορφικό μέχρι κορυφές βαθμού με κάποιο από τα επόμενα δύο γραφήματα.





Οι Ορισμοί και τα Θεωρήματα ενδέχεται να διαφοροποιούνται ανάλογα με τον συγγραφέα και το βιβλίο.

Επίπεδα Γραφήματα

Ορισμός

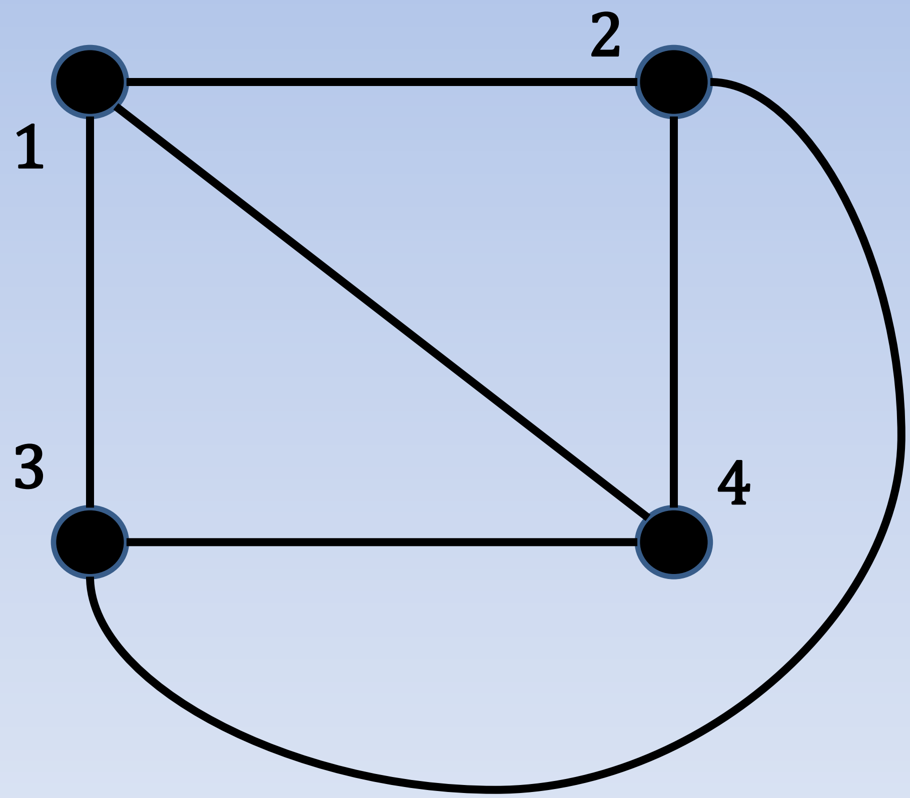
Έστω $\mathbf{G} = (\mathbf{X}, \mathbf{U})$ ένα επίπεδο συνεκτικό γράφημα. Ονομάζουμε δυϊκό γράφημα του $\mathbf{G} = (\mathbf{X}, \mathbf{U})$ και συμβολίζουμε με $\mathbf{G^*} = (\mathbf{X^*}, \mathbf{U^*})$ το γράφημα στο οποίο κάθε κορυφή $\mathbf{x^*}$ αντιστοιχεί σε μία περιοχή του $\mathbf{G}$ και μία ακμή $\mathbf{u^*}=(\mathbf{x^*}, \mathbf{y^*})$ ορίζεται μεταξύ δύο κορυφών του $\mathbf{G^*}$ αν υπάρχει ακμή $\mathbf{u} \in \mathbf{U}$ η οποία οριοθετεί τις περιοχές του $\mathbf{G}$ που αντιστοιχούν στα $\mathbf{x^*}$ και $\mathbf{y^*}$.

Σημειώστε ότι αν δύο περιοχές στο γράφημα $\mathbf{G}$ οριοθετούνται από περισσότερες ακμές τότε το $\mathbf{G^*}$ είναι πολυγράφημα.

