ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ
Β' ΕΞΑΜΗΝΟ ΣΠΟΥΔΩΝ

ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Γραφήματα - Δέντρα

Διδάσκων: ΣΤΑΥΡΟΣ ΑΔΑΜ

ΕΑΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2023-2024

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ
Β' ΕΞΑΜΗΝΟ ΣΠΟΥΔΩΝ

ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
Γραφήματα - Δέντρα

Κάποιοι Ορισμοί και Ιδιότητες ενδέχεται να διαφοροποιούνται

ανάλογα με τον συγγραφέα και το βιβλίο

ΕΑΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2023-2024

Ορισμοί και Ιδιότητες

Ορισμοί

— Ένα γράφημα , $\mathbf{G} = (\mathbf{X}, \mathbf{U})$, που δεν περιέχει κύκλωμα (ή κύκλο) ονομάζεται ακυκλικό (acyclic) ή ελεύθερο κύκλων (cycle free).

— Δέντρο ονομάζεται ένα συνεκτικό, μη κατευθυνόμενο γράφημα, $\mathbf{G} = (\mathbf{X}, \mathbf{U})$, που δεν περιέχει κύκλωμα (κύκλο).

— Ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα με $\mathbf{k}$ συνεκτικές συνιστώσες χωρίς κύκλους ονομάζεται ένα δάσος (forest).

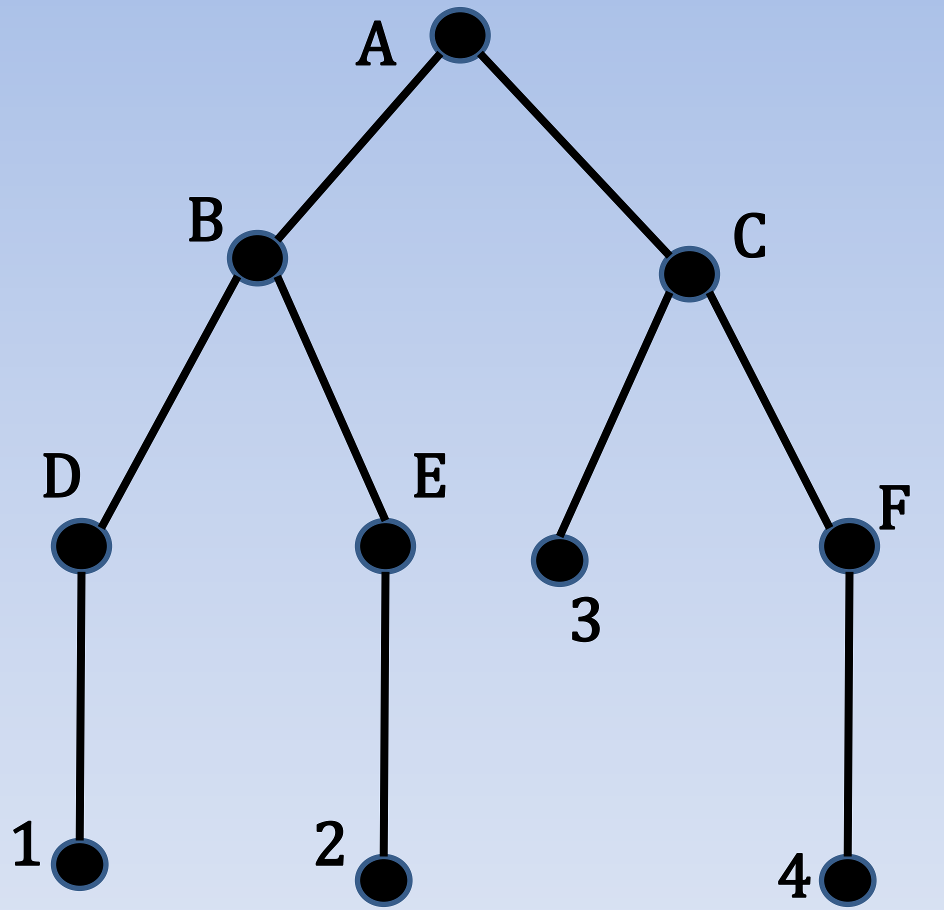
— Το δέντρο που αποτελείται από μία μοναδική κορυφή χωρίς ακμές ονομάζεται εκφυλισμένο δέντρο.

— Μία κορυφή που συνδέεται με μία μόνο άλλη κορυφή, άρα έχει βαθμό $\mathbf{1}$, ονομάζεται φύλλο ή τερματικός κόμβος του δέντρου.

— Μία κορυφή που συνδέεται με περισσότερες από μία κορυφές, άρα έχει βαθμό μεγαλύτερο του $\mathbf{1}$, ονομάζεται κόμβος διακλάδωσης ή εσωτερικός κόμβος του δένδρου.

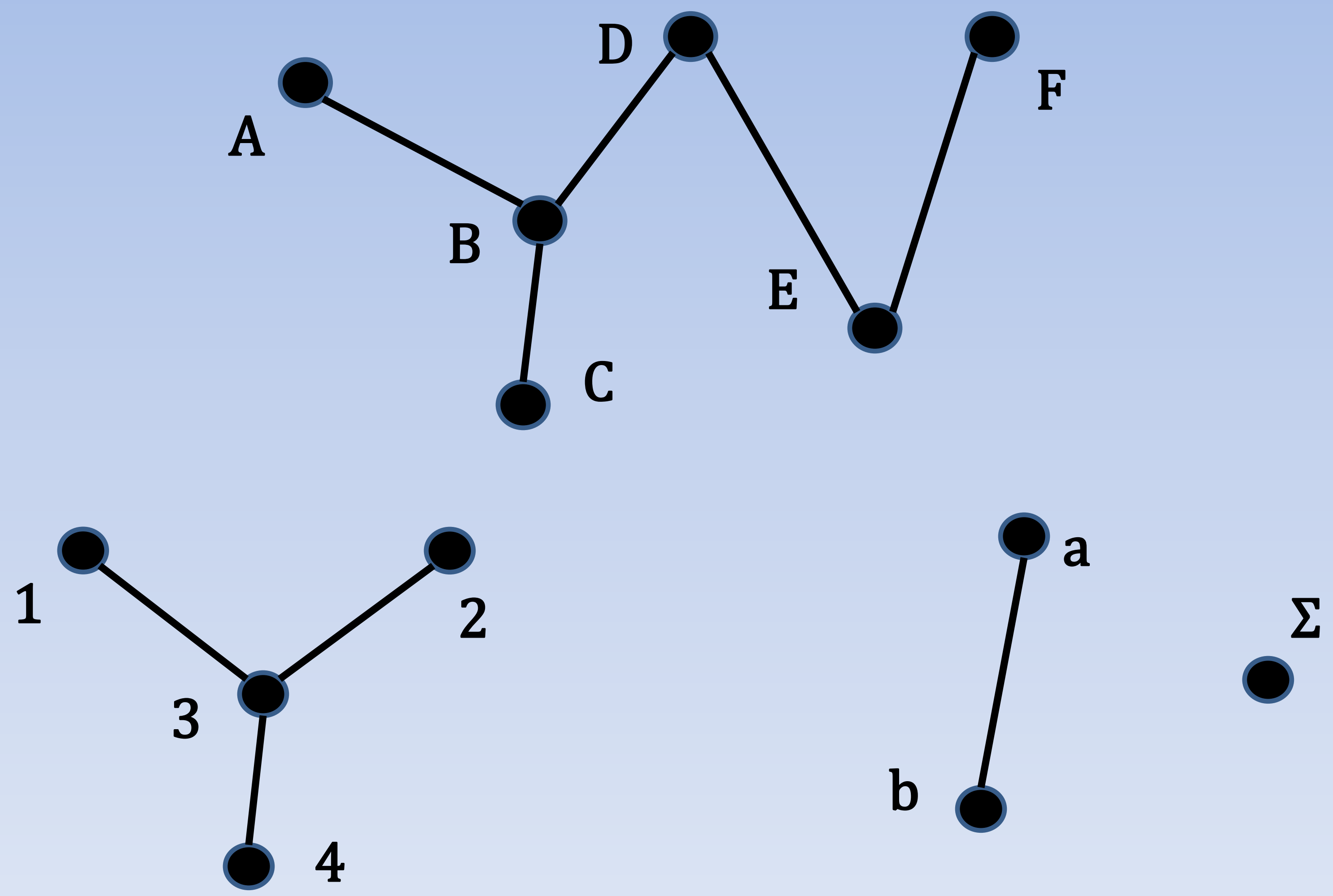
Ορισμοί και Ιδιότητες

Παραδείγματα:



Ορισμοί και Ιδιότητες

Παραδείγματα:



Ορισμοί και Ιδιότητες

Ιδιότητες

Έστω $\mathbf{G} = (\mathbf{X}, \mathbf{U})$ ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα που είναι δέντρο. Τότε:

- μεταξύ δύο οποιωνδήποτε κορυφών του δέντρου υπάρχει ένα μοναδικό μονοπάτι ,
- ο αριθμός των κορυφών είναι κατά ένα μεγαλύτερος από τον αριθμό των ακμών,
- αν το δέντρο έχει δύο ή περισσότερες κορυφές τότε έχει τουλάχιστον δύο φύλλα.

Ορισμοί και Ιδιότητες

Προτάσεις

Έστω $\mathbf{G} = (\mathbf{X}, \mathbf{U})$ ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα που είναι δέντρο. Τότε οι ακολουθες προτάσεις ισοδυναμούν με ορισμούς του δέντρου:

1) Ένα γράφημα στο οποίο υπάρχει ένα μοναδικό μονοπάτι μεταξύ δύο οποιωνδήποτε κορυφών είναι δέντρο.

Ορισμοί και Ιδιότητες

Προτάσεις

Έστω $\mathbf{G} = (\mathbf{X}, \mathbf{U})$ ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα που είναι δέντρο. Τότε οι ακολουθες προτάσεις ισοδυναμούν με ορισμούς του δέντρου:

1) Ένα γράφημα στο οποίο υπάρχει ένα μοναδικό μονοπάτι μεταξύ δύο οποιωνδήποτε κορυφών είναι δέντρο.
2) Ένα συνεκτικό γράφημα στο οποίο το πλήθος των ακμών είναι κατά $\mathbf{1}$ μικρότερο από το πλήθος των κορυφών είναι δέντρο.

Ορισμοί και Ιδιότητες

Προτάσεις

Έστω $\mathbf{G} = (\mathbf{X}, \mathbf{U})$ ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα που είναι δέντρο. Τότε οι ακολουθες προτάσεις ισοδυναμούν με ορισμούς του δέντρου:

1) Ένα γράφημα στο οποίο υπάρχει ένα μοναδικό μονοπάτι μεταξύ δύο οποιωνδήποτε κορυφών είναι δέντρο.
2) Ένα συνεκτικό γράφημα στο οποίο το πλήθος των ακμών είναι κατά $\mathbf{1}$ μικρότερο από το πλήθος των κορυφών είναι δέντρο.
3) Ένα γράφημα στο οποίο η σχέση που συνδέει το πλήθος των ακμών $\mathbf{e}=|\mathbf{U}|$ και το πλήθος των κορυφών $\mathbf{v}=|\mathbf{X}|$ είναι $\mathbf{e} = \mathbf{v} - \mathbf{1}$ και το οποίο δεν περιέχει κύκλο, είναι δέντρο.

Ορισμοί και Ιδιότητες

Προτάσεις

Έστω $\mathbf{G} = (\mathbf{X}, \mathbf{U})$ ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα που είναι δέντρο. Τότε οι ακολουθες προτάσεις ισοδυναμούν με ορισμούς του δέντρου:

1) Ένα γράφημα στο οποίο υπάρχει ένα μοναδικό μονοπάτι μεταξύ δύο οποιωνδήποτε κορυφών είναι δέντρο.
2) Ένα συνεκτικό γράφημα στο οποίο το πλήθος των ακμών είναι κατά $\mathbf{1}$ μικρότερο από το πλήθος των κορυφών είναι δέντρο.
3) Ένα γράφημα στο οποίο η σχέση που συνδέει το πλήθος των ακμών $\mathbf{e}{=}|\mathbf{U}|$ και το πλήθος των κορυφών $\mathbf{v}{=}|\mathbf{X}|$ είναι $\mathbf{e} = \mathbf{v} - \mathbf{1}$ και το οποίο δεν περιέχει κύκλο, είναι δέντρο.

Ορισμοί και Ιδιότητες

1) Ένα γράφημα στο οποίο υπάρχει ένα μοναδικό μονοπάτι μεταξύ δύο οποιωνδήποτε κορυφών είναι δέντρο.

Απόδειξη

Έστω ότι η πρόταση δεν ισχύει και έστω ότι μεταξύ δύο κορυφών του δέντρου, $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$ υπάρχουν δύο μονοπάτια τα οποία ας παραστήσουμε με την ακολουθία των κορυφών:

$$\mathbf{A} - \mathbf{X_i} - \mathbf{X_{i+1}} - \ldots - \mathbf{X_{i+k}} - \mathbf{B}$$

$$\mathbf{A} - \mathbf{X_j} - \mathbf{X_{j+1}} - \ldots - \mathbf{X_{j+m}} - \mathbf{B}$$

Αν οι κορυφές που επισκέπτονται τα δύο μονοπάτια είναι όλες διαφορετικές μεταξύ τους τότε το μονοπάτι

$$\mathbf{A} - \mathbf{X_i} - \mathbf{X_{i+1}} - \ldots - \mathbf{X_{i+k}} - \mathbf{B} - \mathbf{X_{j+m}} - \ldots - \mathbf{X_{i+1}} - \mathbf{X_i} - \mathbf{A}$$

είναι ένα κύκλωμα. Άτοπο

Ορισμοί και Ιδιότητες

Απόδειξη (συνέχεια)

Αν οι κορυφές που επισκέπτονται τα δύο μονοπάτια δεν είναι όλες διαφορετικές μεταξύ τους τότε υπάρχει τουλάχιστον μία κορυφή κοινή και στα δύο μονοπάτια, έστω η **Y.**

$$\mathbf{A} — \mathbf{X}_i — \mathbf{X}_{i+1} — \dots — \mathbf{Y} — \dots — \mathbf{X}_{i+k} — \mathbf{B}$$

$$\mathbf{A} — \mathbf{X}_j — \mathbf{X}_{j+1} — \dots — \mathbf{Y} — \dots — \mathbf{X}_{j+m} — \mathbf{B}$$

Τότε το μονοπάτι

$$\mathbf{A} — \mathbf{X}_i — \mathbf{X}_{i+1} — \dots — \mathbf{Y} — \dots — \mathbf{X}_{i+k} — \mathbf{B} — \mathbf{X}_{i+m} — \dots — \mathbf{Y}$$

Περιέχει ένα κύκλωμα που αρχίζει και τελειώνει στην κορυφή **Y.**

Άτοπο

Ορισμοί και Ιδιότητες

Θεώρημα

1) Ένα συνεκτικό γράφημα είναι δέντρο αν κάθε ακμή του είναι ένας ισθμός. Κατά συνέπεια, αν αφαιρεθεί οποιαδήποτε ακμή τότε δημιουργούνται δύο συνεκτικές συνιστώσες.
2) Ένα δέντρο είναι συνεκτικό αλλά αν προστεθεί μία ακμή χωρίς την προσθήκη κορυφής τότε το γράφημα αποκτά κύκλωμα.

Απόδειξη

(αφήνεται ως άσκηση)

Ορισμοί και Ιδιότητες

Ορισμοί

Ένα κατευθυνόμενο γράφημα λέγεται κατευθυνόμενο δέντρο αν γίνεται δέντρο όταν αγνοηθούν οι κατευθύνσεις των ακμών.

Ένα κατευθυνόμενο δέντρο ονομάζεται δέντρο με ρίζα αν υπάρχει μία κορυφή με εισερχόμενο βαθμό $\mathbf{0}$ ενώ όλες οι άλλες κορυφές έχουν εισερχόμενο βαθμό $\mathbf{1}$.

Κατά συνέπεια σε ένα κατευθυνόμενο δέντρο με ρίζα υπάρχει πάντα ένα μονοπάτι από τη ρίζα προς κάθε άλλη κορυφή του δέντρου.

<u>Σε ένα δέντρο (μη κατευθυνόμενο) ρίζα μπορεί να χαρακτηριστεί αυθαίρετα μια οποιαδήποτε κορυφή.</u>

Ορισμοί και Ιδιότητες

Σημειώσεις

Αν, σε ένα κατευθυνόμενο δέντρο η κατεύθυνση των ακμών είναι αυτονόητη χωρίς να χρειάζεται να σημειωθεί τότε μπορεί να παραλειφθεί με αποτέλεσμα να έχουμε ένα μη κατευθυνόμενο δέντρο με ρίζα.

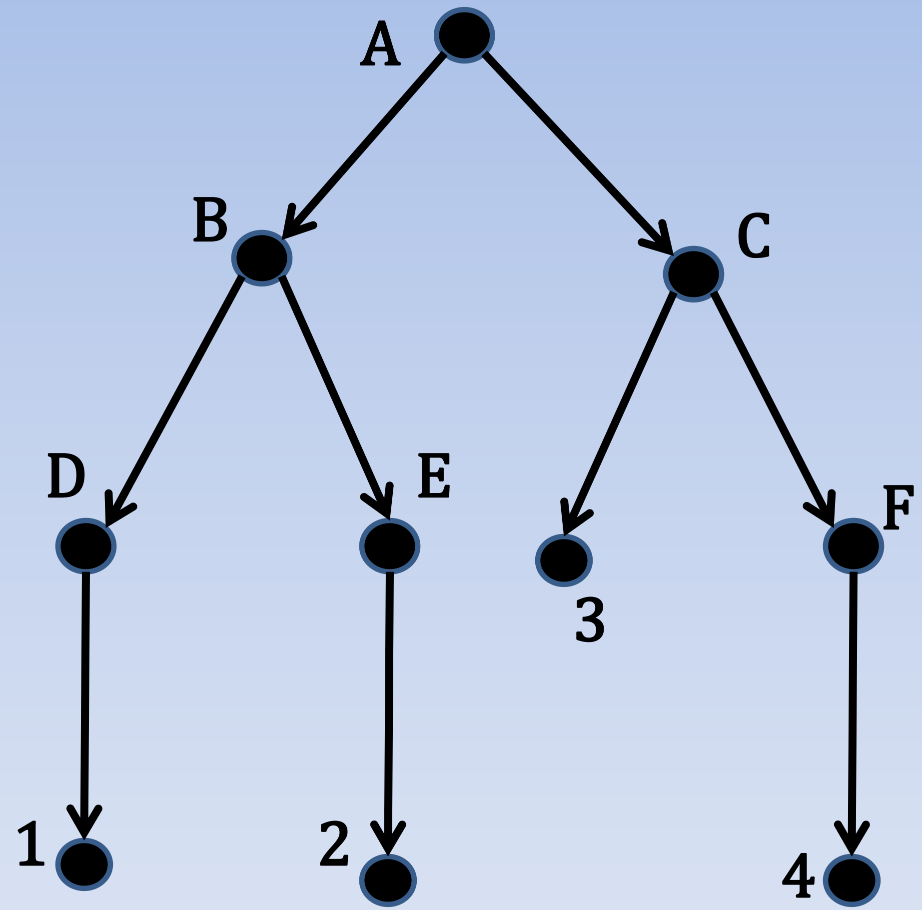
Ορισμοί και Ιδιότητες

Ο επόμενος πίνακας ανακεφαλαιώνει τι ισχύει με το βαθμό κάθε κορυφής σε ένα κατευθυνόμενο δέντρο με ρίζα.

Ρίζα	**Εισερχόμενος βαθμός = 0**	**Εξερχόμενος βαθμός ≥ 1**
Κόμβος διακλάδωσης	**Εισερχόμενος βαθμός = 1**	**Εξερχόμενος βαθμός ≥ 1**
Φύλλο	**Εισερχόμενος βαθμός = 1**	**Εξερχόμενος βαθμός = 0**

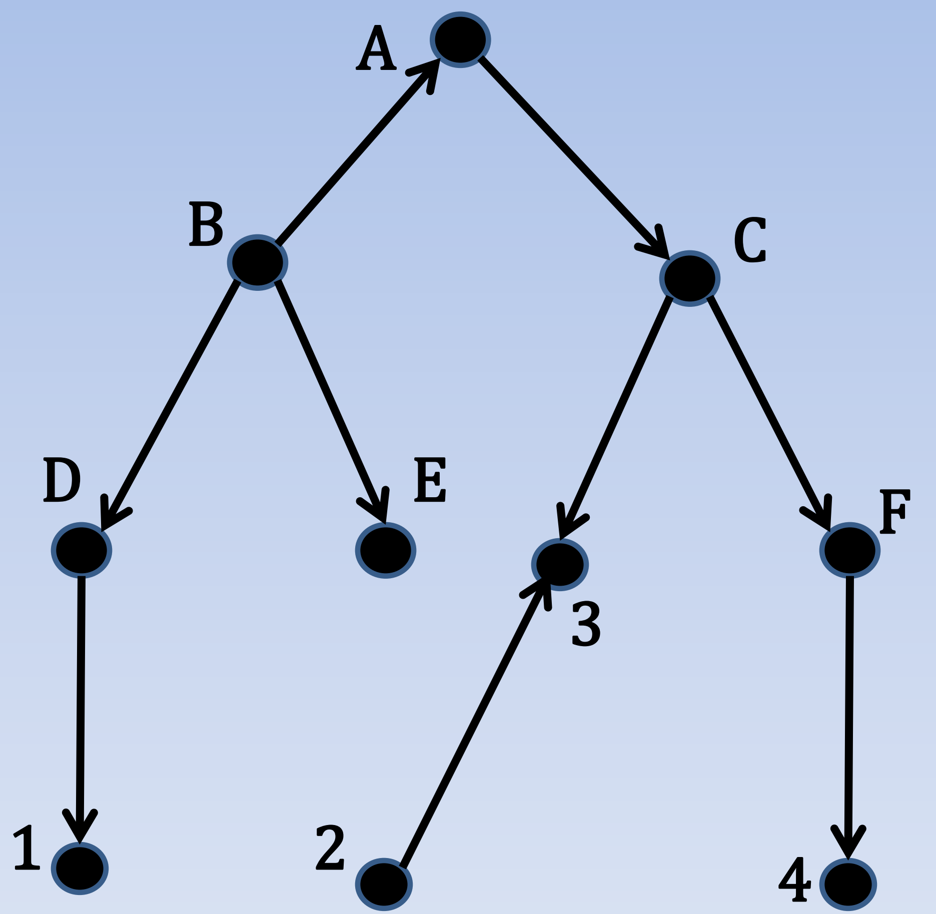
Ορισμοί και Ιδιότητες

Παράδειγμα κατευθυνόμενου δέντρου με ρίζα.



Ορισμοί και Ιδιότητες

Παράδειγμα κατευθυνόμενου δέντρου χωρίς ρίζα.



Ορισμοί και Ιδιότητες

Ορισμοί

Στα κατευθυνόμενα δέντρα ισχύουν τα ακόλουθα:

— Αν **a** είναι κόμβος διακλάδωσης τότε ο κόμβος **b** ονομάζεται παιδί του **a** αν υπάρχει ακμή από το **a** στο **b**.

— Δύο κορυφές που είναι παιδιά της ίδιας κορυφής ονομάζονται αδέλφια.

— Μια κορυφή **c** ονομάζεται απόγονος μια κορυφής **a** αν υπάρχει (κατευθυνόμενο) μονοπάτι από την κορυφή **a** στην κορυφή **c**. Αντίστοιχα η κορυφή **a** ονομάζεται πρόγονος της κορυφής **c**.

— Αν με $\mathbf{T=(X, U)}$ συμβολίσουμε ένα δέντρο και **a** ένα κόμβο διακλάδωσης του **T**, τότε ονομάζουμε υποδέντρο με ρίζα το **a** το υπογράφημα $\mathbf{T'=(X', U')}$ του **T** για το οποίο ισχύει ότι το **X’** περιέχει το **a** και όλους τους απογόνους του και το **U’** περιέχει τις ακμές για όλα τα κατευθυνόμενα μονοπάτια που ξεκινούν από τον κόμβο **a**.

Ορισμοί και Ιδιότητες

Ορισμοί

— Ονομάζουμε διατεταγμένο δέντρο, ένα δέντρο με ρίζα που έχει στις ακμές οι οποίες ξεκινούν από κάθε κόμβο διακλάδωσης ετικέτες με τους φυσικούς αριθμούς **1, 2,…,k…** Κατά συνέπεια ,τα υποδέντρα ενός κόμβου **a**, δηλαδή τα υποδέντρα με ρίζες τα παιδιά του **a** μπορούν να αναφέρονται ως το πρώτο, το δεύτερο, το τρίτο, κ.λπ. το **k** σύμφωνα με τις ετικέτες των ακμών με τις οποίες οι ρίζες τους συνδέονται με τον κόμβο **a**.

— Δύο διατεταγμένα δέντρα θα ονομάζονται ισόμορφα αν υπάρχει μία ένα-προς-ένα αντιστοιχία μεταξύ των κορυφών και των ακμών η οποία να διατηρεί τη φορά των ακμών και τις ετικέτες μεταξύ των αντίστοιχων ακμών.

Ορισμοί και Ιδιότητες

Ορισμοί

— Ένα διατεταγμένο δέντρο στο οποίο κάθε κόμβος διακλάδωσης έχει το πολύ $\mathbf{n}$ παιδιά ονομάζεται **n-αδικό** δέντρο.

— Ένα **n-αδικό** δέντρο ονομάζεται κανονικό αν κάθε κόμβος διακλάδωσης έχει ακριβώς $\mathbf{n}$ παιδιά.

Ιδιαίτερη περίπτωση **n-αδικού** δέντρου αποτελεί το δυαδικό δέντρο, δηλαδή, όταν $\mathbf{n = 2}$. Στην περίπτωση των δυαδικών δέντρων τα υποδέντρα ενός κόμβου διακλάδωσης αναφέρονται ως δεξιό και αριστερό υποδέντρο.

Ορισμοί και Ιδιότητες

Ορισμοί

— Σε ένα γράφημα ονομάζουμε μήκος μονοπατιού μεταξύ δύο κορυφών το πλήθος των ακμών που αποτελούν το συγκεκριμένο μονοπάτι.

Σε ένα δέντρο για κάθε φύλλο ορίζεται το μήκος του μονοπατιού από τη ρίζα έως το συγκεκριμένο φύλλο.

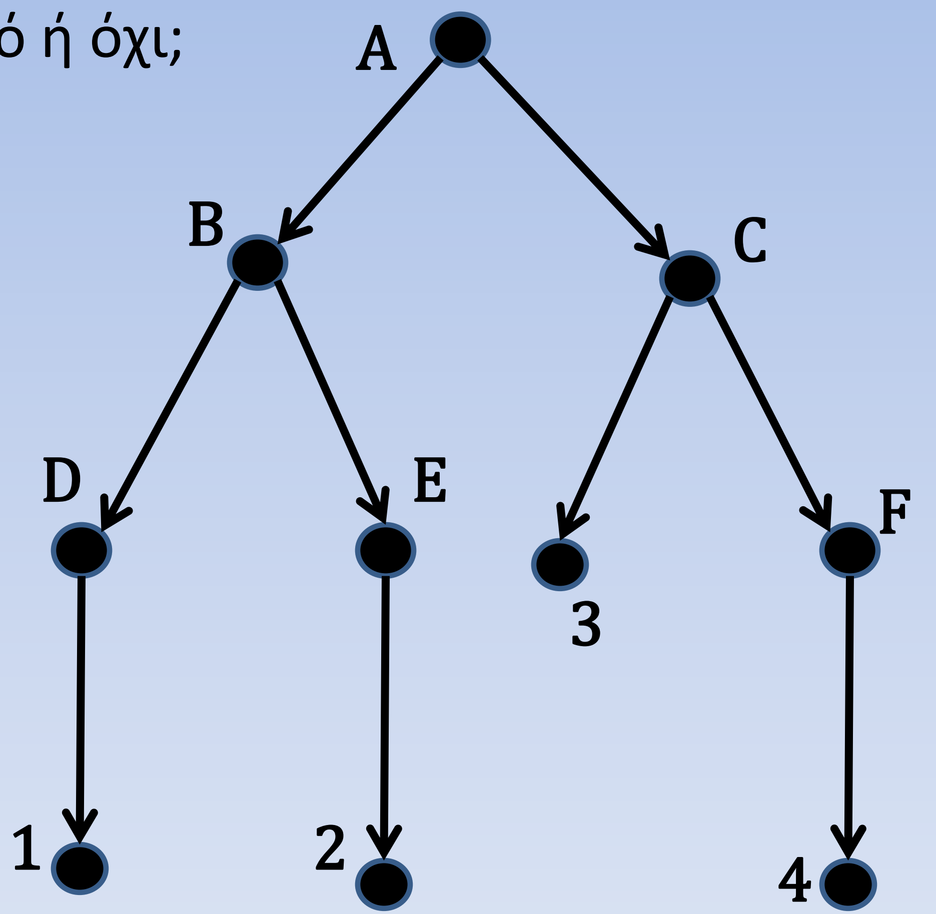
— Ονομάζουμε ύψος ενός δέντρου το μήκος του μέγιστου μονοπατιού από τη ρίζα προς τα φύλλα.

— Σε ένα κανονικό **n-αδικό** δέντρο κάθε φύλλο απέχει το ίδιο από την κορυφή.

Ορισμοί και Ιδιότητες

Παράδειγμα 2-αδικού δέντρου

— Είναι κανονικό ή όχι;



Διαδικασίες Διάσχισης ενός Δέντρου

Με τον όρο διάσχιση ενός δέντρου αναφερόμαστε σε μια οργανωμένη επίσκεψη των κόμβων ενός δέντρου, ή γενικότερα ενός γραφήματος, ακολουθώντας τις ακμές. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η διάσχιση των δυαδικών δέντρων λόγω της πληθώρας των εφαρμογών που έχουν.

Γενικά, η κατασκευή τεχνικών οργανωμένης επίσκεψης των κορυφών ενός γραφήματος αποτελούσε και αποτελεί ένα κυρίαρχο ζήτημα της επιστήμης των υπολογιστών. Οι λόγοι ήταν:

- αφενός το γεγονός ότι τα γραφήματα είναι θεμελειώδη εργαλεία για τη μοντελοποίηση προβλημάτων με διακριτά στοιχεία, και
- αφετέρου το γεγονός ότι η επίσκεψη των κορυφών είναι, στη γενική περίπτωση για οποιοδήποτε γράφημα, ένα πρόβλημα με σημαντικό υπολογιστικό κόστος.

Διαδικασίες Διάσχισης ενός Δέντρου

Αλγόριθμοι:

Depth First Search (DFS), είναι η Τεχνική Αναζήτησης ή Διάσχισης κατά Βάθος ξεκινώντας από τη ρίζα. Η ρίζα είναι γνωστή σε ένα δέντρο με ρίζα αλλιώς μια οποιαδήποτε κορυφή χαρακτηρίζεται ως ρίζα.

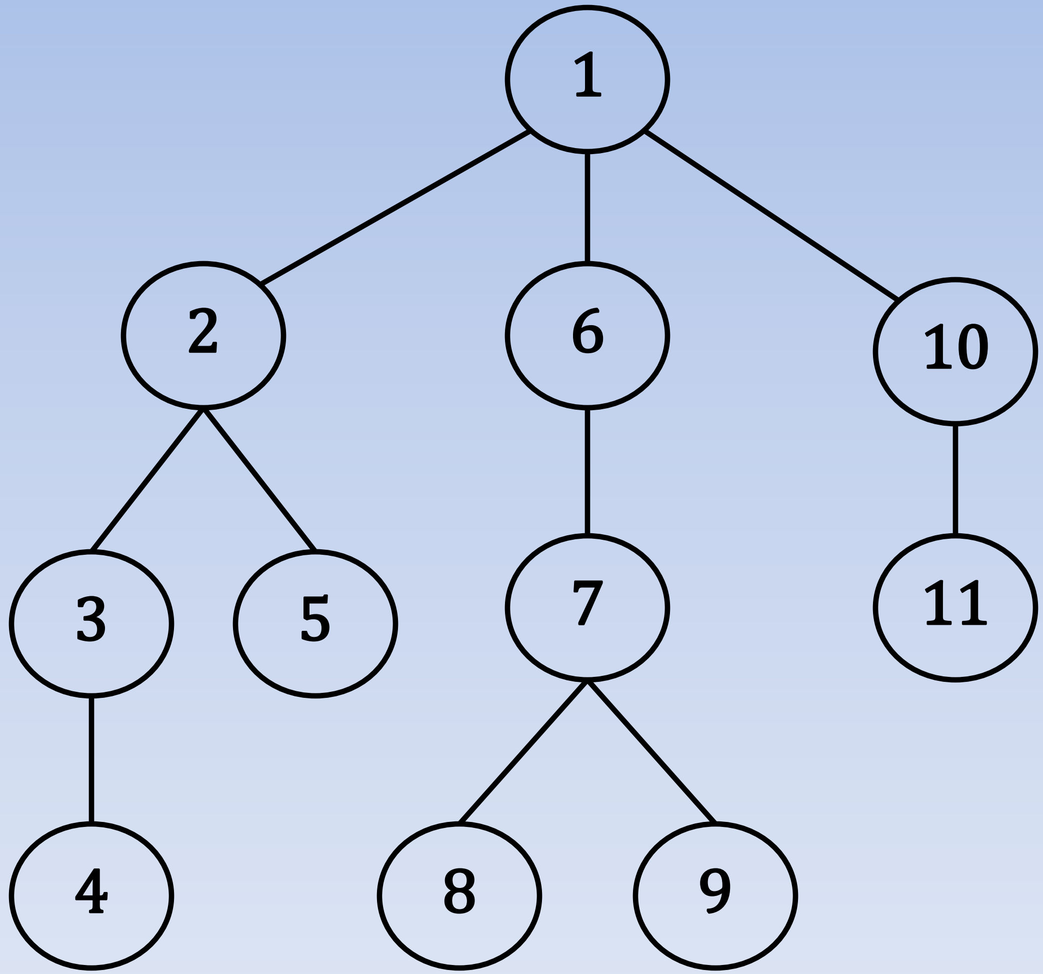
Η τεχνική μπορεί να εφαρμοστεί για τη διάσχιση σε οποιοδήποτε μη κατευθυνόμενο γράφημα για το οποίο μπορούμε να υποθέσουμε ότι μια κορυφή παίζει το ρόλο της ρίζας.

Σημαντικό στοιχείο του αλγορίθμου είναι η δυνατότητα επιστροφής σε κορυφή που έχει ήδη επισκεφτεί ώστε να ξεκινήσει μια νέα αναζήτηση προς ένα άλλο «τμήμα» του γραφήματος. Η δυνατότητα αυτή ονομάζεται backtracking.

Σχηματικά ο αλγόριθμος αυτός λειτουργεί ως ακολούθως:

Διαδικασίες Διάσχισης ενός Δέντρου

Depth First Search (DFS) - Charles Pierre Trémaux



Διαδικασίες Διάσχισης ενός Δέντρου

Αλγόριθμοι:

Breadth First Search (BFS), είναι η Τεχνική Αναζήτησης ή Διάσχισης κατά Πλάτος ξεκινώντας από τη ρίζα. Για τη ρίζα ισχύουν όσα και προηγουμένως. Η τεχνική αυτή χρησιμοποιεί την αντίθετη στρατηγική επίσκεψης των κορυφών, δηλαδή, αντί να κατεβαίνει σε βάθος αναπτύσεται σε πλάτος.

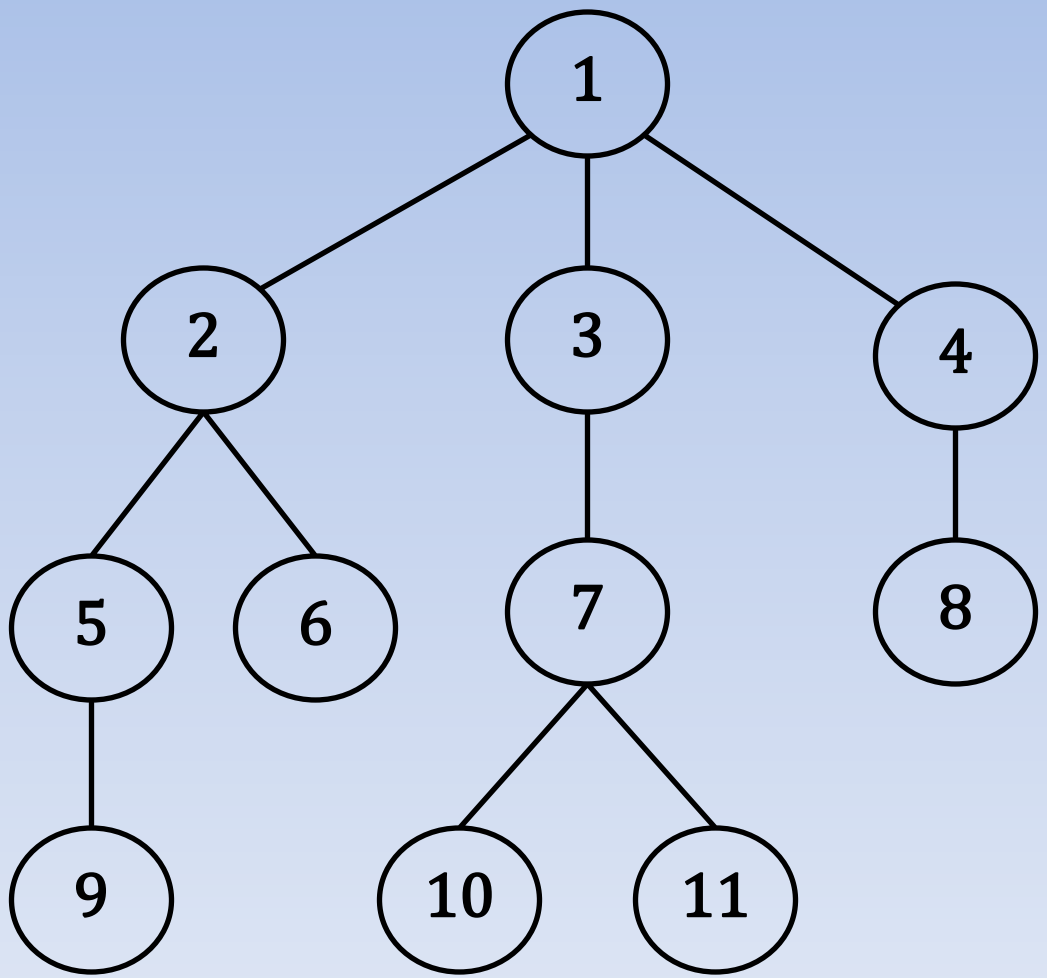
Γενικά, ο αλγόριθμος προτάθηκε για αναζήτηση σε οποιοδήποτε μη κατευθυνόμενο γράφημα για το οποίο μπορούμε να υποθέσουμε ότι μια κορυφή παίζει το ρόλο της ρίζας. Στην περίπτωση αυτή η εφαρμογή του αλγορίθμου οδηγεί στην κατασκευή ενός δέντρου του BFS-tree.

Σημαντικό στοιχείο και στον αλγόριθμο αυτό είναι η δυνατότητα επιστροφής σε κορυφή που έχει ήδη επικεφθεί (backtracking) ώστε να ξεκινήσει μια νέα αναζήτηση.

Σχηματικά ο αλγόριθμος αυτός λειτουργεί ως ακολούθως:

Διαδικασίες Διάσχισης ενός Δέντρου

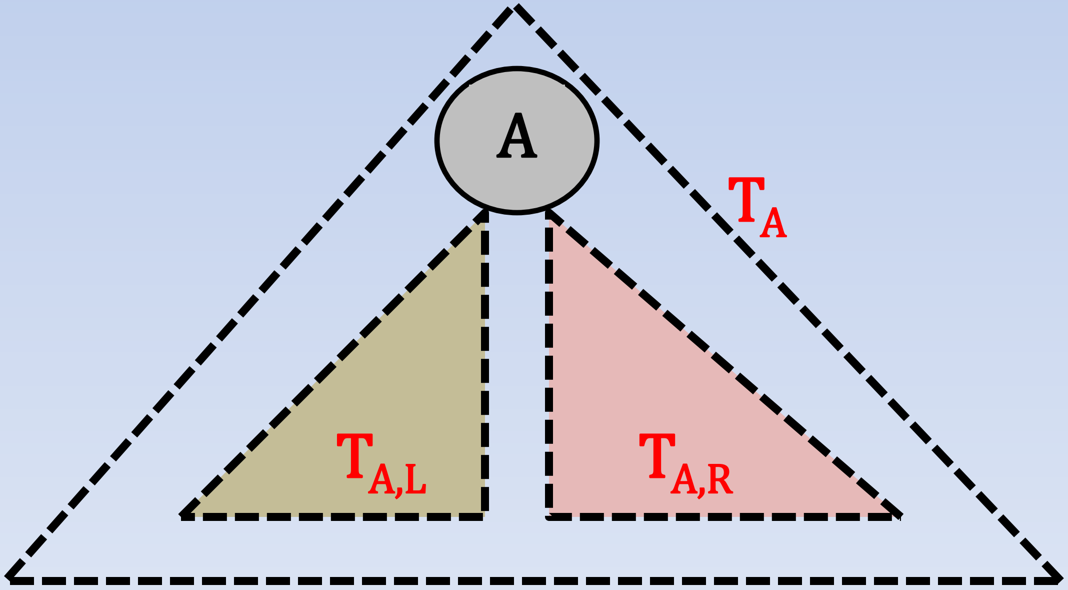
Breadth First Search (DFS) - Konrad Zuse (1945), Edward Moore (1959)



Διαδικασίες Διάσχισης ενός Δυαδικού Δέντρου

Υποθέσεις

Στις τεχνικές αυτές που περιγράφονται αναδομικά η διάσχιση αφορά ένα δυαδικό δέντρο η πρόσβαση στο οποίο δίνεται από τη ρίζα. Ας συμβολίσουμε με T_A το δέντρο αυτό και ας συμβολίσουμε με $T_{A,L}$ το αριστερό υποδέντρο της ρίζας **A** και με $T_{A,R}$ το δεξιό υποδέντρο. Σχηματικά έχουμε:



Διαδικασίες Διάσχισης ενός Δυαδικού Δέντρου

Υποθέσεις

Αν κάποιο από τα υποδέντρα $\mathbf{T_{A,L}}$ και $\mathbf{T_{A,R}}$ είναι εκφυλισμένα τότε η διάσχιση τους περιορίζεται στην επίσκεψη της ρίζας τους.