Επί πλέον αν σε μία περιοχή του $\mathbf{G}$ υπάρχει μια κορυφή βαθμού 1 τότε η κορυφή του $\mathbf{G^*}$ που αντιστοιχεί στην εν λόγω κορυφή του $\mathbf{G}$ έχει βρόχο.

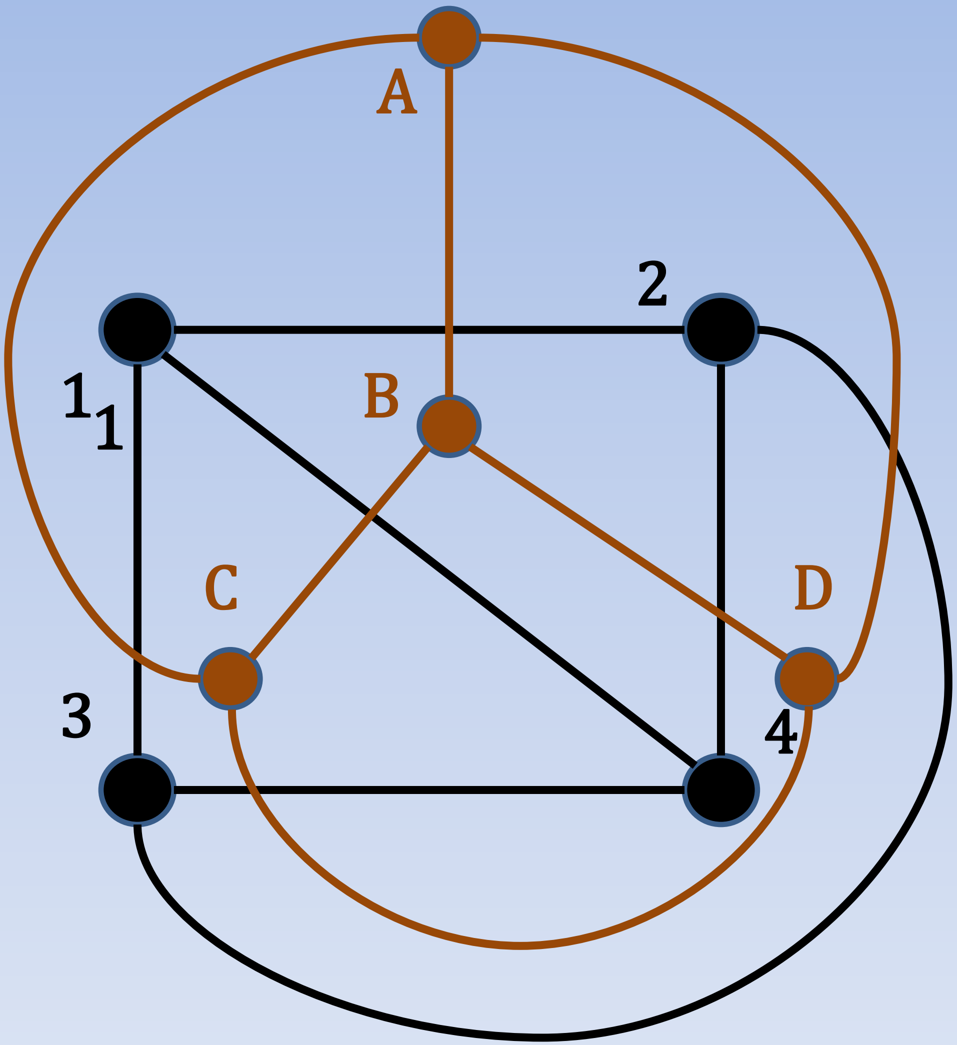
Επίπεδα Γραφήματα

Παράδειγμα:



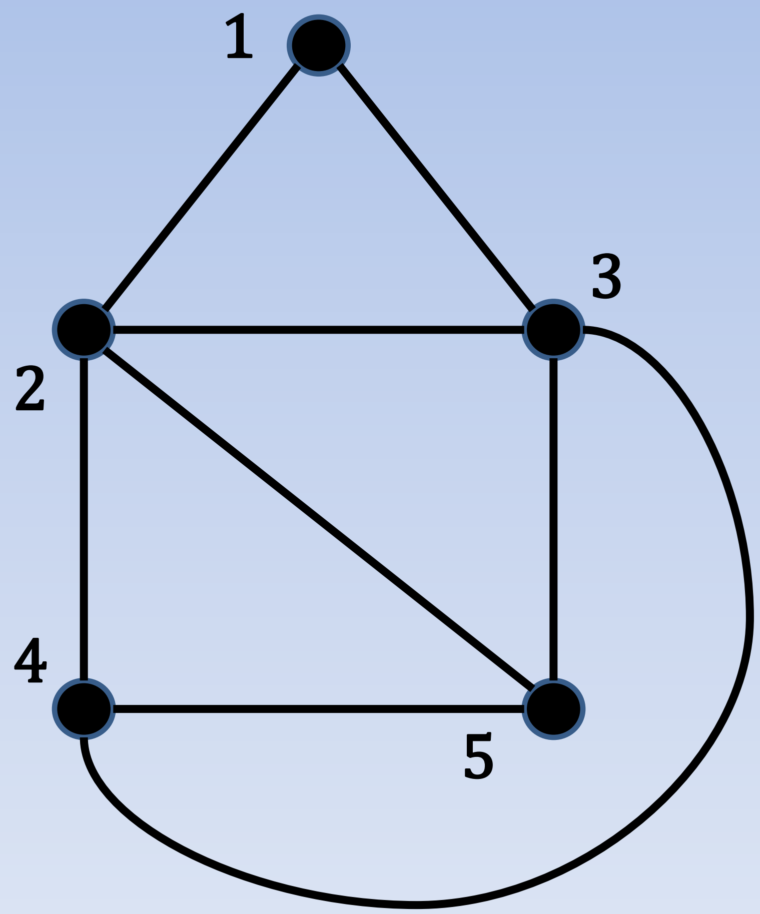
Επίπεδα Γραφήματα

Παράδειγμα:



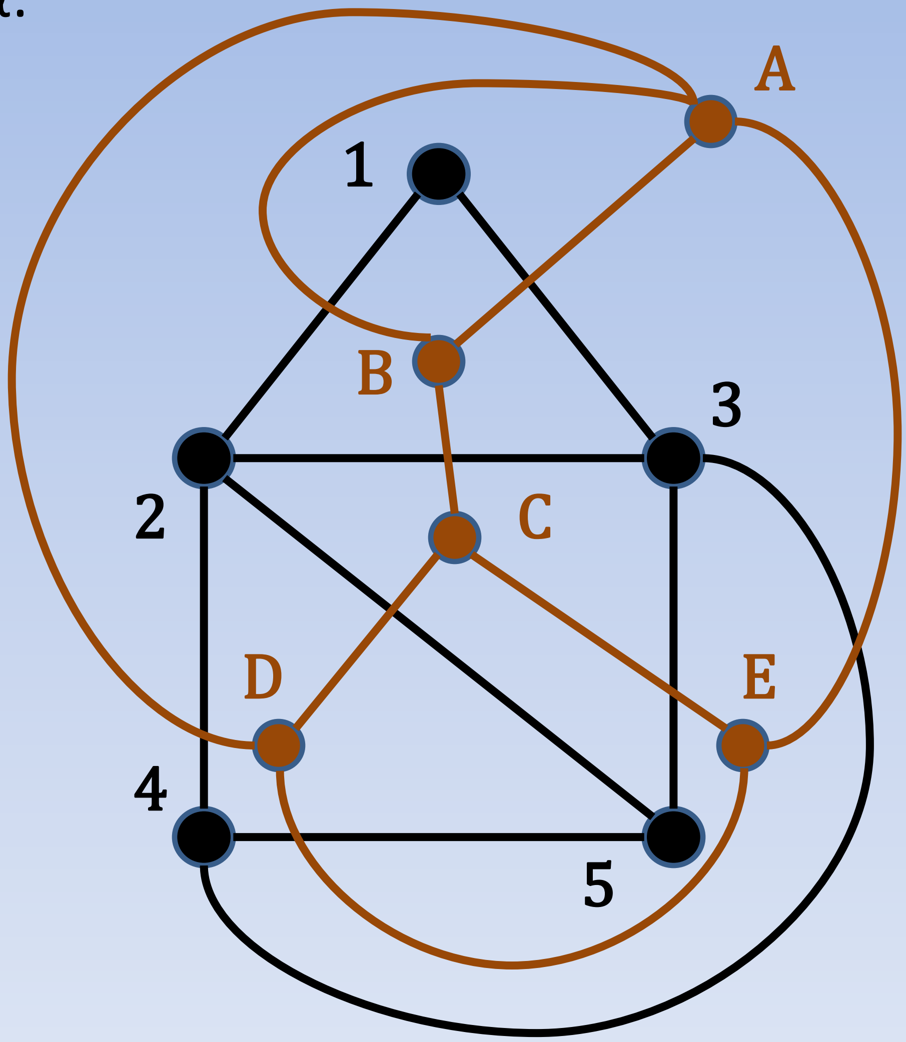
Επίπεδα Γραφήματα

Παράδειγμα:



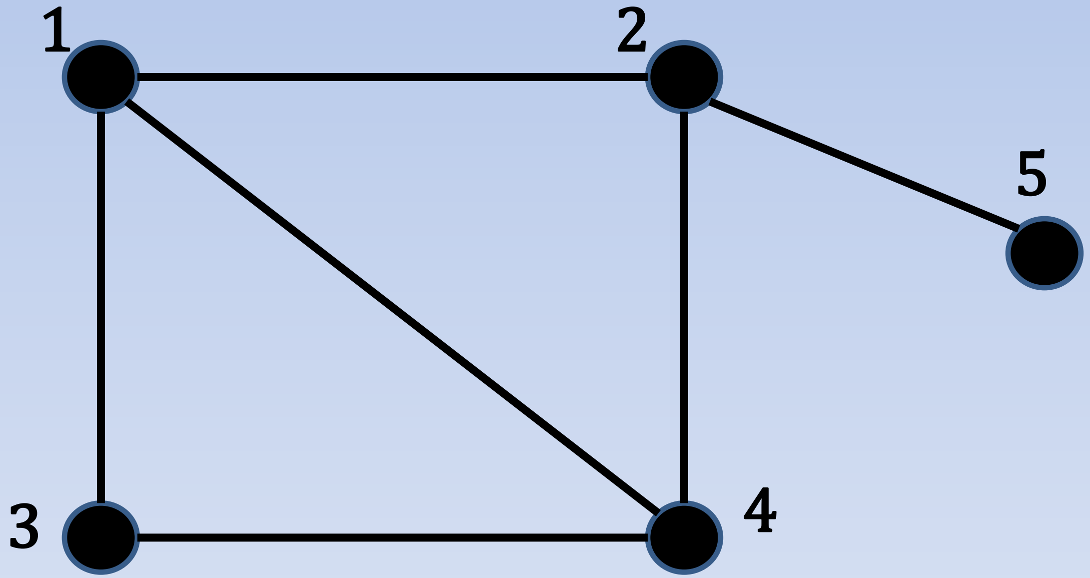
Επίπεδα Γραφήματα

Παράδειγμα:



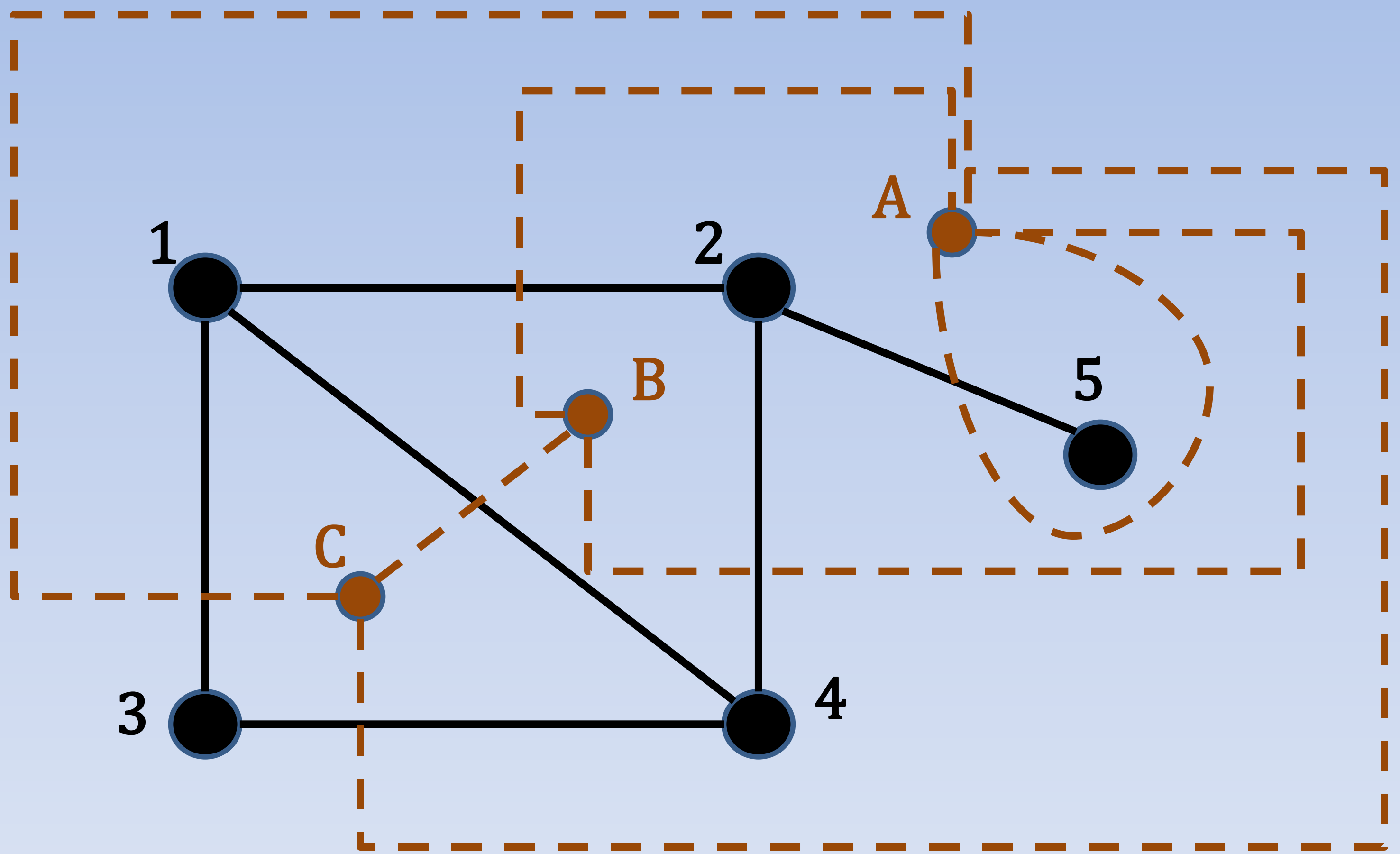
Επίπεδα Γραφήματα

Παράδειγμα:



Επίπεδα Γραφήματα

Παράδειγμα:



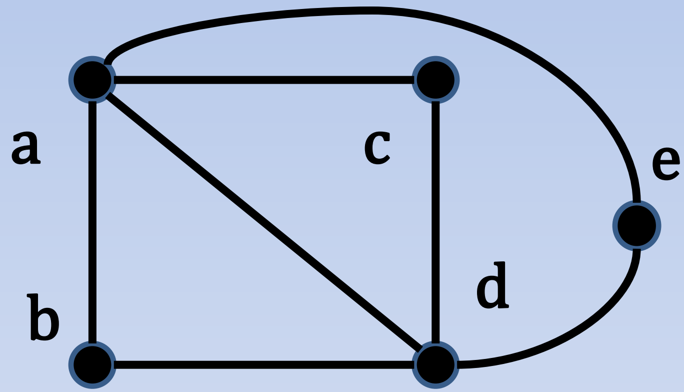
Επίπεδα Γραφήματα

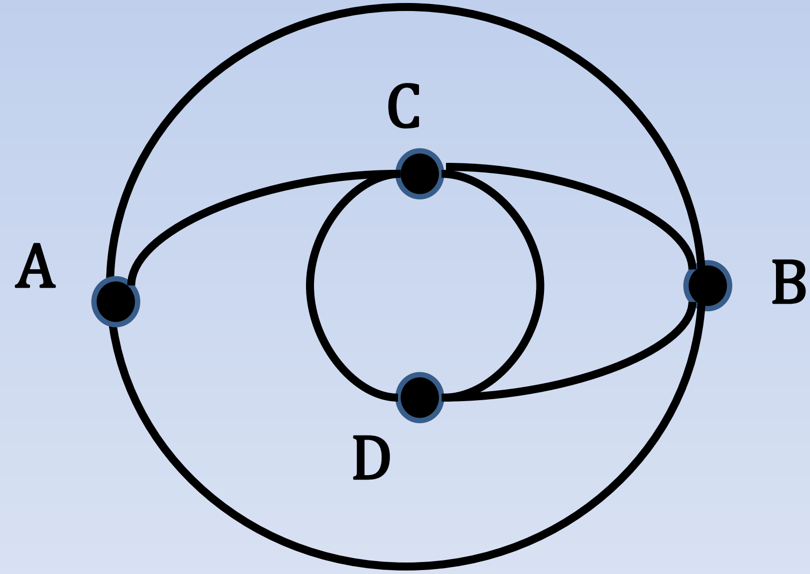
Ιδιότητες

- Το δυϊκό γράφημα είναι επίπεδο.
- Αν το δυϊκό γράφημα $\mathbf{G^*}$ είναι συνεκτικό και με $\mathbf{v^*, e^*}$ και $\mathbf{r^*}$ συμβολίζουμε αντίστοιχα το πλήθος των κορυφών, $\mathbf{v^*=|X^*|}$, το πλήθος των ακμών, $\mathbf{e^*=|U^*|}$, και το πλήθος των περιοχών του τότε ισχύει η σχέση του Euler $\mathbf{v^* - e^* + r^* = 2.}$
- Αν το $\mathbf{G^*}$ είναι συνεκτικό, τότε το δυϊκό γράφημά του $\mathbf{G^*}$ δηλ. το δυϊκό του δυϊκού είναι το $\mathbf{G}$, δηλαδή $\mathbf{(G^*)^* = G}$

Ασκήσεις

1. Εξετάστε αν υπάρχει ένα μονοπάτι ή κύκλωμα του Euler στα ακόλουθα γραφήματα. Διακαιολογείστε την απάντησή σας.