Προφανώς το ίδιο ισχύει και για το ίδιο το δέντρο $\mathbf{T_{A}}$.

Οι τεχνικές που θα περιγράψουμε είναι κατά βάση αναδρομικές αλλά είναι πάντα δυνατή η μετατροπή τους σε επαναληπτικές με τη χρήση μιας στοίβας.

Διαδικασίες Διάσχισης ενός Δυαδικού Δέντρου

Υποθέσεις

Για την περιγραφή των αλγορίθμων που αντιστοιχούν στις επόμενες τεχνικές που θα χρησιμοποιήσουμε το κατηγόρημα: **empty (T_A)**

Το κατηγόρημα αυτό επιστρέφει **True** αν το δέντρο με ρίζα **A** είναι «άδειο» δηλαδή αποτελείται μόνο από τη ρίζα.

Προφανώς ένα δυαδικό δέντρο είναι εκφυλισμένο αν και τα δύο υποδέντρα (δεξιό και αριστερό) είναι «άδεια».

Η τυπολογία δεν είναι αυστηρή και μπορεί κάλλιστα να προταθεί κάποια διαφορετική. Για παράδειγμα, θα ήταν δυνατό να γράψουμε ένα κατηγόρημα

degenerate(T_A) για το οποίο ισχύει ότι:

degenerate(T_A)= empty ($T_{A,L}$) <u>and</u> empty ($T_{A,R}$)

δηλαδή, τόσο το αριστερό όσο και το δεξιό υποδέντρο είναι «άδεια».

Διαδικασίες Διάσχισης ενός Δυαδικού Δέντρου

Τεχνικές:

pre order ή **προθεματική** (ή αλλιώς προδιατεταγμένη).
Σύμφωνα με την τεχνική αυτή η διάσχιση του δέντρου $\mathbf{T_A}$ εκτελείται με την ακόλουθη σειρά:

- επίσκεψη της ρίζας **A**
- προθεματική διάσχιση του αριστερού υποδέντρου $\mathbf{T_{A,L}}$
- προθεματική διάσχιση του δεξιού υποδέντρου $\mathbf{T_{A,R}}$

Διαδικασίες Διάσχισης ενός Δυαδικού Δέντρου

Τεχνικές:

pre order ή **προθεματική** (ή αλλιώς προδιατεταγμένη).
Σύμφωνα με την τεχνική αυτή η διάσχιση του δέντρου $\mathbf{T_A}$ εκτελείται με την ακόλουθη σειρά:

- επίσκεψη της ρίζας **A**
- προθεματική διάσχιση του αριστερού υποδέντρου $\mathbf{T_{A,L}}$
- προθεματική διάσχιση του δεξιού υποδέντρου $\mathbf{T_{A,R}}$

```
preorder (T_A)  {
   process (A);
   if (not empty (T_A,L))
        preorder (T_A,L);
   if (not empty (T_A,R))
        preorder (T_A,R);
}
```

Διαδικασίες Διάσχισης ενός Δυαδικού Δέντρου

Τεχνικές:

in order ή **ενθεματική** (ή αλλιώς ενδοδιατεταγμένη).
Σύμφωνα με την τεχνική αυτή η διάσχιση του δέντρου $\mathbf{T_A}$ εκτελείται με την ακόλουθη σειρά:

- ενθεματική διάσχιση του αριστερού υποδέντρου $\mathbf{T_{A,L}}$
- επίσκεψη της ρίζας $\mathbf{A}$
- ενθεματική διάσχιση του δεξιού υποδέντρου $\mathbf{T_{A,R}}$

Διαδικασίες Διάσχισης ενός Δυαδικού Δέντρου

Τεχνικές:

in order ή **ενθεματική** (ή αλλιώς ενδοδιατεταγμένη).

Σύμφωνα με την τεχνική αυτή η διάσχιση του δέντρου T_A εκτελείται με την ακόλουθη σειρά:

- ενθεματική διάσχιση του αριστερού υποδέντρου $T_{A,L}$
- επίσκεψη της ρίζας **A**
- ενθεματική διάσχιση του δεξιού υποδέντρου $T_{A,R}$

```
inorder (T_A)  {
   if (not empty (T_A,L))
        inorder (T_A,L);
   process(A);
   if (not empty (T_A,R))
        inorder (T_A,R);
}
```

Διαδικασίες Διάσχισης ενός Δυαδικού Δέντρου

Τεχνικές:

post order ή **μεταθεματική** (ή αλλιώς μεταδιατεταγμένη).

Σύμφωνα με την τεχνική αυτή η διάσχιση του δέντρου $\mathbf{T_A}$ εκτελείται με την ακόλουθη σειρά:

- μεταθεματική διάσχιση του αριστερού υποδέντρου $\mathbf{T_{A,L}}$
- μεταθεματική διάσχιση του δεξιού υποδέντρου $\mathbf{T_{A,R}}$
- επίσκεψη της ρίζας $\mathbf{A}$

Διαδικασίες Διάσχισης ενός Δυαδικού Δέντρου

Τεχνικές:

post order ή **μεταθεματική** (ή αλλιώς μεταδιατεταγμένη).
Σύμφωνα με την τεχνική αυτή η διάσχιση του δέντρου T_A εκτελείται με την ακόλουθη σειρά:

- μεταθεματική διάσχιση του αριστερού υποδέντρου $T_{A,L}$
- μεταθεματική διάσχιση του δεξιού υποδέντρου $T_{A,R}$
- επίσκεψη της ρίζας **A**

postorder (T_A) {
    if (not empty ($T_{A,L}$))
        postorder ($T_{A,L}$);
    if (not empty ($T_{A,R}$))
        postorder ($T_{A,R}$);
    process(A);
}

Διαδικασίες Διάσχισης ενός Δέντρου

Παράδειγμα εφαρμογής διάσχισης **pre order**

A, B, D, G, E, C, F, H, I

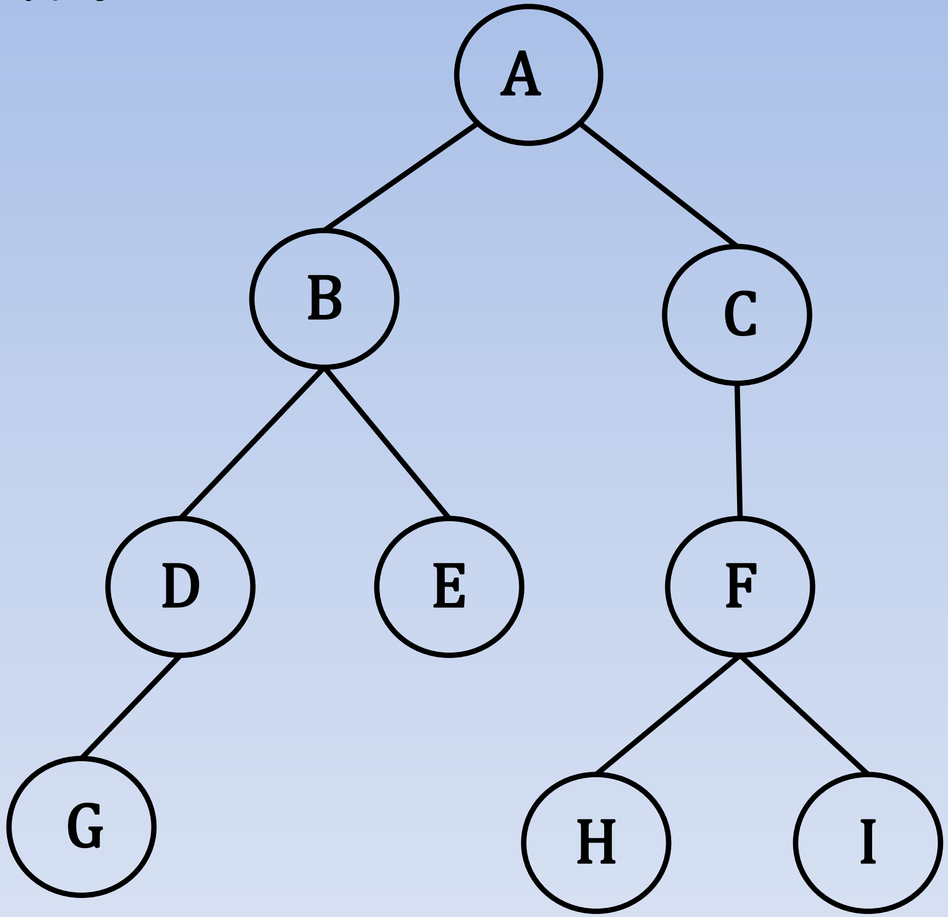
(

A

(B (D (G ( ) ( )) ( )) (E ( ) ( )))

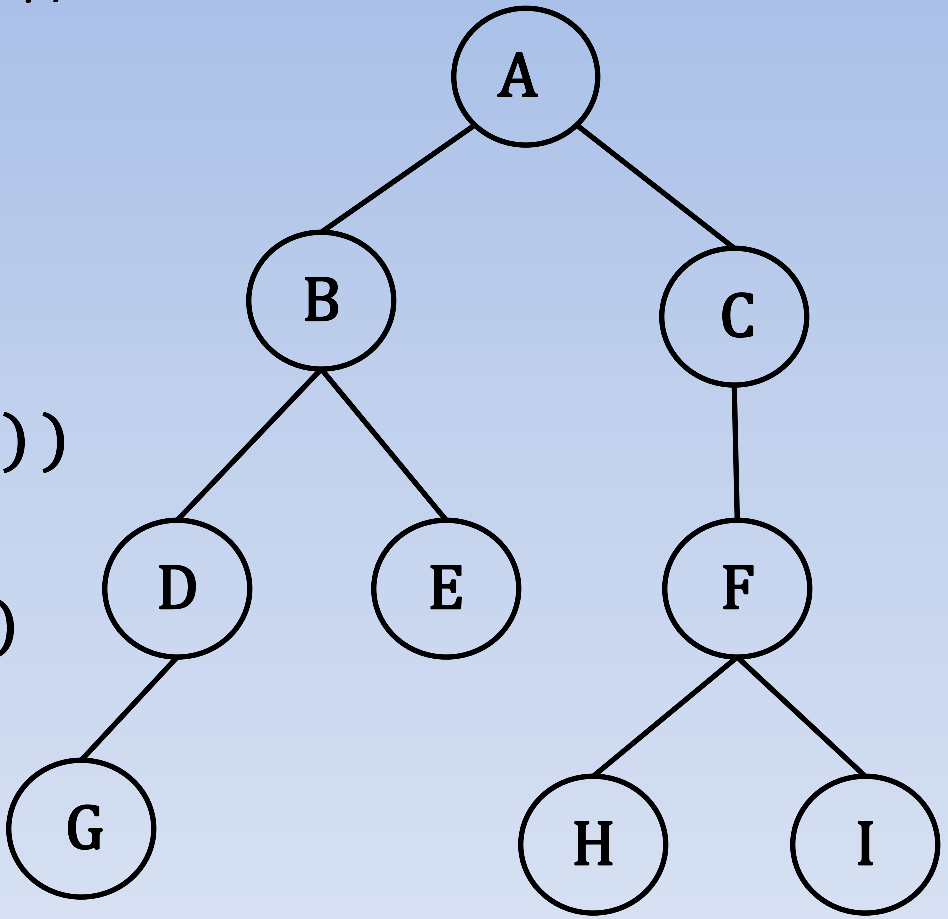
(C (F (H ( ) ( )) (I ( ) ( ))) ( ))

)



Διαδικασίες Διάσχισης ενός Δέντρου

Παράδειγμα εφαρμογής διάσχισης **in order**



G, D, B, E, A, H, F, I, C

(

(((( ) G ( )) D ( )) B (( ) E ( )))

A

(((( ) H ( )) F (( ) I ( ))) C ( ))

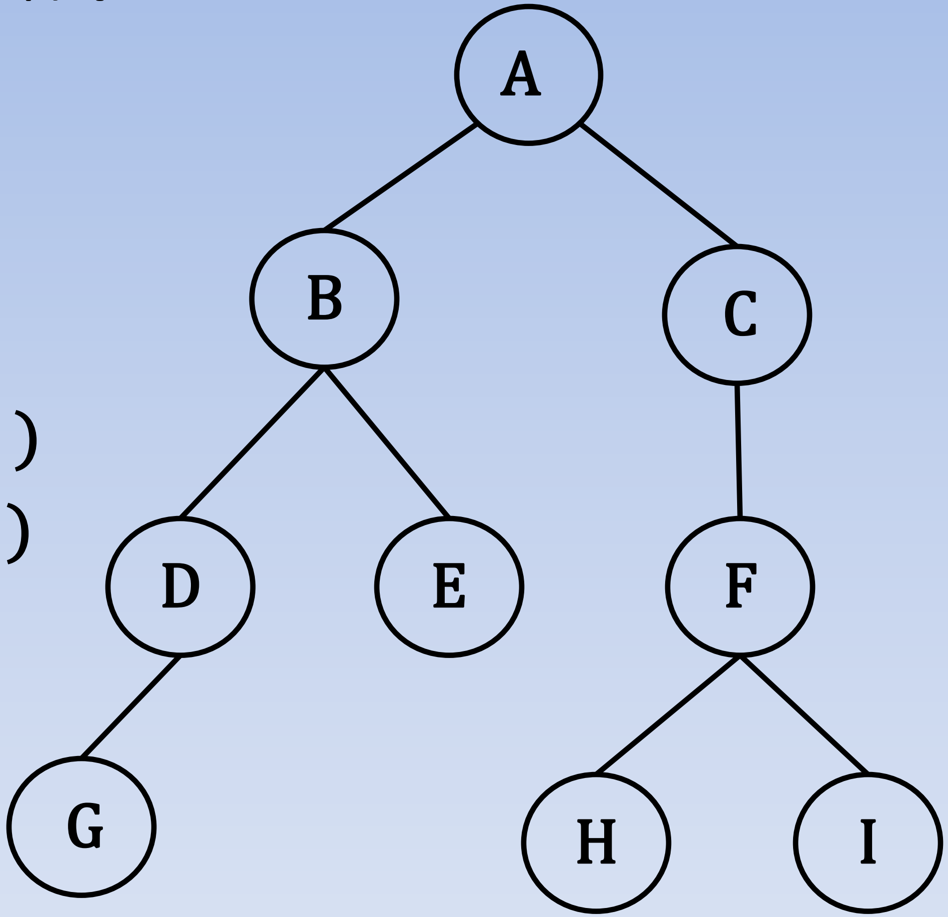
)

Διαδικασίες Διάσχισης ενός Δέντρου

Παράδειγμα εφαρμογής διάσχισης **post order**

G, D, E, B, H, I, F, C, A

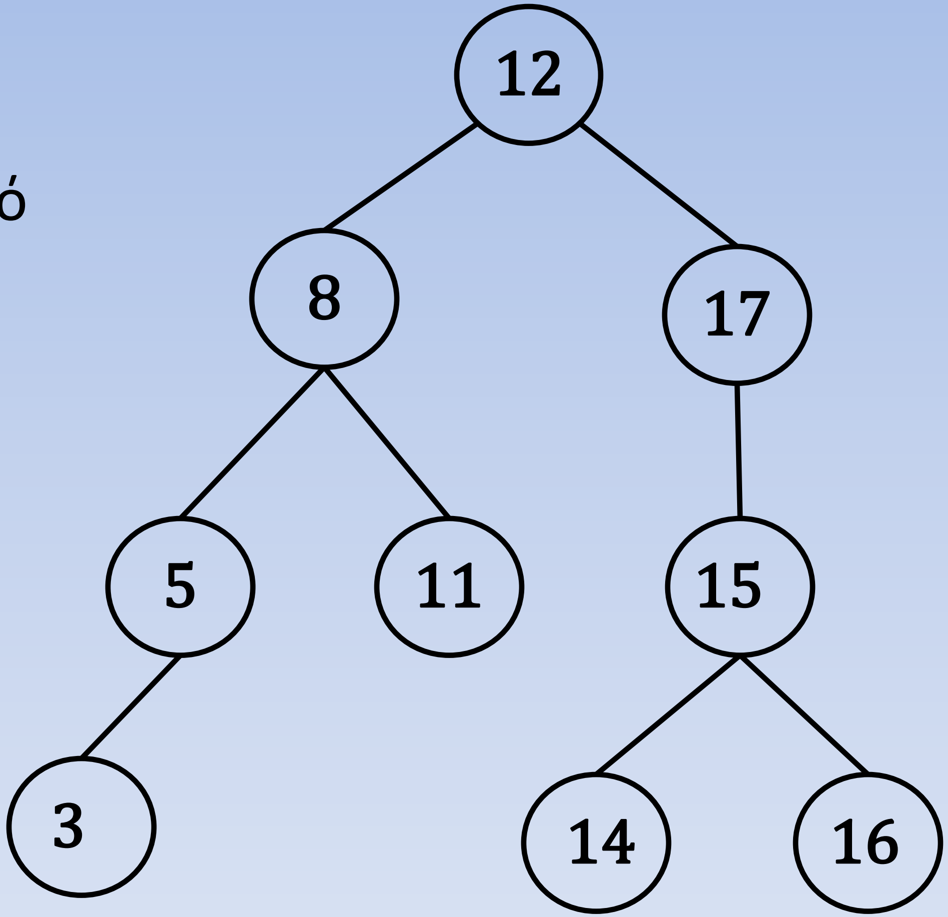
(
(((( ) ( ) G) ( ) D) (( ) ( ) E) B)
(((( ) ( ) H) (( ) ( ) I) F) ( ) C)
A
)



Διαδικασίες Διάσχισης ενός Δέντρου

Άσκηση

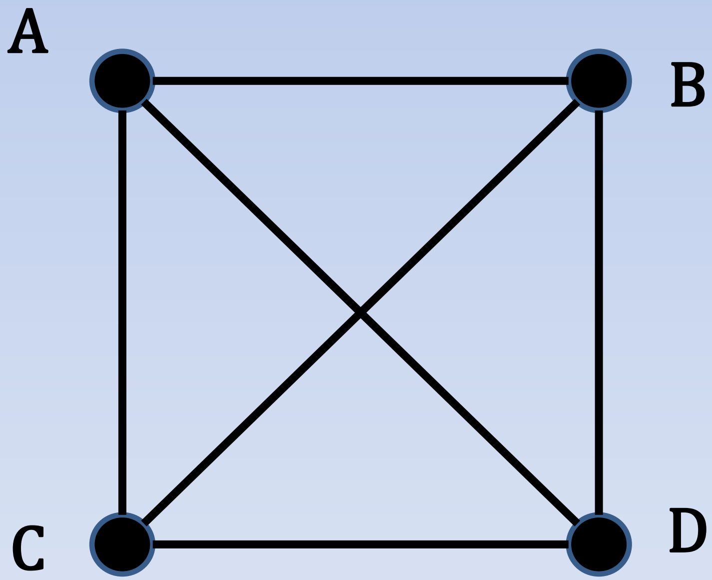
Στο επόμενο δέντρο εφαρμόστε την ενθεματική διάσχιση και σε κάθε κορυφή τυπώστε τον αριθμό της κορυφής. Τι παρατηρείτε;



Ιδιότητες ενός Δέντρου

Άσκηση

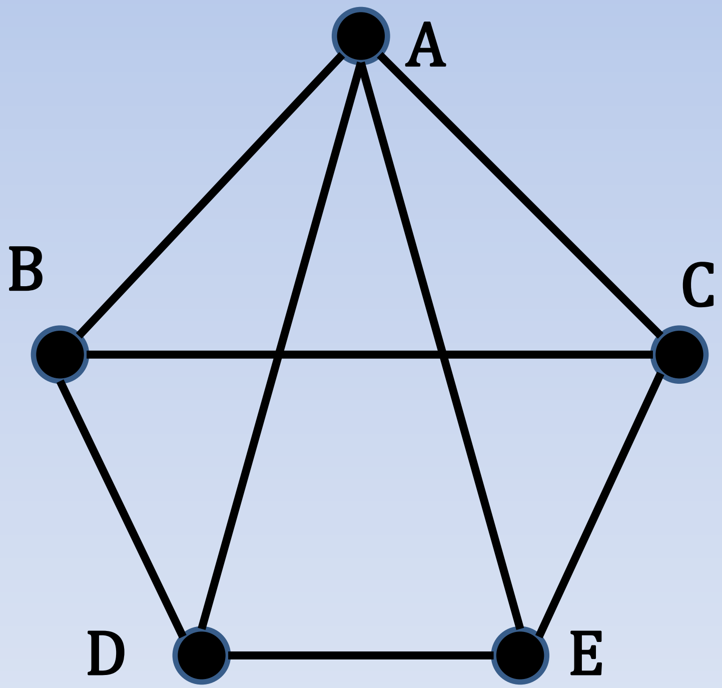
Ποιός είναι ο αριθμός ακμών που χρειάζεται να διαγραφούν στο επόμενο γράφημα ώστε να προκύψει ένα δέντρο. Ποιές ακμές θα προτείνατε;



Ιδιότητες ενός Δέντρου

Άσκηση

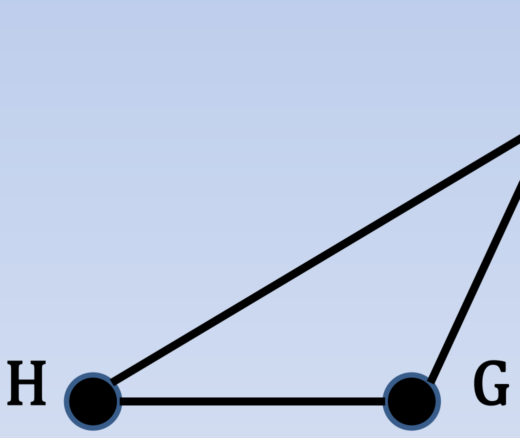
Ποιός είναι ο αριθμός ακμών που χρειάζεται να διαγραφούν στο επόμενο γράφημα ώστε να προκύψει ένα δέντρο. Ποιές ακμές θα προτείνατε;

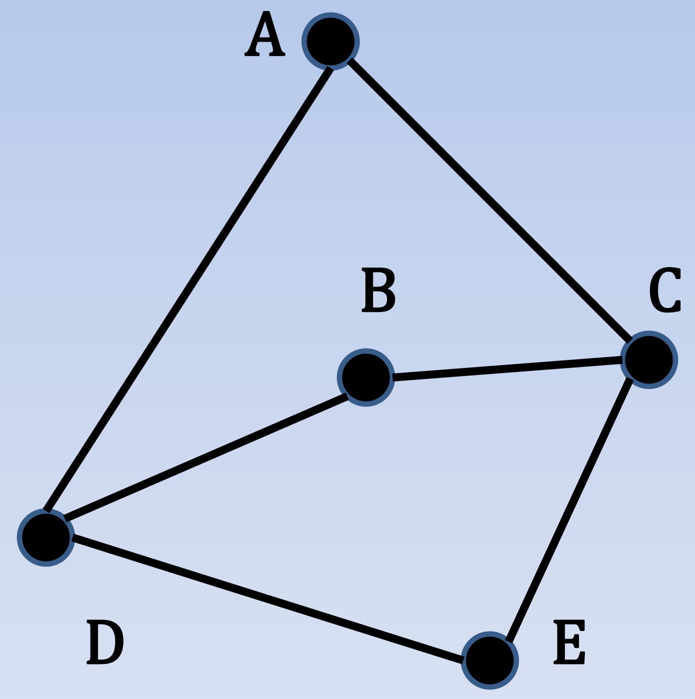


Ιδιότητες ενός Δέντρου

Άσκηση

Ποιός είναι ο αριθμός ακμών που χρειάζεται να διαγραφούν σε κάθε ένα από τα επόμενα γραφήματα ώστε να προκύψει ένα δάσος; Ποιές ακμές θα προτείνατε;

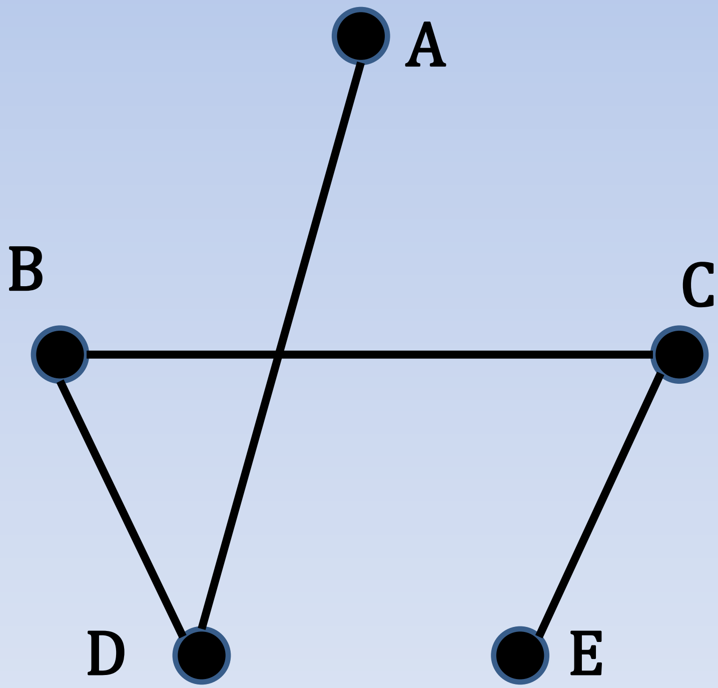




Ιδιότητες ενός Δέντρου

Άσκηση

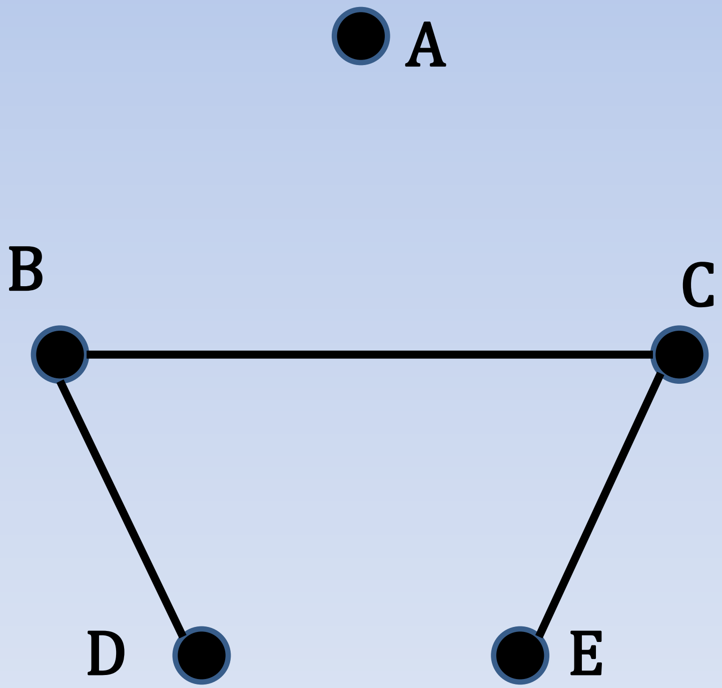
Στο επόμενο γράφημα πως είναι δυνατό να προσθέσουμε μια ακμή χωρίς να προκύψει κύκλωμα;



Ιδιότητες ενός Δέντρου

Άσκηση

Όμοια ερώτηση για το επόμενο γράφημα.



Εφαρμογές των n-αδικών δέντρων

Δυαδικό δένδρο ταξινόμησης και αναζήτησης

Η χρήση δυαδικών δένδρων σαν μια μη γραμμική δυναμική δομή δεδομένων πολλές φορές θεωρείται αποτελεσματικότερη τόσο για την ταξινόμηση όσο και για την αναζήτηση στοιχείων.

Ας υποθέσουμε ότι τα στοιχεία μιας ακολουθίας $\mathbf{x_1, x_2, \ldots x_k}$ είναι όλα συγκρίσιμα μεταξύ τους, δηλαδή υπακούουν σε μια σχέση ολικής διάταξης. Τα στοιχεία «φθάνουν» με κάποια σειρά σε ένα σύστημα επεξεργασίας και καταχωρούνται με τη σειρά αυτή.

Το ζήτημα της ταξινόμησης των στοιχείων και της αναζήτησης ενός στοιχείου συνήθως αντιμετωπίζεται με τη χρήση γραμμικών στατικών δομών δεδομένων όπως οι μονοδιάστατοι πίνακες και συναφών αλγορίθμων.

Εφαρμογές των n-αδικών δέντρων

Δυαδικό δένδρο ταξινόμησης και αναζήτησης

Στην περίπτωση όμως που η ακολουθία των δεδομένων ανανεώνεται χωρίς να γνωρίζουμε πότε σταματάει η διαδικασία αντί για τη χρήση μιας μονοδιάστατης γραμμικής δομής στατικής (πίνακα) ή δυναμικής (συνδεδεμένη λίστα) μπορεί χρησιμοποιηθεί ένα δυαδικό δέντρο.

Η προσθήκη ενός νέου στοιχείου σε ένα δυαδικό δέντρο αναζήτησης δεν επηρεάζει κάποια προ-υπάρχουσα ταξινόμηση.

Η δε αναζήτηση ενός στοιχείου προκύπτει από τη διάσχιση η οποία δίνει την ταξινομημένη ακολουθία των στοιχείων.

Εφαρμογές των n-αδικών δέντρων

Δυαδικό δένδρο ταξινόμησης και αναζήτησης

Εδώ θα παρουσιάσουμε τη χρήση δυαδικών δέντρων για το πρόβλημα αυτό.

Η τεχνική που ακολουθείται για την κατασκευή ενός δυαδικού δέντρου αναζήτησης ακολουθεί την ακόλουθη αναδρομική διαδικασία:

1. το πρώτο στοιχείο της ακολουθίας αποτελεί τη ρίζα του δέντρου,
2. κάθε νέο στοιχείο της ακολουθίας συγκρίνεται με τη ρίζα του δέντρου,

   (συνέχεια)

Εφαρμογές των n-αδικών δέντρων

Δυαδικό δένδρο ταξινόμησης και αναζήτησης

(συνέχεια)

- αν το στοιχείο είναι μικρότερο τότε:
  - αν υπάρχει αριστερό υποδέντρο τότε η σύγκριση συνεχίζεται αναδρομικά στο αριστερό υποδέντρο,
  - αν όχι τότε δημιουργείται ένας νεός κόμβος ως αριστερό παιδί της ρίζας και τοποθετείται το συγκεκριμένο στοιχείο
- άν το στοιχείο είναι μεγαλύτερο ή ίσο τότε:
  - αν υπάρχει δεξιό υποδέντρο τότε η σύγκριση συνεχίζεται αναδρομικά στο δεξιό υποδέντρο
  - αν όχι τότε δημιουργείται ένας νέος κόμβος ως δεξιό παιδί της ρίζας και τοποθετείται το συγκεκριμένο στοιχείο

Εφαρμογές των n-αδικών δέντρων

Δυαδικό δέντρο ταξινόμησης και αναζήτησης

$\mathbf{7, 2, 21, 9, 6, 10, 28, 4}$.

$\mathbf{7} \rightarrow$ Ρίζα

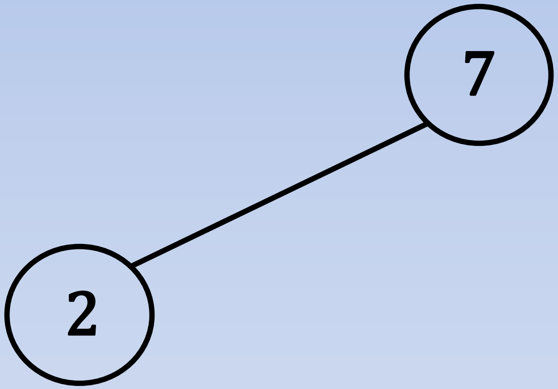
$\mathbf{7}$

Εφαρμογές των n-αδικών δέντρων

Δυαδικό δέντρο ταξινόμησης και αναζήτησης

$\cancel{7}$, 2, 21, 9, 6, 10, 28, 4.

$2 \rightarrow T_{7,L}$

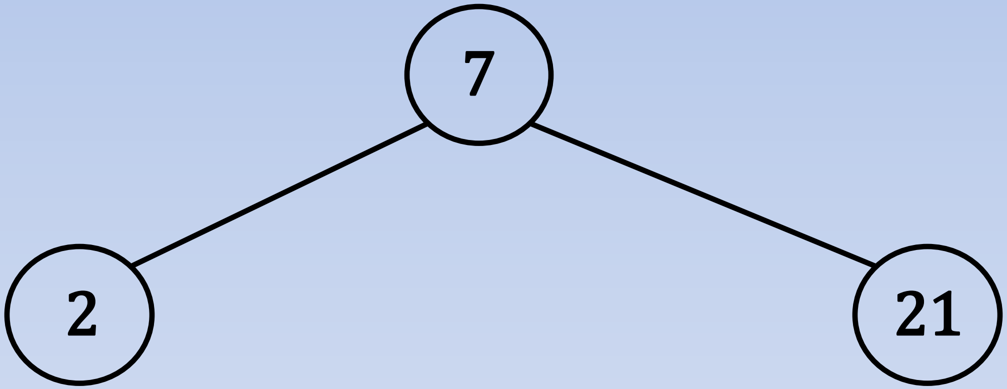


Εφαρμογές των n-αδικών δέντρων

Δυαδικό δέντρο ταξινόμησης και αναζήτησης

~~7, 2,~~ 21, 9, 6, 10, 28, 4.

$21 \rightarrow T_{7,R}$

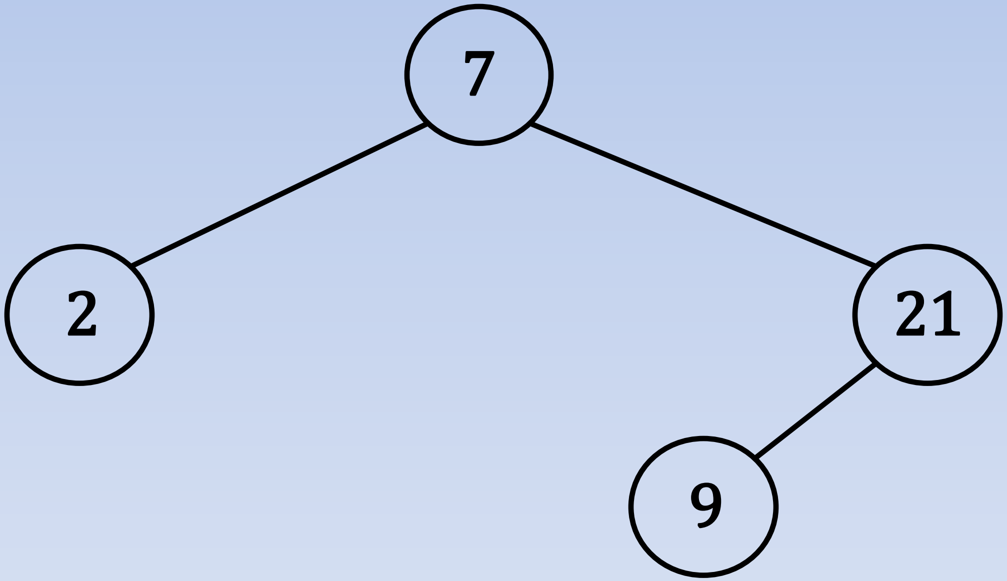


Εφαρμογές των n-αδικών δέντρων

Δυαδικό δέντρο ταξινόμησης και αναζήτησης

~~7, 2, 21,~~ 9, 6, 10, 28, 4.

$9 \rightarrow T_{7,R} \rightarrow T_{21,L}$

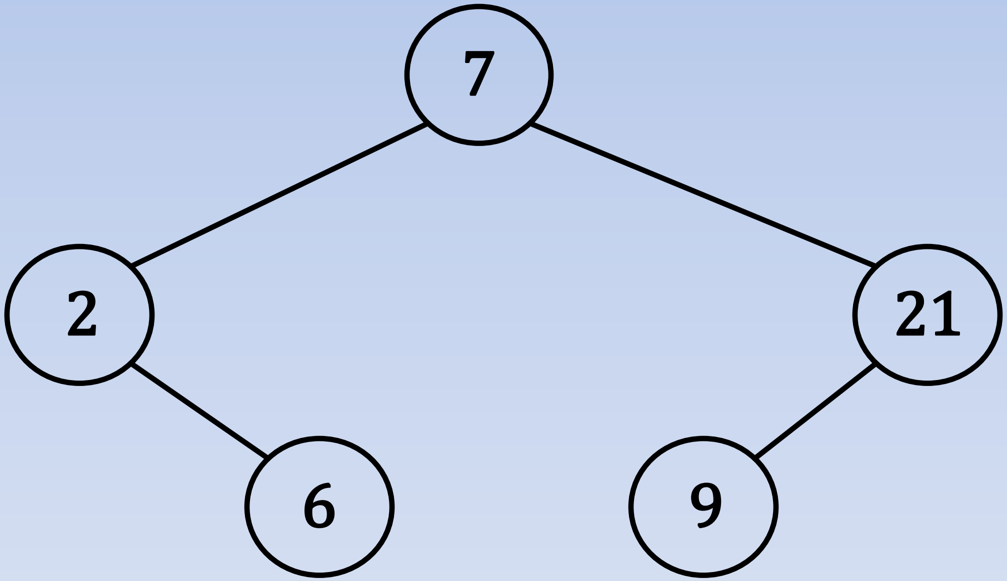


Εφαρμογές των n-αδικών δέντρων

Δυαδικό δέντρο ταξινόμησης και αναζήτησης

~~7, 2, 21, 9~~, 6, 10, 28, 4.

$6 \rightarrow T_{7,L} \rightarrow T_{2,R}$

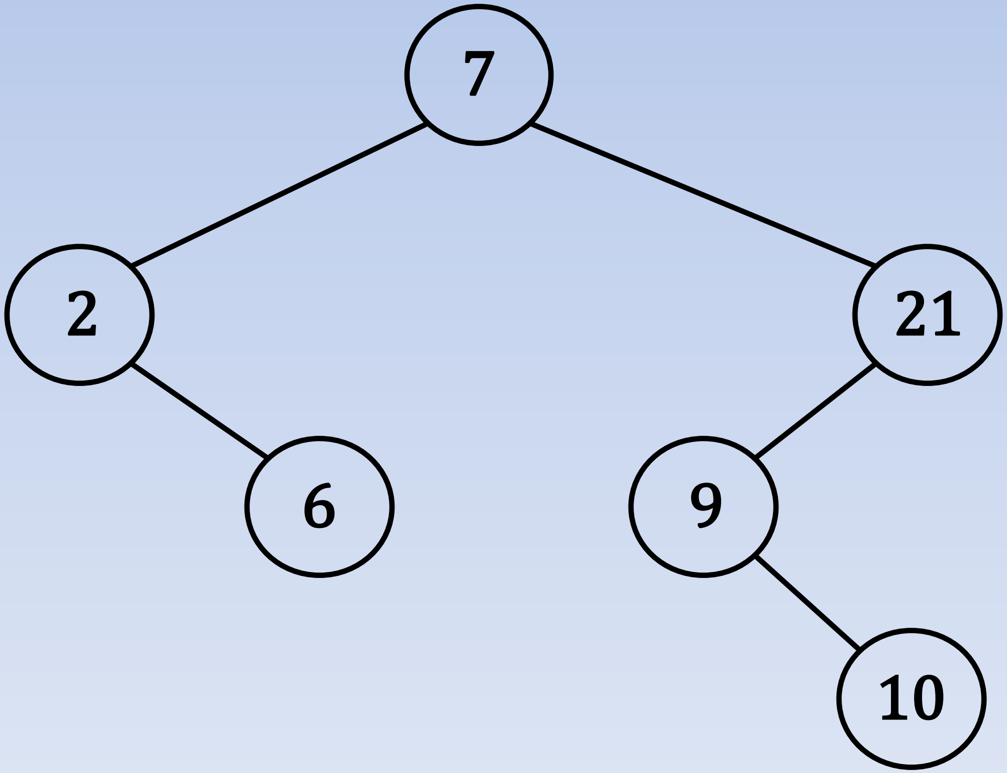


Εφαρμογές των n-αδικών δέντρων

Δυαδικό δέντρο ταξινόμησης και αναζήτησης

~~7, 2, 21, 9, 6~~, 10, 28, 4.