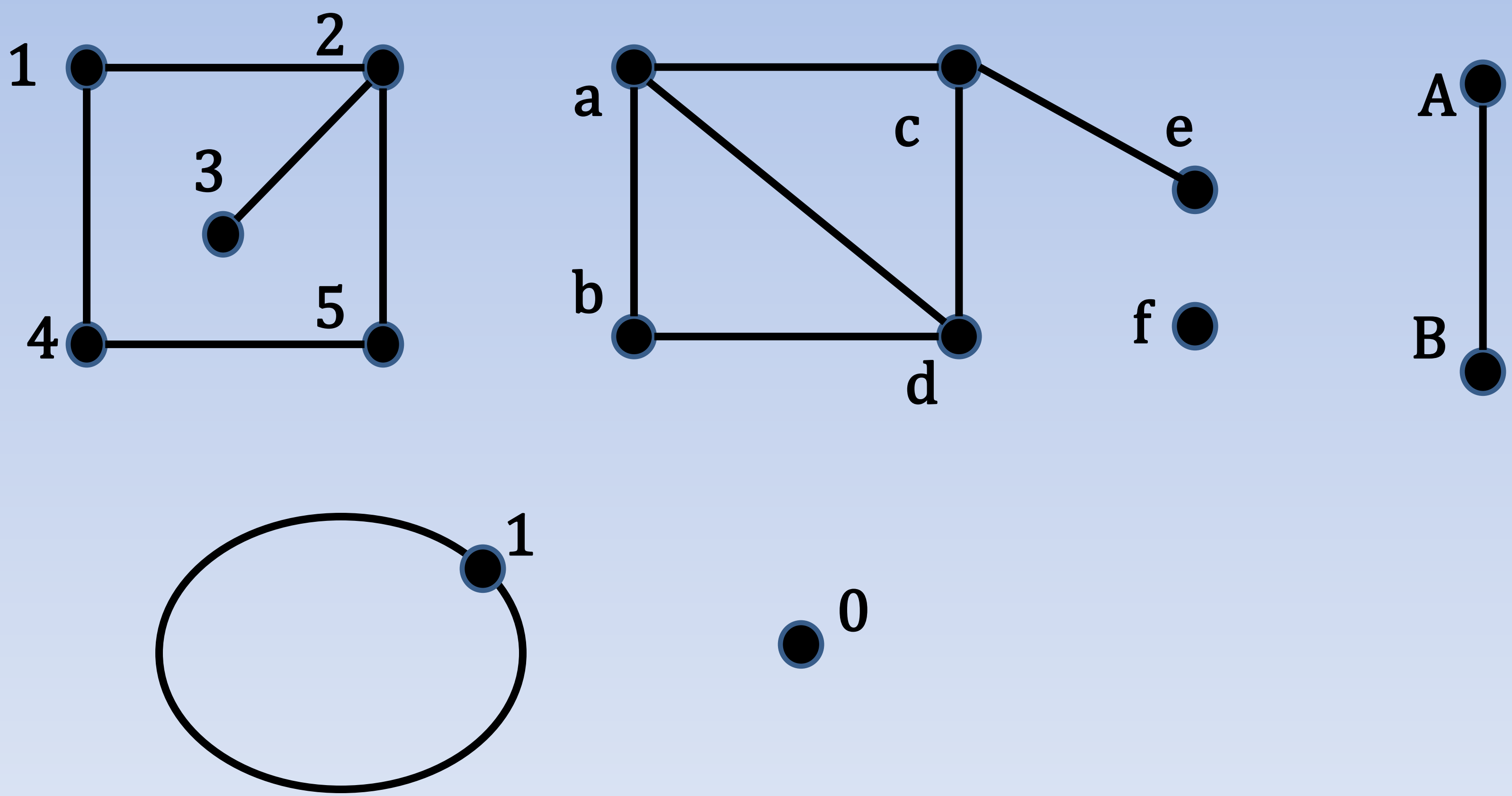
Ασκήσεις

2. Δίνεται το κατευθυνόμενο γράφημα **G** = **(X, U)** όπου:
X={A, B, C, D, E} και
U ={ (A, B), (B, A), (B, C), (C, B), (B, D), (D, E), (E, B) }
Στο γράφημα αυτό αναζητάμε ένα κύκλωμα του Euler και «τρέχουμε» το γνωστό αλγόριθμο ο οποίος μετά από κάποια βήματα βρίσκεται στο **Βήμα (2)** και εμφανίζει την ακόλουθη εικόνα στις μεταβλητές **Û, C, C'**, και **F.**
Û = { (B, A), (B, D), (D, E), (E, B) }
C'={A, B), (B, C), (C, B) }, F=0.
Η κορυφή **A** έχει πράσινο χρώμα, η κορυφή **B** μπλε και η κορυφή **C** κόκκινο χρώμα.

→ Περιγράψτε τα επόμενα δύο βήματα του αλγορίθμου και τις πιθανές επιλογές ακμών και κορυφών ενημερώνοντας τις αντίστοιχες μεταβλητές.