$10 \rightarrow T_{7,R} \rightarrow T_{21,L} \rightarrow T_{9,R}$

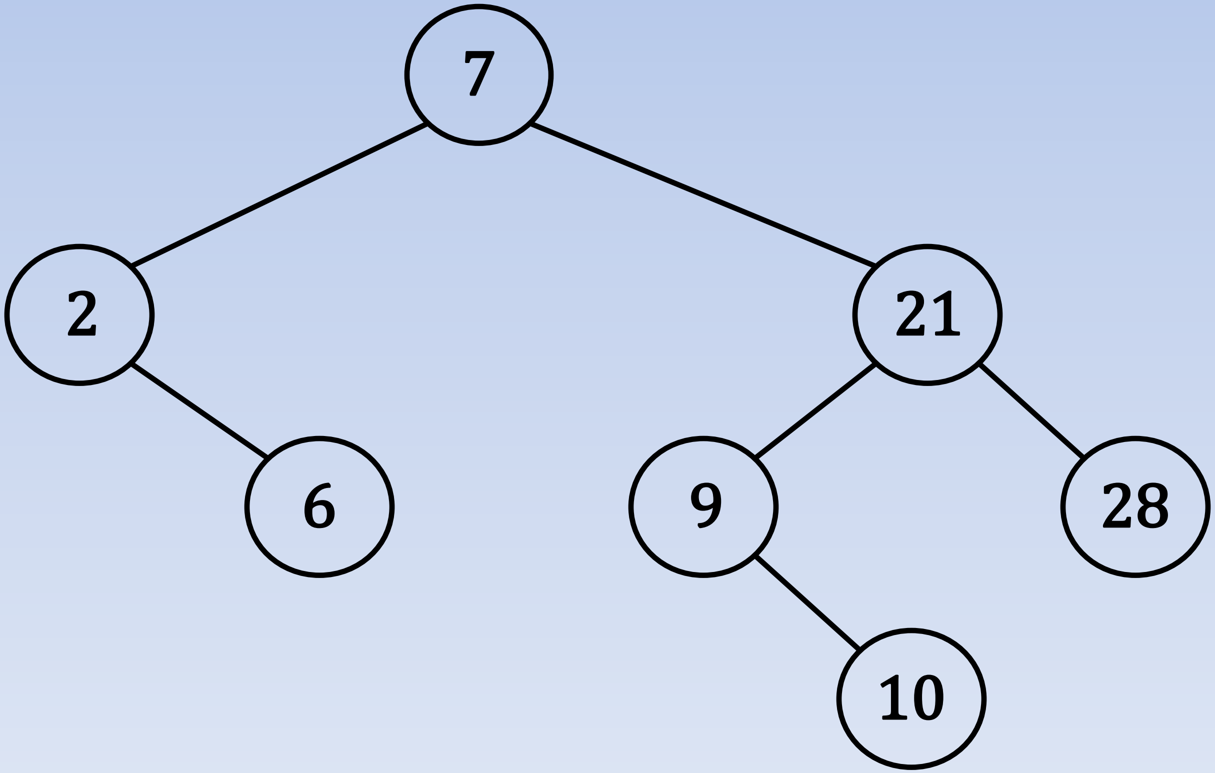


Εφαρμογές των n-αδικών δέντρων

Δυαδικό δέντρο ταξινόμησης και αναζήτησης

~~7, 2, 21, 9, 6, 10,~~ 28, 4.

$10 \rightarrow T_{7,R} \rightarrow T_{21,R}$

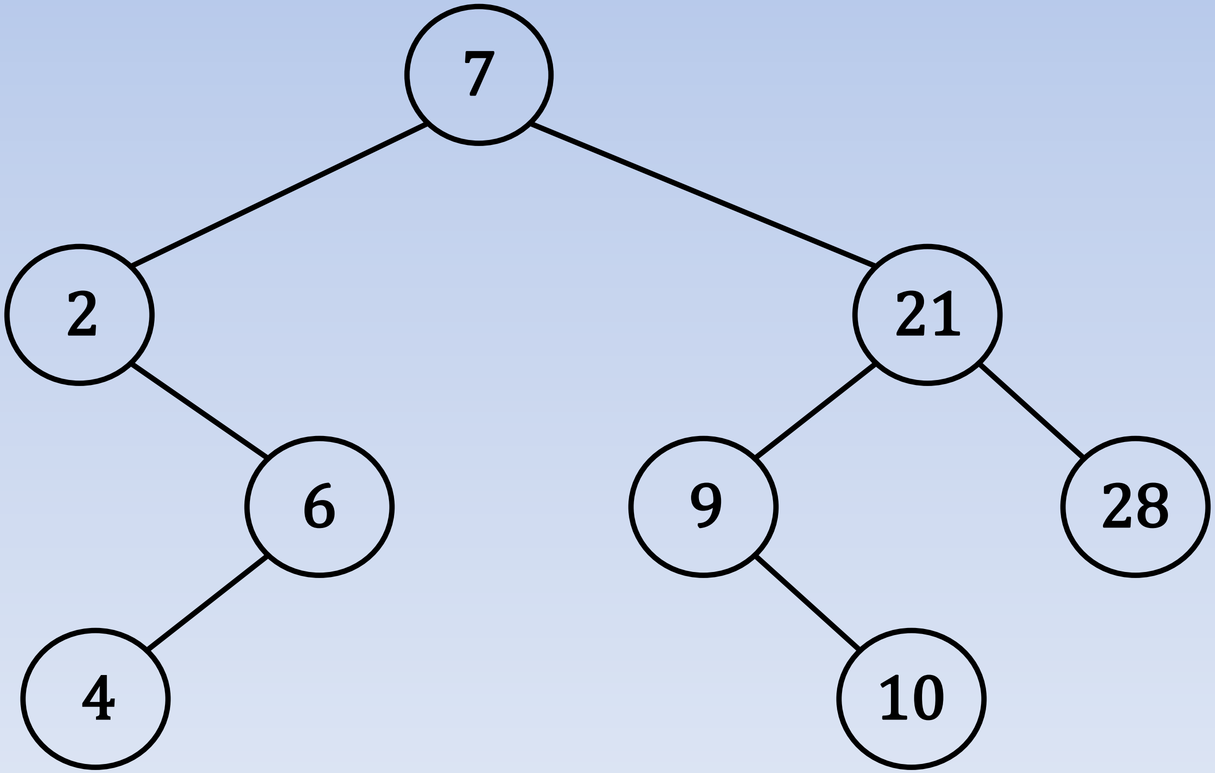


Εφαρμογές των n-αδικών δέντρων

Δυαδικό δέντρο ταξινόμησης και αναζήτησης

~~7, 2, 21, 9, 6, 10, 28~~, 4.

$4 \rightarrow T_{7,L} \rightarrow T_{2,R} \rightarrow T_{6,L}$



Εφαρμογές των n-αδικών δέντρων

Δυαδικό δέντρο ταξινόμησης και αναζήτησης

Για την ακολουθία των στοιχείων **7, 2, 21, 9, 6, 10, 18, 4**. εφαρμόστηκε η προηγούμενη αναδρομική διαδικασία.

Παρατηρήσεις:

- Στις ακμές είναι δυνατό να σημειωθούν κατευθύνσεις από τη ρίζα προς τους υπόλοιπους κόμβους.
- Τις ακμές μπορούμε να τις αριθμήσουμε με τη σειρά με την οποία δημιουργούνται οι κόμβοι διακλάδωσης στους οποίους καταλήγουν οι ακμές αυτές.

Άσκηση

Εφαρμόστε τις δύο προηγούμενες παρατηρήσεις στο δέντρο που κατασκευάστηκε.

Εφαρμογές των n-αδικών δέντρων

Δυαδικό δέντρο ταξινόμησης και αναζήτησης

Για την αναζήτηση ενός στοιχείου ακολουθείται η ίδια αναδρομική διαδικασία το αποτέλεσμα της οποίας είναι:

- είτε να βρεθεί κόμβος ή φύλλο του δένδρου που φέρει το εν λόγω στοιχείο,
- είτε να μην υπάρχει τέτοιος κόμβος και άρα το στοιχείο δεν ανήκει στην ακολουθία αυτή.

Αν μια διαδικασία διασχίσει το προηγούμενο δέντρο με τη ενθεματική (in order) διάσχιση και στη ρίζα κάθε υποδέντρου τυπώνει το στοιχείο που φέρει η ρίζα το αποτέλεσμα είναι η ακολουθία των στοιχείων σε αύξουσα τάξη:

2, 4, 6, 7, 9, 10, 18, 21

Εφαρμογές των n-αδικών δέντρων

Δυαδικό δέντρο ταξινόμησης και αναζήτησης

Άσκηση

Εξηγείστε ποιά είναι η διαδικασία ώστε η προηγούμενη ακολουθία των στοιχείων να τοποθετηθεί σε ένα δυαδικό δέντρο και μετά από την κατάλληλη διάσχιση η ακολουθία των στοιχείων που θα προκύψει θα είναι σε φθίνουσα τάξη.

Εφαρμογές των n-αδικών δέντρων

Αφηρημένο συντακτικό δέντρο

Τα **n**-αδικά δέντρα χρησιμοποιούνται για την αναπαράσταση της σύνταξης των συμβολοσειρών - εκφράσεων μιας τυπικής γλώσσας.

Στην περίπτωση αυτή τα δέντρα χαρακτηρίζονται ως συντακτικά και στους κόμβους τους αναρτάται χρήσιμη πληροφορία η οποία αξιοποιείται κατά τη συντακτική ανάλυση των φράσεων μιας γλώσσας όπως η συντακτική ανάλυση ενός προγράμματος γραμμένου σε μία γλώσσα προγραμματισμού.

Η αναλυτική περιγραφή της χρήσης των συντακτικών δέντρων για τη συντακτική ανάλυση προγραμμάτων (parsing) είναι αντικείμενο των μεταγλωττιστών και της Θεωρίας Υπολογισμού.

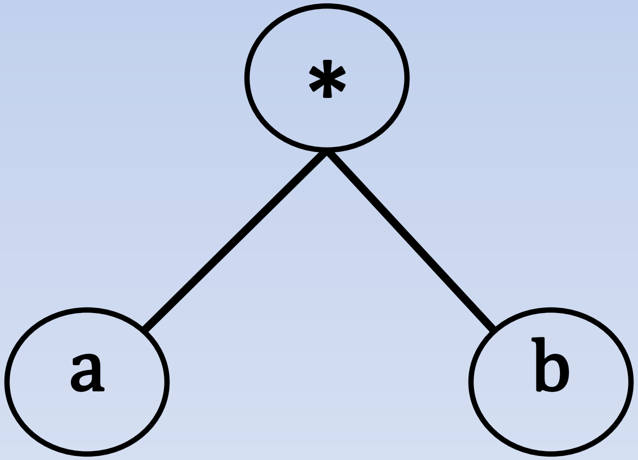
Εδώ θα δούμε τη χρήση των δυαδικών δέντρων ως αφηρημένα συντακτικά δέντρα για την αναπαράσταση αριθμητικών εκφράσεων

Εφαρμογές των n-αδικών δέντρων

Αφηρημένο συντακτικό δέντρο

Έστω η αριθμητική έκφραση $\mathbf{a} * \mathbf{b}$ όπου $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$ είναι είτε αριθμοί είτε μεταβλητές είτε εκφράσεις που συμμετέχουν ως τελεσταίοι (operands) στη δυαδική πράξη του πολλαπλασιασμού.

Το αφηρημένο συντακτικό δέντρο που αντιστοιχεί στην έκφραση αυτή είναι:



Εφαρμογές των n-αδικών δέντρων

Αφηρημένο συντακτικό δέντρο

Παρατηρείστε ότι:

- Η ρίζα του δέντρου είναι ο τελεστής.
- Ο πρώτος τελεσταίος αναρτάται στο αριστερό υποδέντρο ενώ ο δεύτερος στο δεξιό.
- Αν η έκφραση δεν είχε τον ένα από τους δύο τελεσταίους τότε θα έλειπε το αντίστοιχο υποδέντρο, γεγονός που δηλώνει συντακτικό σφάλμα στην κατασκευή της αριθμητικής έκφρασης.
- Μια ενθεματική διάσχιση του δέντρου δίνει τη σχέση: $\mathbf{a * b}$
- Μια προθεματική διάσχιση του δέντρου δίνει τη σχέση: $\mathbf{* \; b \; a}$
- Μια μεταθεματική διάσχιση του δέντρου δίνει τη σχέση: $\mathbf{b \; a \; *}$

Εφαρμογές των n-αδικών δέντρων

Αφηρημένο συντακτικό δέντρο

Οι δύο τελευταίες εκφράσεις ονομάζονται αντίστοιχα προθεματική και μεταθεματική έκφραση ή αλλιώς **polish** και **reverse polish forms** της αριθμητικής έκφρασης.

Για τη χρήση και τον υπολογισμό των ιδιαίτερων αυτών μορφών δείτε τα ακόλουθα links:

https://en.wikipedia.org/wiki/Polish_notation

https://en.wikipedia.org/wiki/Reverse_Polish_notation

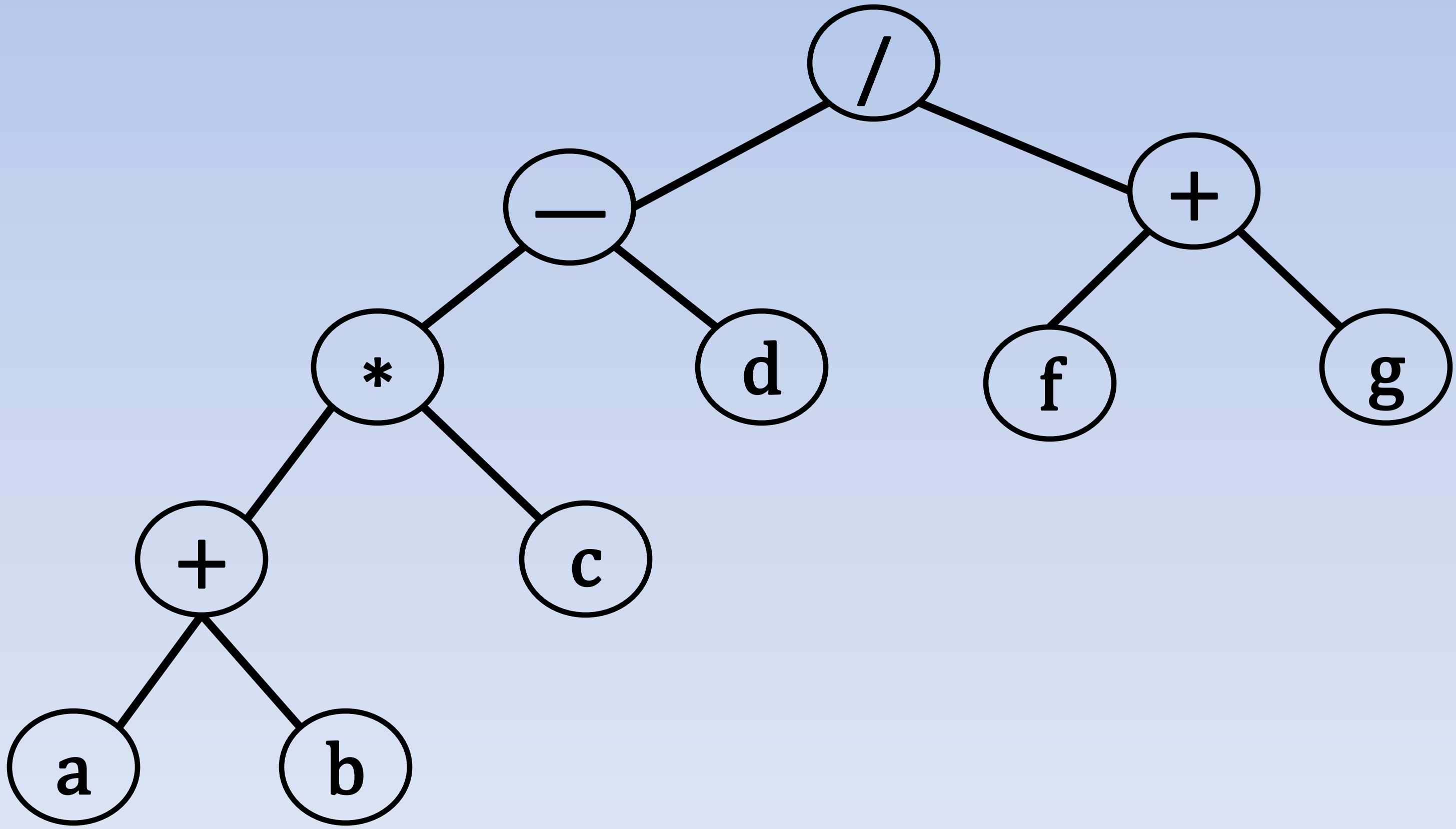
ή το Κεφάλαιο σχετικό με τα δέντρα από το βιβλίο της Gersting.

Οι δύο αυτές μορφές χρησιμοποιούνται κατά την αξιολόγηση των εκφράσεων σε ειδικές περιπτώσεις όπως οι μηχανές στοίβας.

Εφαρμογές των n-αδικών δέντρων

Αφηρημένο συντακτικό δέντρο

Χρήση των αφηρημένων συντακτικών δέντρων σε πολυπλοκότερες εκφράσεις, $\left[\left((\mathbf{a}+\mathbf{b}) * \mathbf{c}\right) - \mathbf{d}\right]/(\mathbf{f}+\mathbf{g})$



Εφαρμογές των n-αδικών δέντρων

Αφηρημένο συντακτικό δέντρο

Η ενθεματική διάσχιση του δέντρου αυτού δίνει την έκφραση του παραδείγματος υπό την προϋπόθεση ότι κάθε φορά που ξεκινά η διάσχιση ενός υποδέντρου τότε ανοίγει μία παρένθεση και κλείνει κάθε φορά που τελειώνει η διάσχιση του.

$$\mathbf{\left[\left((a+b)*c\right)-d\right]/(f+g)}$$

Η προθεματική διάσχιση δίνει την προθεματική (polish) μορφή:

$$\mathbf{/-*+a\ b\ c\ d\ \ +f\ g} \qquad \mathbf{/(-(*\ (+a\ b)c)\ d)(+f\ g)}$$

Η μεταθεματική διάσχιση δίνει την μεταθεματική (reverse polish) μορφή:

$$\mathbf{a\ b+c*d-f\ g+/} \qquad \mathbf{(((a\ b+)c*)d-)(f\ g+)/}$$

Εφαρμογές των n-αδικών δέντρων

Αφηρημένο συντακτικό δέντρο

Η πλήρης χρήση των παρενθέσεων δίνει ένα και μοναδικό δυαδικό δέντρο για κάθε αριθμητική έκφραση. Αν δεν γίνει χρήση παρενθέσεων τότε υπάρχουν διάφορα δυαδικά δέντρα που είναι δυνατόν να κατασκευασθούν με βάση την αρχική έκφραση.

Στην περίπτωση που η αριθμητική έκφραση δεν είναι συντακτικά ορθή τότε η κατασκευή του δυαδικού δέντρου δεν είναι εφικτή ή είναι ελλιπής. Οι περιπτώσεις αυτές αφορούν τη χρήση των δυαδικών και γενικότερα **n-αδικών** δέντρων ως συντακτικών δέντρων για την αναγνώριση γλωσσών που ορίζονται από γραμματικές χωρίς συμφραζόμενα.

Επικαλύπτον Δέντρο

Ορισμός

Έστω $\mathbf{G}=(\mathbf{X}, \mathbf{U})$ ένα μη κατευθυνόμενο συνεκτικό γράφημα. Ένα επικαλύπτον δέντρο του $\mathbf{G}$ είναι ένα μερικό γράφημα (επικαλύπτον υπογράφημα) του $\mathbf{G}$ το οποίο είναι δέντρο, δηλαδή συνεκτικό χωρίς κύκλο.

Μια κατηγορία προβλημάτων απαιτεί σε ένα γράφημα να προσδιορισθεί ένα επικαλύπτον δένδρο. Η αναζήτηση ενός επικαλύπτοντος δέντρου στα προβλήματα αυτά «οφείλεται» κυρίως στην ιδιότητα των δέντρων να είναι ακυκλικά γραφήματα (χωρίς κύκλο), δηλαδή, μεταξύ δύο οποιωνδήποτε κόμβων να υπάρχει ένας μοναδικός τρόπος μετάβασης από τον ένα κόμβο σε κάποιο άλλο.

Επικαλύπτον Δέντρο - Αλγόριθμος

Αλγόριθμος αναζήτησης ενός επικαλύπτοντος δέντρου

Έστω $\mathbf{G=(X, U)}$ ένα μη κατευθυνόμενο συνεκτικό γράφημα. Ο αλγόριθμος που προτείνεται κατασκευάζει ένα μερικό γράφημα του $\mathbf{G}$ έστω $\mathbf{G'=(X', U')}$ το οποίο είναι δέντρο. Προφανώς $\mathbf{X' = X}$.

Λογική του αλγορίθμου

Επιλέγεται τυχαία μια κορυφή και σημειώνεται ώστε να μην είναι επισκέψιμη, δηλαδή, να μην καταλήξει σε αυτή με κάποια ακμή. Ακολουθείται τυχαία μια ακμή και με την άφιξη στην κορυφή αυτή σημειώνεται ώστε να μην είναι δυντό να καταλήξει στη συνέχεια ο αλγορίθμος σε αυτή την κορυφή ακολουθώντας μια ακμή.

Στη συνέχεια επιλέγεται τυχαία μια κορυφή που έχει ήδη επισκεφτεί ο αλγόριθμος και ξεκινά ακολουθώντας μια ακμή η οποία δεν καταλήγει σε σημειωμένη κορυφή.

Επικαλύπτον Δέντρο - Αλγόριθμος

Βήμα (0) : Αρχικοποίηση. Θέτουμε $\mathbf{U'} = \emptyset$. Έστω κορυφή $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$. Η κορυφή $\mathbf{x}$ σημαδεύεται με $+$. Συνέχεια στο **Βήμα (1).**

Επικαλύπτον Δέντρο - Αλγόριθμος

Βήμα (0) : Αρχικοποίηση. Θέτουμε $\mathbf{U'} = \emptyset$. Έστω κορυφή $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$**.** Η κορυφή $\mathbf{x}$ σημαδεύεται με $+$. Συνέχεια στο **Βήμα (1).**

Βήμα (1) : Αν υπάρχει ακμή $\mathbf{u} = (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbf{U}$ τέτοια ώστε η κορυφή $\mathbf{y}$ δεν είναι σημειωμένη με $+$ τότε, Συνέχεια στο **Βήμα (2)**

αλλιώς, Συνέχεια στο **Βήμα (3)**

Επικαλύπτον Δέντρο - Αλγόριθμος

Βήμα (0) : Αρχικοποίηση. Θέτουμε $\mathbf{U'} = \emptyset$. Έστω κορυφή $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$. Η κορυφή $\mathbf{x}$ σημαδεύεται με $+$. Συνέχεια στο **Βήμα** (1).

Βήμα (1) : Αν υπάρχει ακμή $\mathbf{u} = (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbf{U}$ τέτοια ώστε η κορυφή $\mathbf{y}$ δεν είναι σημειωμένη με $+$ τότε, Συνέχεια στο **Βήμα** (2)
αλλιώς, Συνέχεια στο **Βήμα** (3).

Βήμα (2) : Η κορυφή $\mathbf{y}$ σημειώνεται με $+$ και θέτουμε $\mathbf{U'} = \mathbf{U'} \cup \{\mathbf{u}\}$
Συνέχεια στο **Βήμα** (1).

Επικαλύπτον Δέντρο - Αλγόριθμος

Βήμα $\mathbf{(0)}$: Αρχικοποίηση. Θέτουμε $\mathbf{U' = \emptyset}$. Έστω κορυφή $\mathbf{x \in X}$. Η κορυφή $\mathbf{x}$ σημαδεύεται με $\mathbf{+}$. Συνέχεια στο **Βήμα** $\mathbf{(1)}$.

Βήμα $\mathbf{(1)}$: Αν υπάρχει ακμή $\mathbf{u = (x, y) \in U}$ τέτοια ώστε η κορυφή $\mathbf{y}$ δεν είναι σημειωμένη με $\mathbf{+}$ τότε, Συνέχεια στο **Βήμα** $\mathbf{(2)}$
αλλιώς, Συνέχεια στο **Βήμα** $\mathbf{(3)}$.

Βήμα $\mathbf{(2)}$: Η κορυφή $\mathbf{y}$ σημειώνεται με $\mathbf{+}$ και θέτουμε $\mathbf{U' = U' \cup \{u\}}$
Συνέχεια στο **Βήμα** $\mathbf{(1)}$.

Βήμα $\mathbf{(3)}$: Η κορυφή $\mathbf{x}$ θεωρείται κορεσμένη και σημειώνεται με $\mathbf{s}$ (saturated). Συνέχεια στο **Βήμα** $\mathbf{(4)}$.

Επικαλύπτον Δέντρο - Αλγόριθμος

Βήμα (0) : Αρχικοποίηση. Θέτουμε $\mathbf{U' = \emptyset}$. Έστω κορυφή $\mathbf{x \in X}$. Η κορυφή $\mathbf{x}$ σημαδεύεται με $\mathbf{+}$. Συνέχεια στο **Βήμα (1).**

Βήμα (1) : Αν υπάρχει ακμή $\mathbf{u = (x, y) \in U}$ τέτοια ώστε η κορυφή $\mathbf{y}$ δεν είναι σημειωμένη με $\mathbf{+}$ τότε, Συνέχεια στο **Βήμα (2)**
αλλιώς, Συνέχεια στο **Βήμα (3).**

Βήμα (2) : Η κορυφή $\mathbf{y}$ σημειώνεται με $\mathbf{+}$ και θέτουμε $\mathbf{U' = U' \cup \{u\}}$
Συνέχεια στο **Βήμα (1).**

Βήμα (3) : Η κορυφή $\mathbf{x}$ θεωρείται κορεσμένη και σημειώνεται με $\mathbf{s}$ (saturated). Συνέχεια στο **Βήμα (4).**

Βήμα (4) : Η υπάρχει κορυφή $\mathbf{y}$ σημειωμένη με $\mathbf{+}$ αλλά όχι με $\mathbf{s}$ τότε θέτουμε $\mathbf{x=y}$, Συνέχεια στο **Βήμα (1),**
αλλιώς, **Τέλος του αλγορίθμου**.

Επικαλύπτον Δέντρο - Αλγόριθμος

Σημείωση: Στην έκδοση του αλγορίθμου που προτείνεται εδώ και συγκεκριμένα στο $\mathbf{1^o}$ **Βήμα** η επιλογή της ακμής $\mathbf{u = (x, y) \in U}$ γίνεται με βάση την κορυφή $\mathbf{x \in X}$ που επιλέχτηκε κατά την αρχικοποίηση ή στο $\mathbf{4^o}$ **Βήμα.**

Κατά συνέπεια πρώτα εντάσσονται στο $\mathbf{U'}$ οι ακμές που «ξεκινούν» από αυτή την κορυφή και όταν εξαντληθούν οι ακμές αυτές τότε ή κορυφή αυτή χαρακτηρίζεται ως κορεσμένη. Τότε επιλέγεται κάποια άλλη μη κορεσμένη κορυφή η οποία όμως έχει το σημείο $\mathbf{+}$**,** δηλαδή, ήδη κάποια ακμή της είναι ενταγμένη στο σύνολο $\mathbf{U'}$.

Μιά άλλη εκδοχή θα ήταν η κορυφή $\mathbf{y}$ να επιλέγεται ως εξής:

Βήμα $\mathbf{(1)}$: Αν υπάρχει ακμή $\mathbf{u = (x, y) \in U}$ τέτοια ώστε η κορυφή το x είναι σημειωμένο με $\mathbf{+}$ αλλά το $\mathbf{y}$ δεν είναι, τότε, Συνέχεια στο **Βήμα** $\mathbf{(2)}$**,** αλλιώς, Συνέχεια στο **Βήμα** $\mathbf{(3)}$**.**

Επικαλύπτον Δέντρο - Αλγόριθμος

Στην εκδοχή αυτή η ακμή $\mathbf{u} = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$ επιλέγεται τυχαία, αρκεί το $\mathbf{x}$ να είναι σημειωμένο με $+$ αλλά το $\mathbf{y}$ να μην είναι. Στην περίπτωση αυτή το **Βήμα (1)** περιγράφεται στη συνέχεια και δίνει μια άλλη εκδοχή του αλγορίθμου.

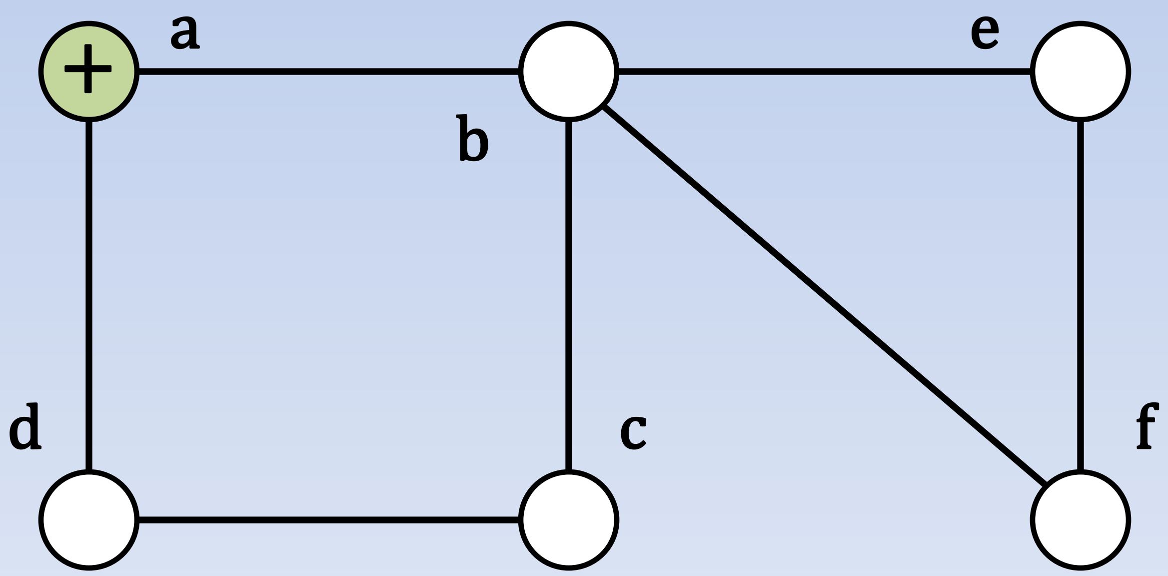
Βήμα (1) : Αν υπάρχει ακμή $\mathbf{u} = (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbf{U}$ τέτοια ώστε η κορυφή $\mathbf{x}$ είναι σημειωμένη με $+$ αλλά η $\mathbf{y}$ δεν είναι, τότε, Συνέχεια στο **Βήμα (2),** αλλιώς, Συνέχεια στο **Βήμα (3).**

Άσκηση: Εφαρμόστε τη νέα αυτή εκδοχή του αλγορίθμου σε ένα συνεκτικό μη κατευθυνόμενο γράφημα.

Επίδειξη του Αλγορίθμου

Βήμα (0) : Αρχικοποίηση. Επιλέγεται η κορυφή **a ∈ X** και σημειώνεται με +. Συνέχεια στο **Βήμα (1).**