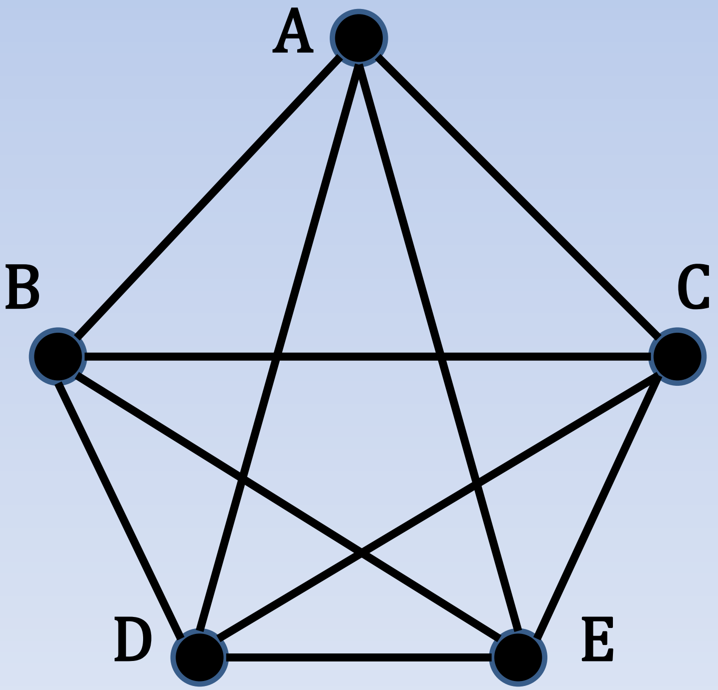
Ασκήσεις

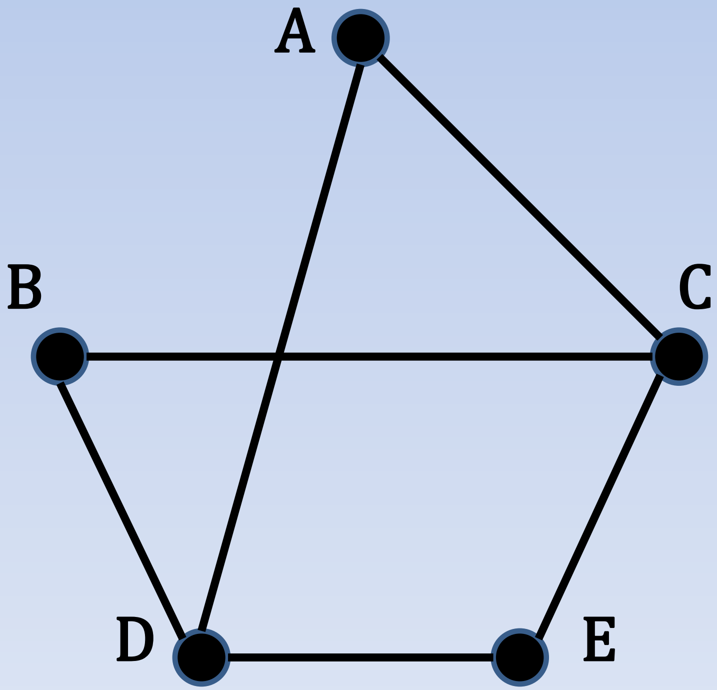
3. Απαντήστε αν ισχύει ο τύπος του Euler στα ακόλουθα γραφήματα:



Ασκήσεις

4. Πόσα διαφορετικά χρώματα απαιτούνται να χρωματιστούν οι κορυφές στα ακόλουθα γραφήματα έτσι ώστε γειτονικές κορυφές να μην έχουν το ίδιο χρώμα.





Ασκήσεις

5. Σχεδιάστε το δυϊκό γράφημα του γραφήματος που αποτελείται από δύο συνεκτικές συνιστώσες κάθε μία από τις οποίες είναι επίπεδο γράφημα.