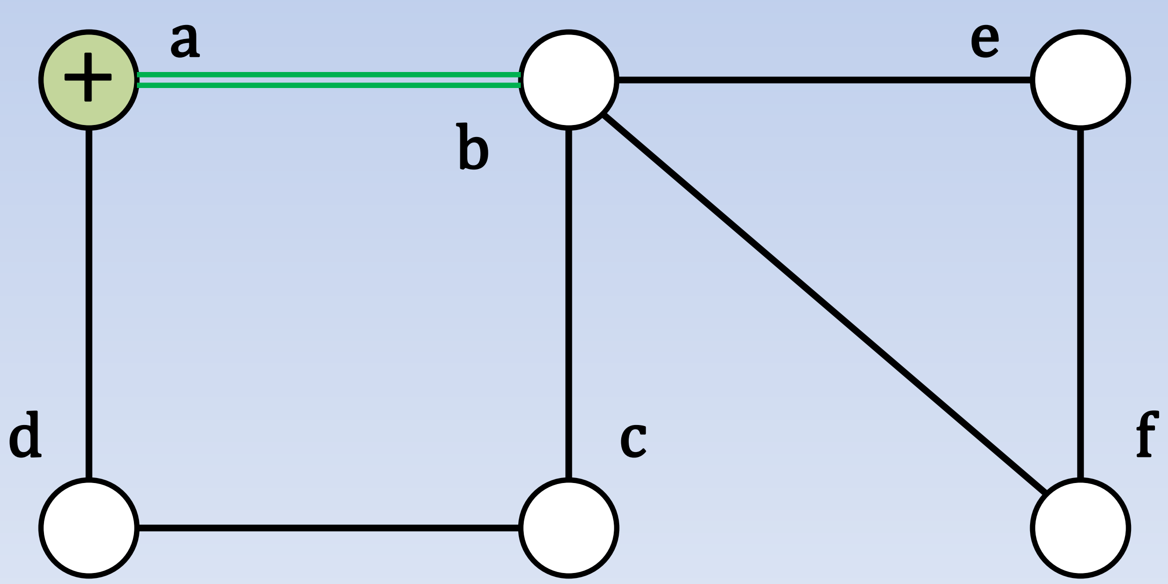
U' ={ }



Επίδειξη του Αλγορίθμου

Βήμα (1) : Επιλέγεται η ακμή **{a, b}** . Συνέχεια στο **Βήμα (2).**

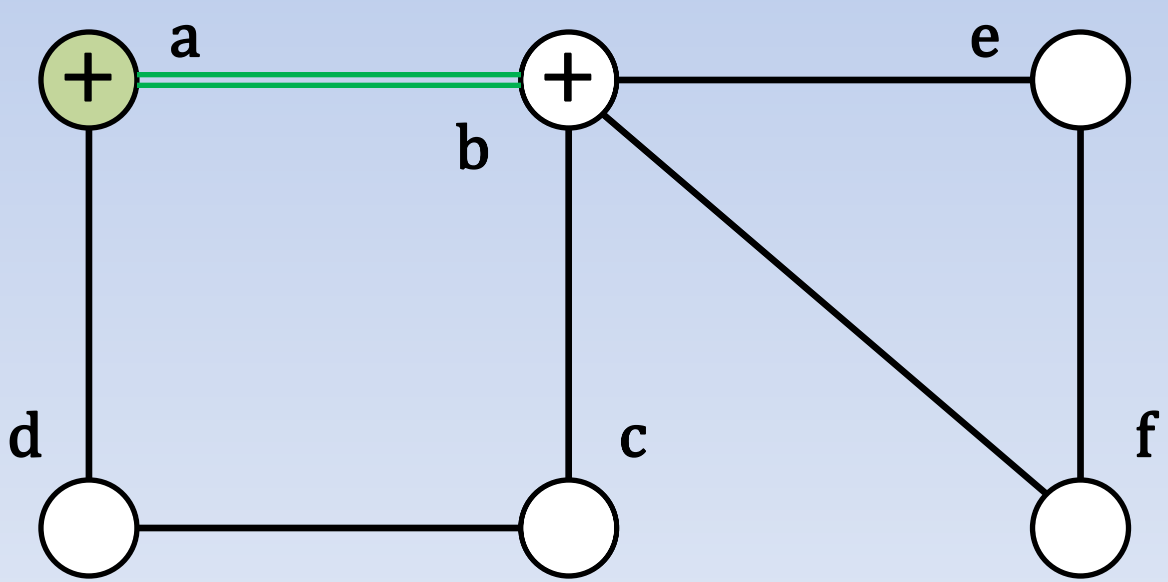
U' ={ }



Επίδειξη του Αλγορίθμου

Βήμα (2) : Η κορυφή **b ∈ X** σημαδεύεται με + . Συνέχεια στο **Βήμα (1).**

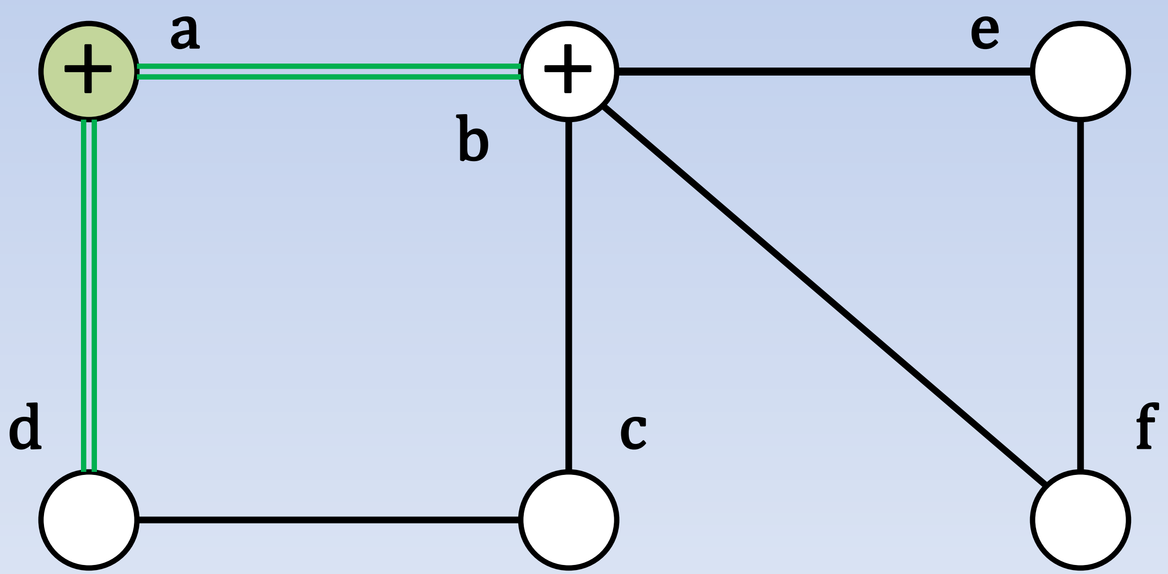
U' ={{a, b} }



Επίδειξη του Αλγορίθμου

Βήμα (1) : Επιλέγεται η ακμή **{a, d}**. Συνέχεια στο **Βήμα (2).**

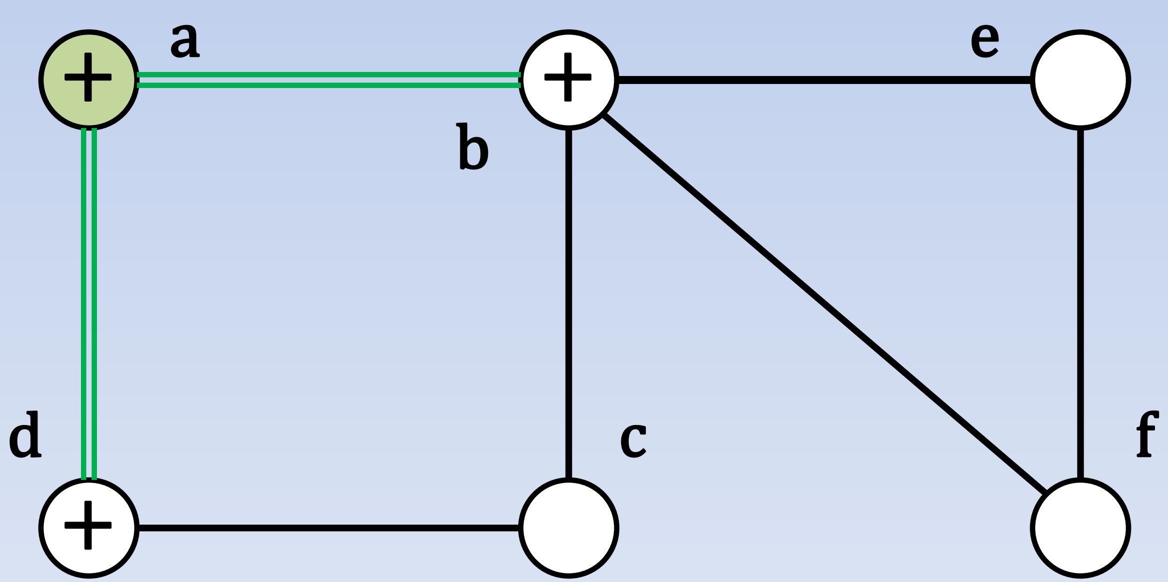
U' ={{a, b} }



Επίδειξη του Αλγορίθμου

Βήμα (2) : Η κορυφή **d** σημαδεύεται με + . Συνέχεια στο **Βήμα (1).**

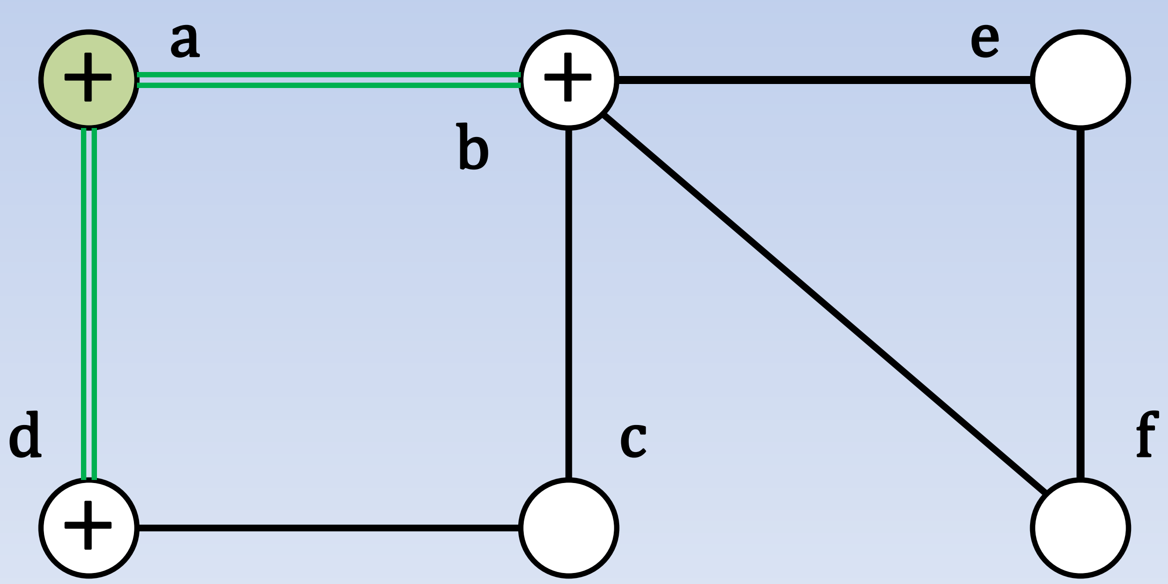
U' ={{a, b} , {a, d} }



Επίδειξη του Αλγορίθμου

Βήμα (1) : Δεν υπάρχει άλλη ακμή από το **a**. Συνέχεια στο **Βήμα (3).**

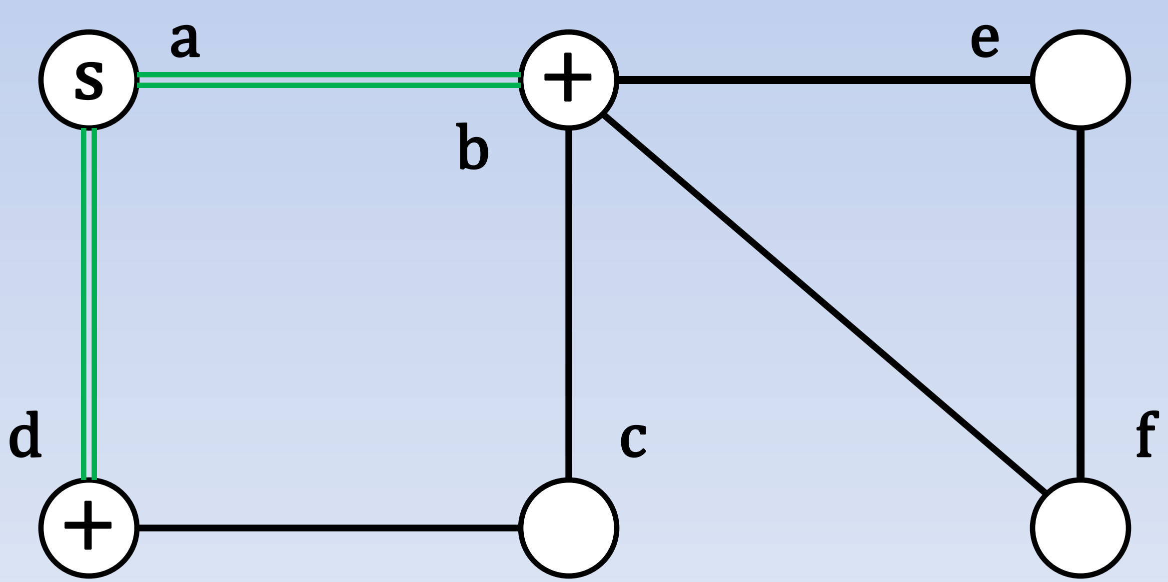
U' ={{a, b} , {a, d} }



Επίδειξη του Αλγορίθμου

Βήμα (3) : Το **a** σημειώνεται με **s**. Συνέχεια στο **Βήμα (4).**

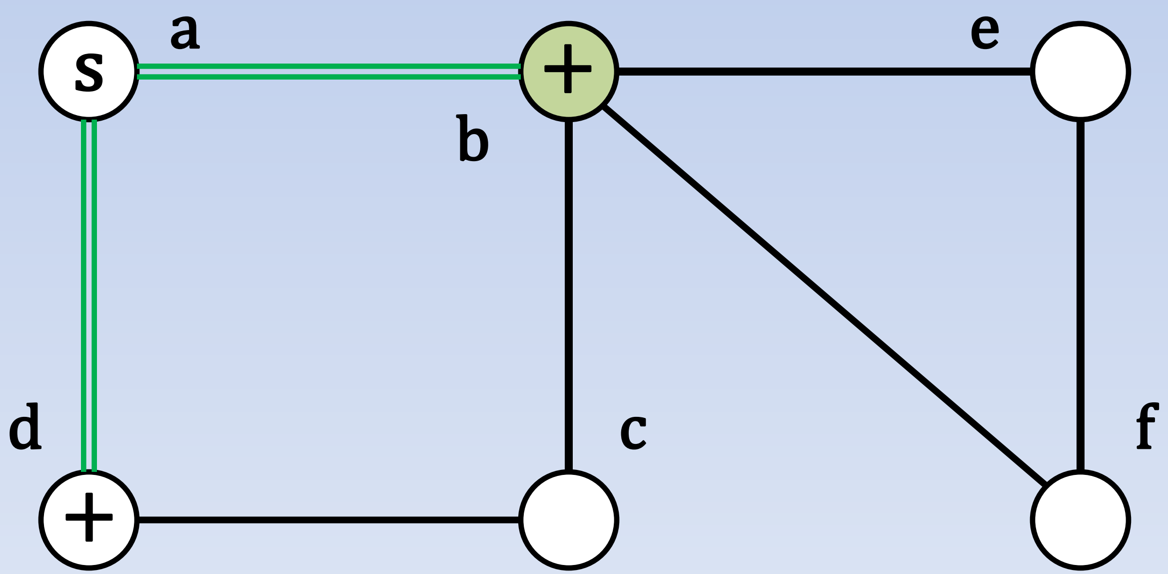
U’ ={{a, b} , {a, d} }



Επίδειξη του Αλγορίθμου

Βήμα (4) : Επιλέγεται τυχαία η κορυφή **b ∈ X.** Συνέχεια στο **Βήμα (1).**

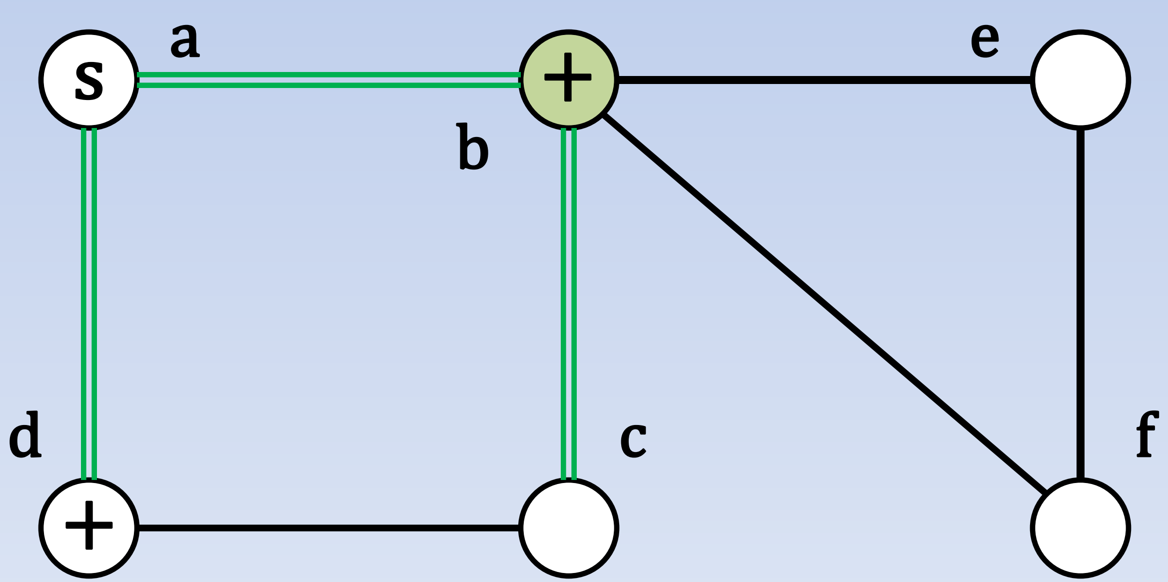
U’ ={{a, b}, {a, d} }



Επίδειξη του Αλγορίθμου

Βήμα (1) : Επιλέγεται η ακμή **{b, c} ∈ X.** Συνέχεια στο **Βήμα (2).**

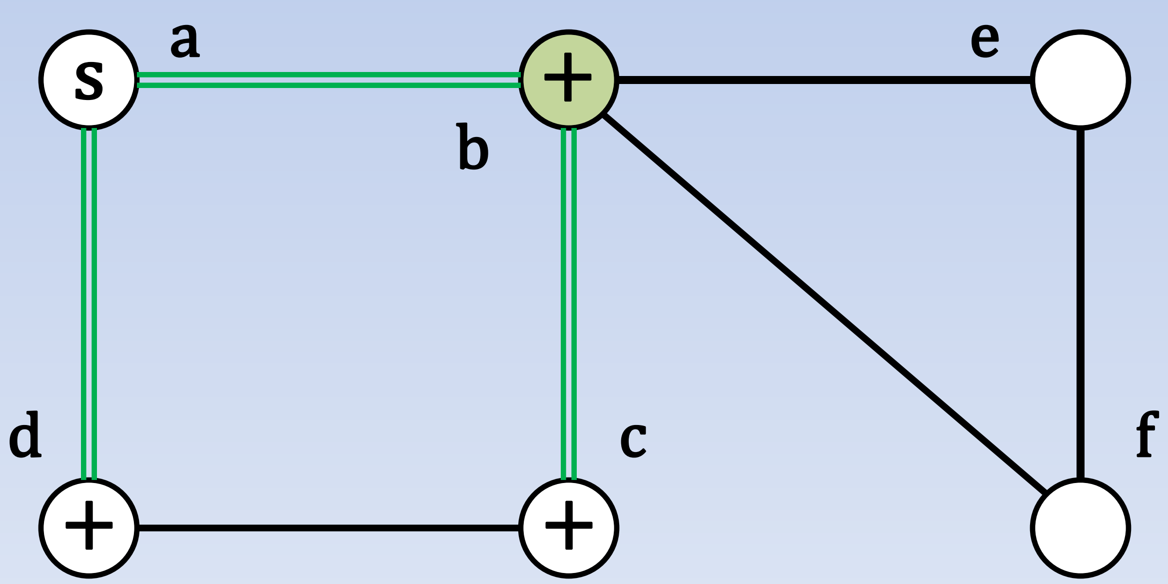
U' ={{a, b}, {a, d} }



Επίδειξη του Αλγορίθμου

Βήμα (2) : Η κορυφή **c** σημαδεύεται με + . Συνέχεια στο **Βήμα (1).**

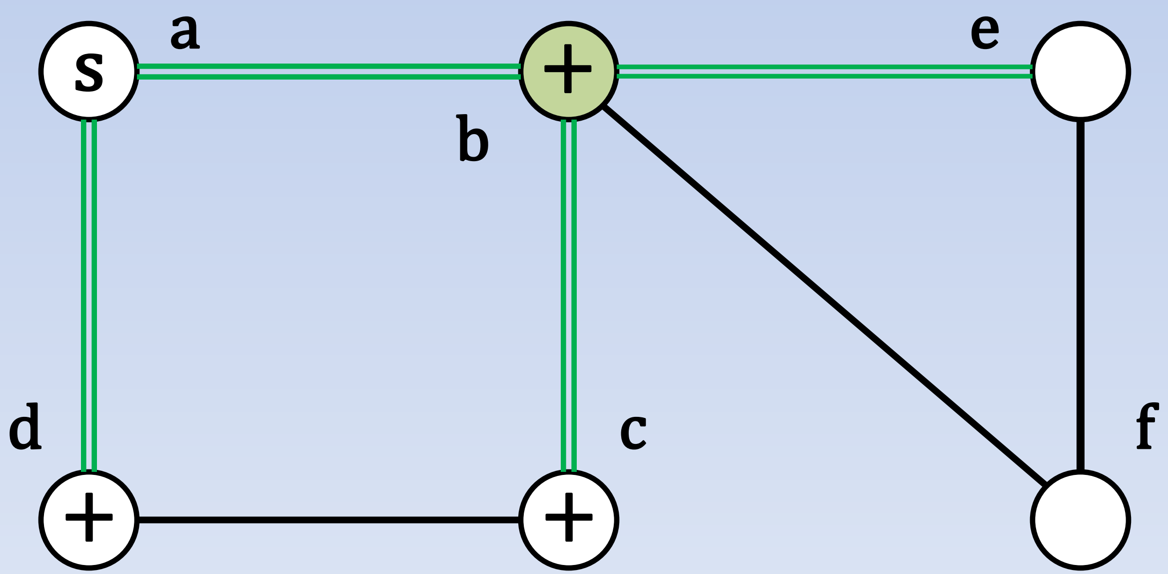
U' ={{a, b}, {a, d}, {b, c} }



Επίδειξη του Αλγορίθμου

Βήμα (1) : Επιλέγεται η ακμή **{b, e} ∈ X.** Συνέχεια στο **Βήμα (2).**

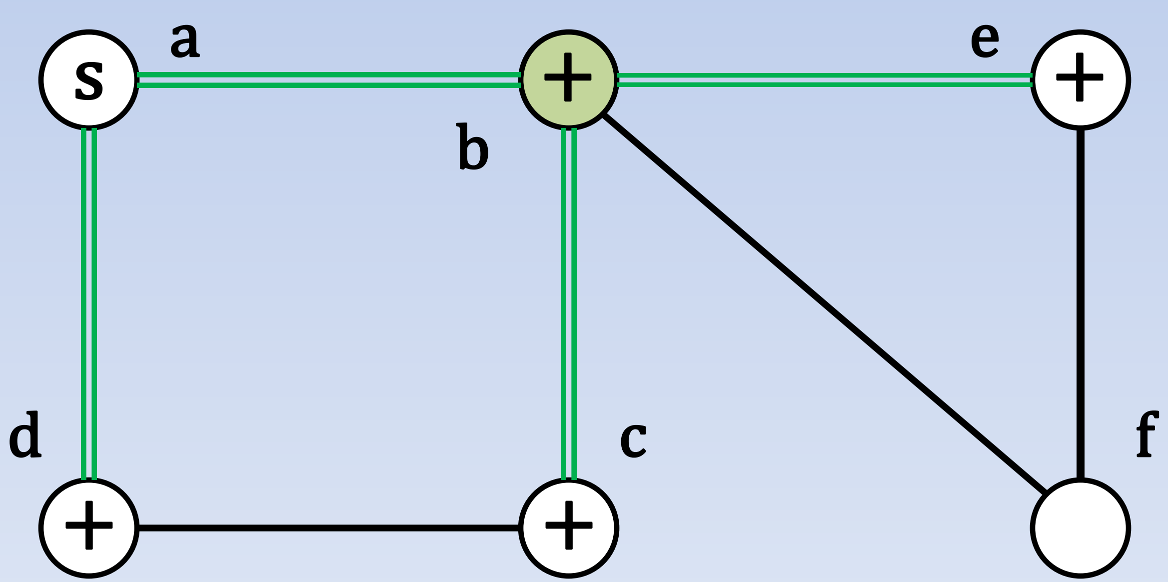
U’ ={{a, b}, {a, d}, {b, c} }



Επίδειξη του Αλγορίθμου

Βήμα (2) : Η κορυφή **e** σημαδεύεται με + . Συνέχεια στο **Βήμα (1).**

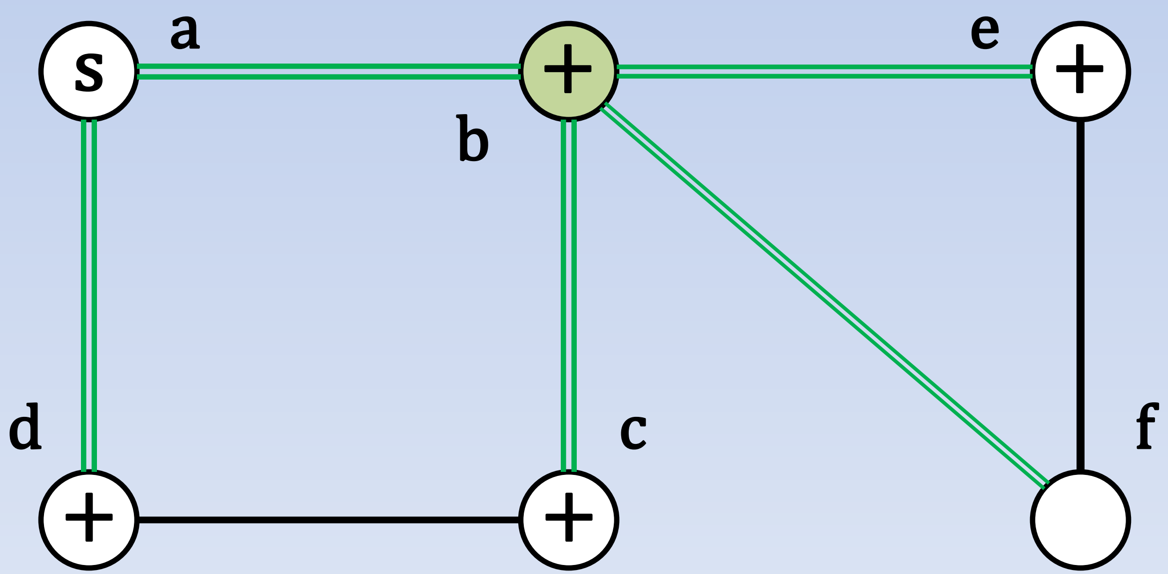
U’ ={{a, b}, {a, d}, {b, c}, {b, e} }



Επίδειξη του Αλγορίθμου

Βήμα (1) : Επιλέγεται η ακμή **{b, f} ∈ X.** Συνέχεια στο **Βήμα (2).**

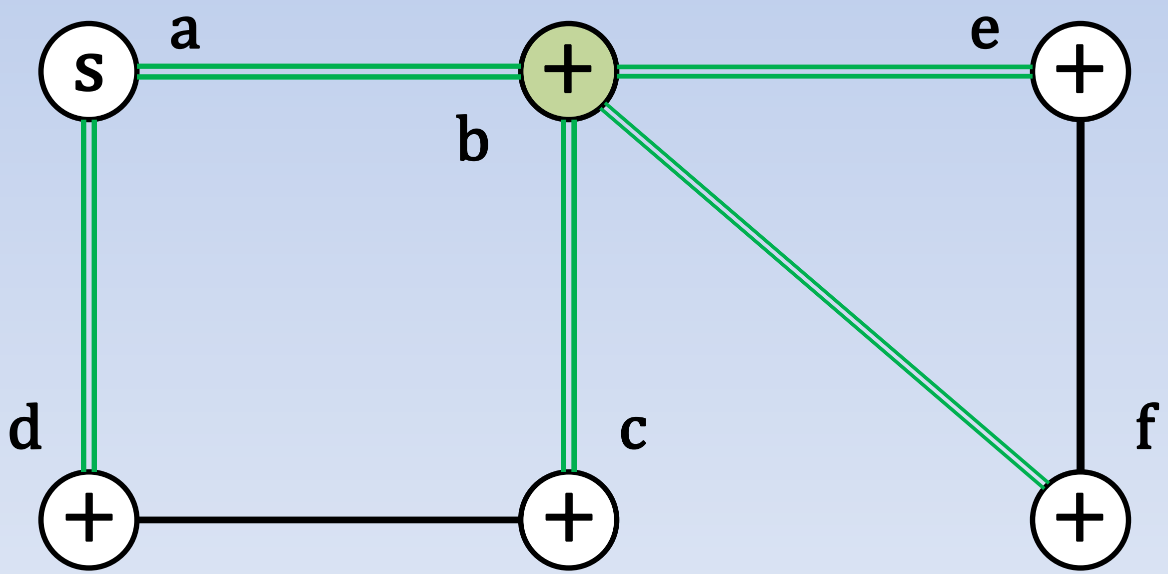
U' ={{a, b}, {a, d}, {b, c}, {b, e} }



Επίδειξη του Αλγορίθμου

Βήμα (2) : Η κορυφή **f** σημαδεύεται με + . Συνέχεια στο **Βήμα (1).**

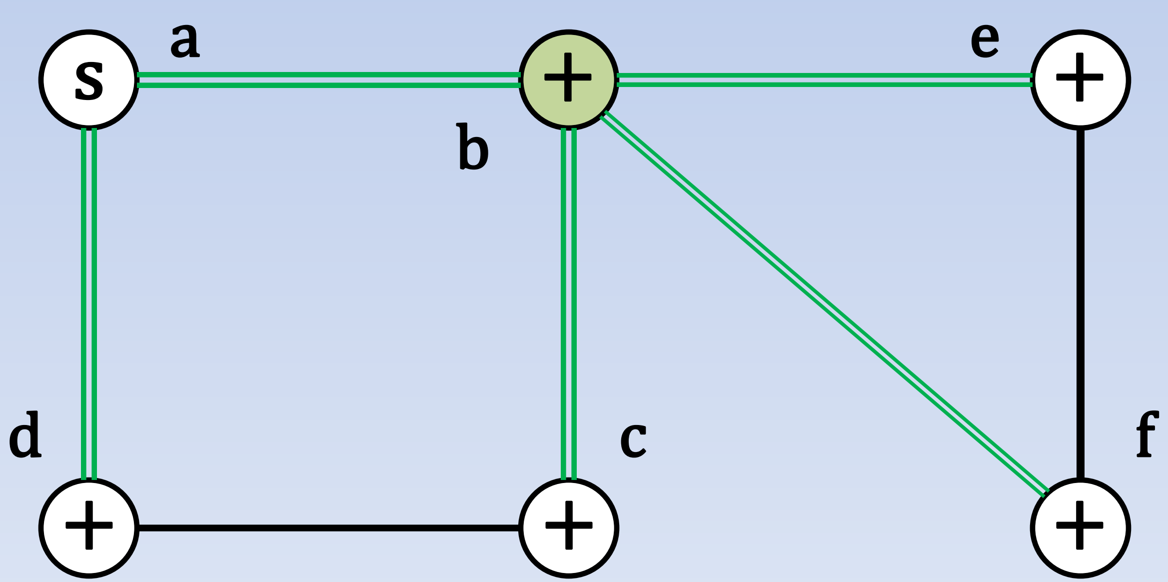
U’ ={{a, b}, {a, d}, {b, c}, {b, e}, {b, f} }



Επίδειξη του Αλγορίθμου

Βήμα (1) : Δεν υπάρχει άλλη ακμή από **b**. Συνέχεια στο **Βήμα (3).**

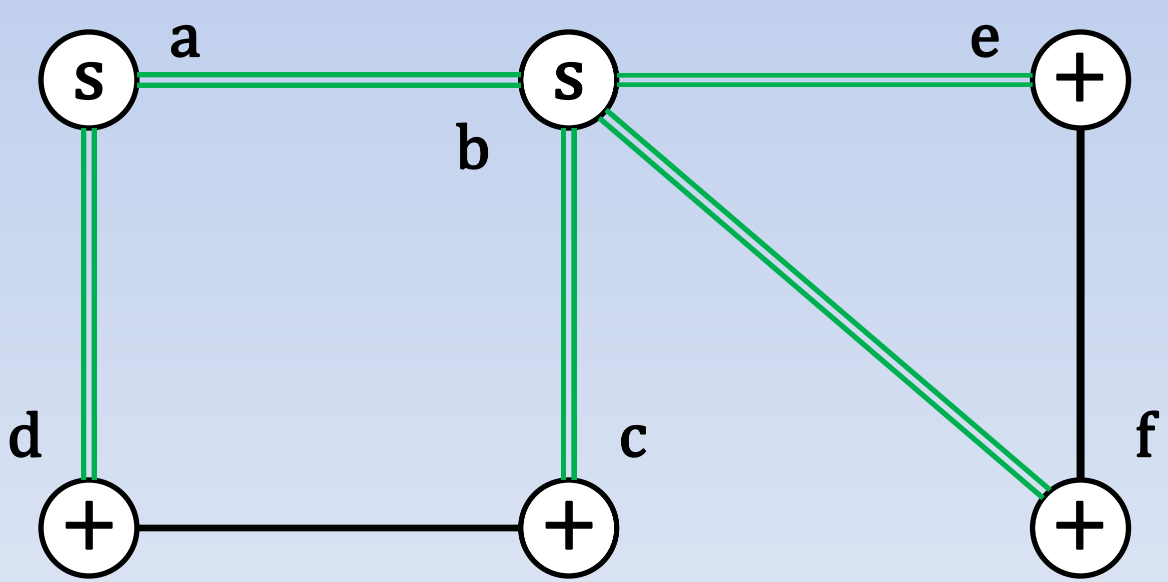
U’ ={{a, b}, {a, d}, {b, c}, {b, e}, {b, f} }



Επίδειξη του Αλγορίθμου

Βήμα (3) : Το **b** σημειώνεται με **s**. Συνέχεια στο **Βήμα (4).**

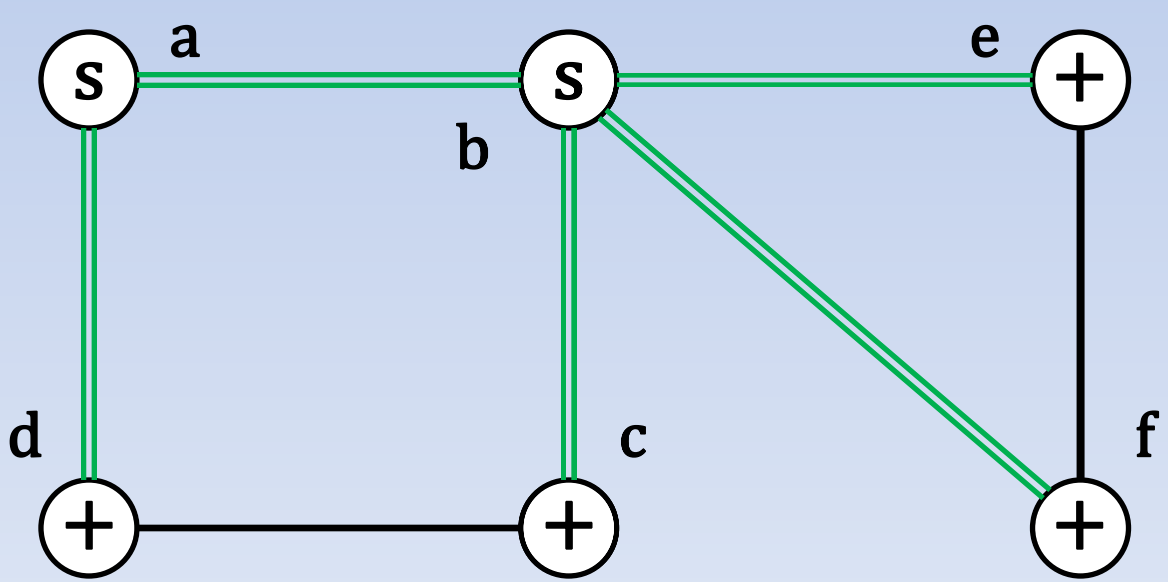
U’ ={{a, b}, {a, d}, {b, c}, {b, e}, {b, f} }



Επίδειξη του Αλγορίθμου

Στο σημείο αυτό ο αλγόριθμος μπορεί τερματίσει αν υποστεί κάποιες αλλαγές. Ποιές είναι αυτές;

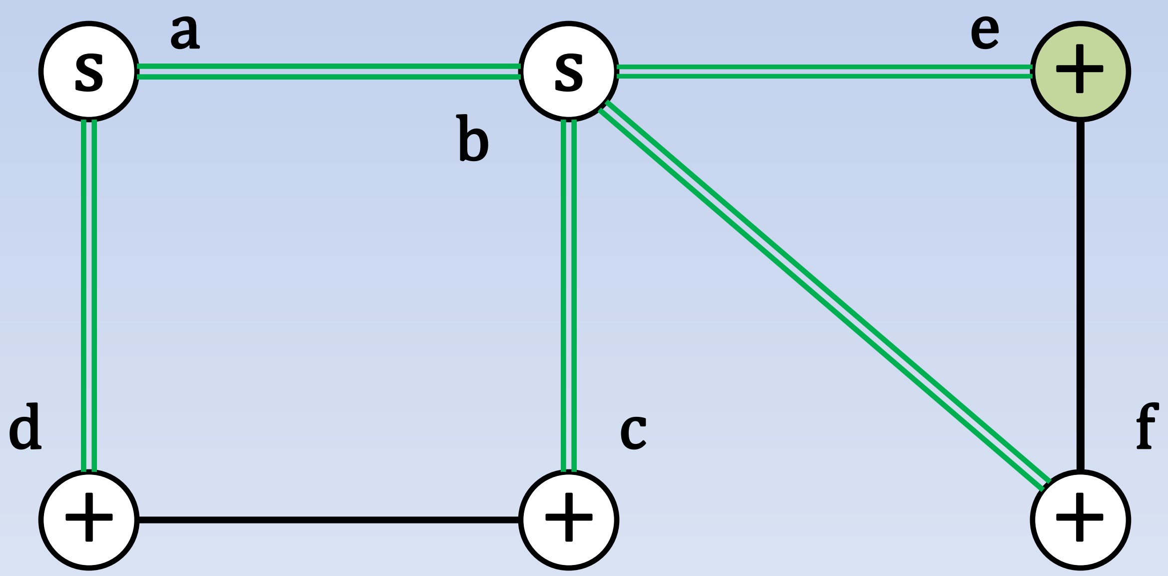
U’ ={{a, b}, {a, d}, {b, c}, {b, e}, {b, f} }



Επίδειξη του Αλγορίθμου

Βήμα (4) : Επιλέγεται η κορυφή e **∈ X.** Συνέχεια στο **Βήμα (1).**

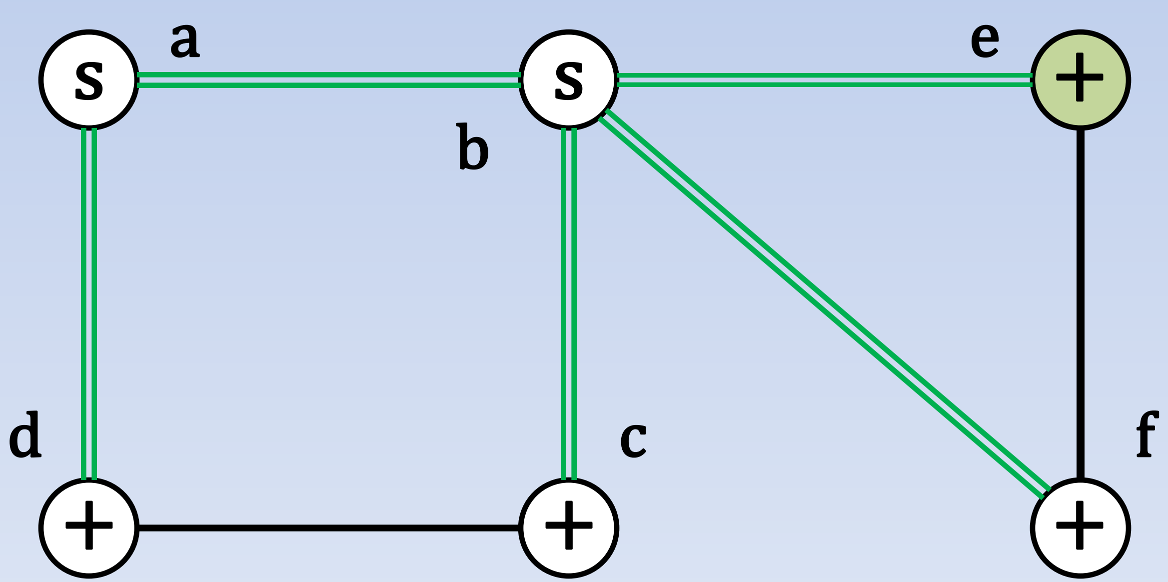
U' ={{a, b}, {a, d}, {b, c}, {b, e} , {b, f}}



Επίδειξη του Αλγορίθμου

Βήμα (1) : Δεν υπάρχει άλλη ακμή από το **e**. Συνέχεια στο **Βήμα (3).**

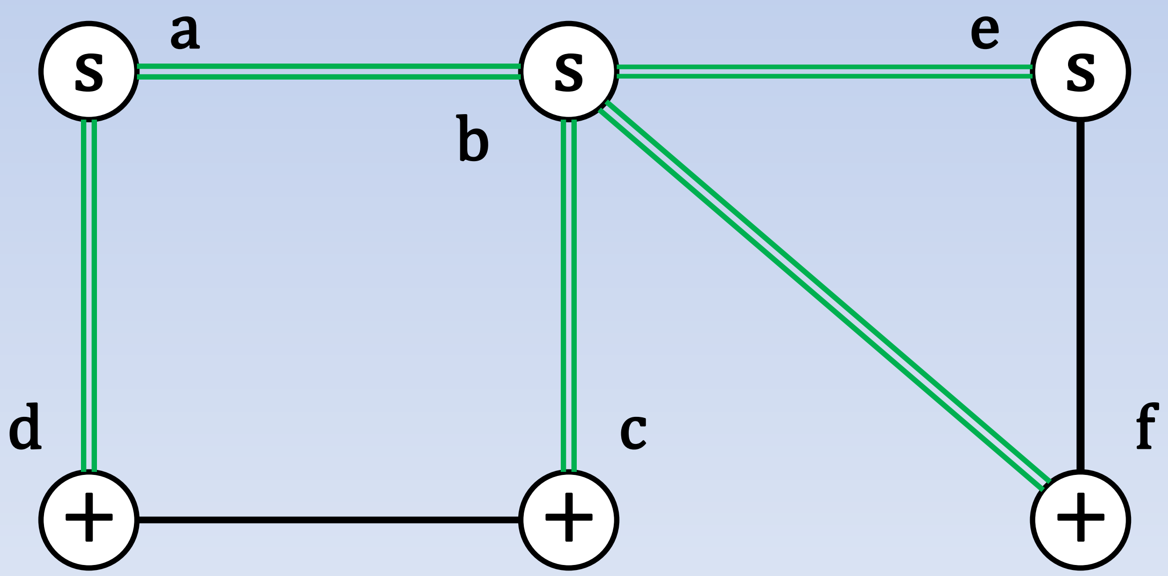
U' ={{a, b}, {a, d}, {b, c}, {b, e} , {b, f}}



Επίδειξη του Αλγορίθμου

Βήμα (3) : Το **e** σημειώνεται με **s**. Συνέχεια στο **Βήμα (4).**

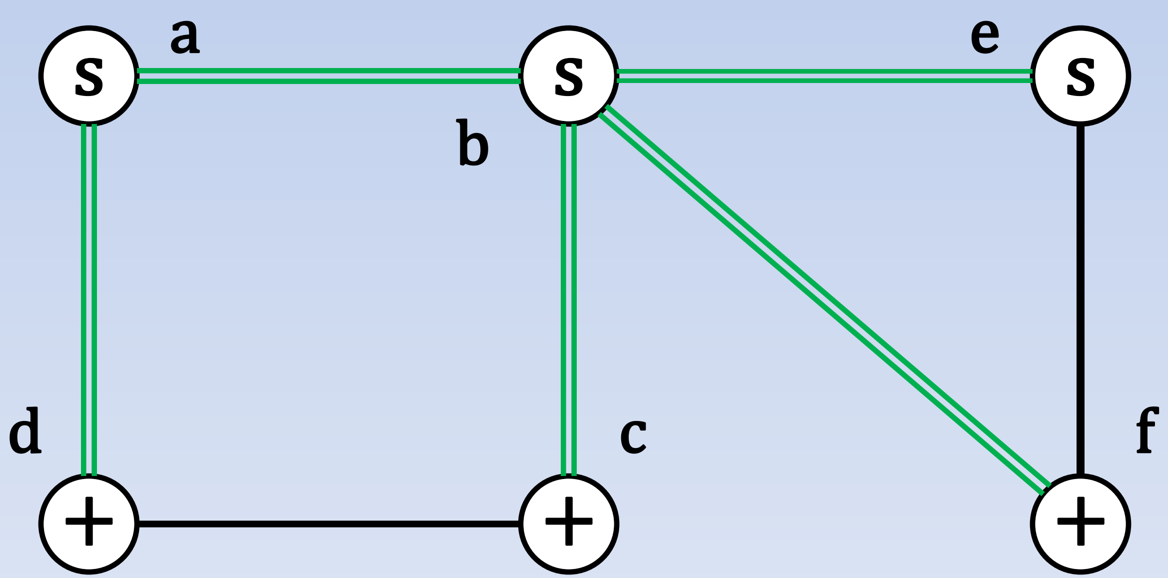
U' ={{a, b}, {a, d}, {b, c}, {b, e} , {b, f}}



Επίδειξη του Αλγορίθμου

Στο σημείο αυτό ο αλγόριθμος μπορεί να τερματίσει και πάλι.

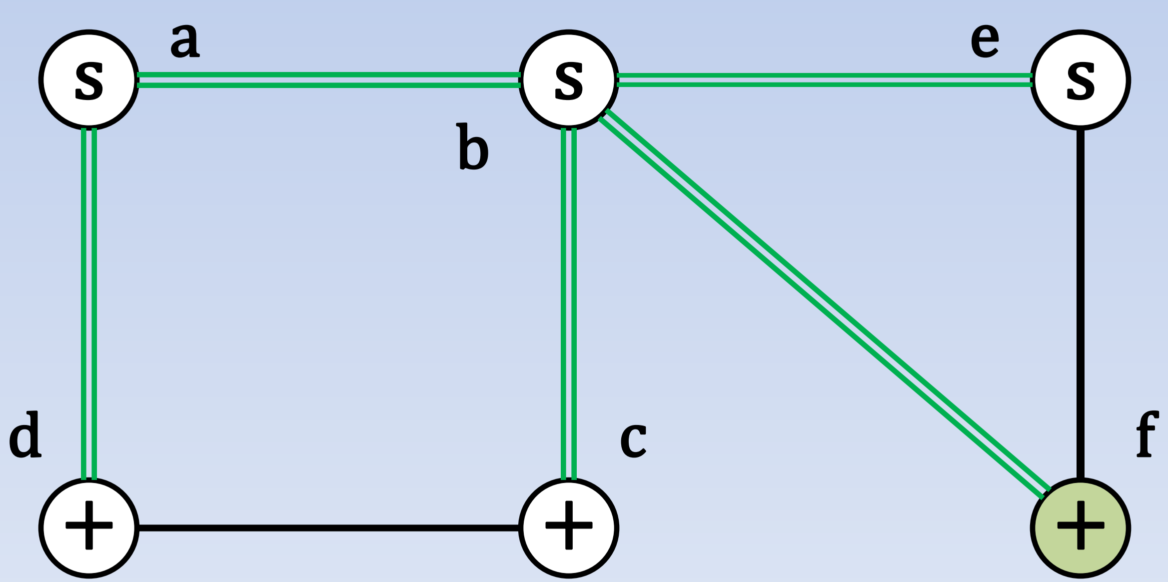
U' ={{a, b}, {a, d}, {b, c}, {b, e} , {b, f}}



Επίδειξη του Αλγορίθμου

Βήμα (4) : Επιλέγεται τυχαία η κορυφή **f ∈ X.** Συνέχεια στο **Βήμα (1).**

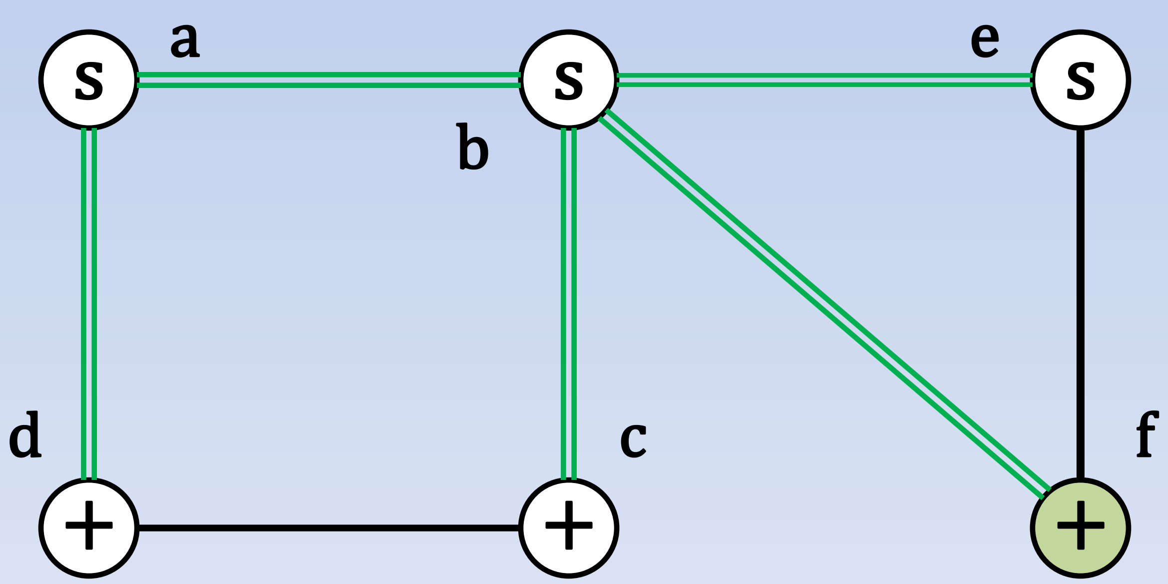
U' ={{a, b}, {a, d}, {b, c}, {b, e} , {b, f}}



Επίδειξη του Αλγορίθμου

Βήμα (1) : Δεν υπάρχει άλλη ακμή από το **f.** Συνέχεια στο **Βήμα (3).**

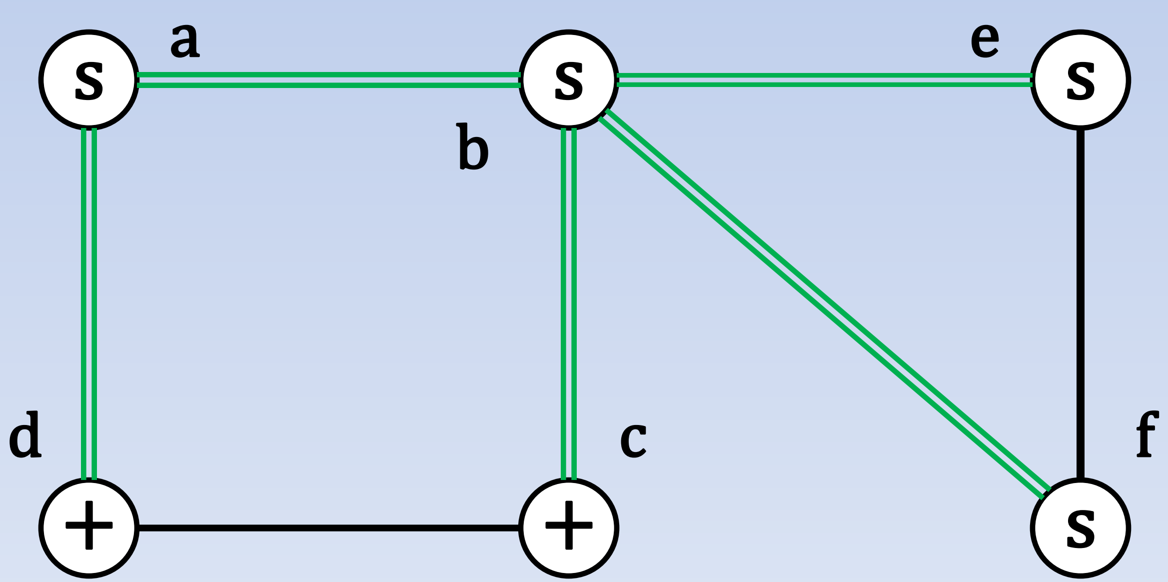
U' ={{a, b}, {a, d}, {b, c}, {b, e} , {b, f}}



Επίδειξη του Αλγορίθμου

Βήμα (3) : Το **f** σημειώνεται με **s**. Συνέχεια στο **Βήμα (4).**

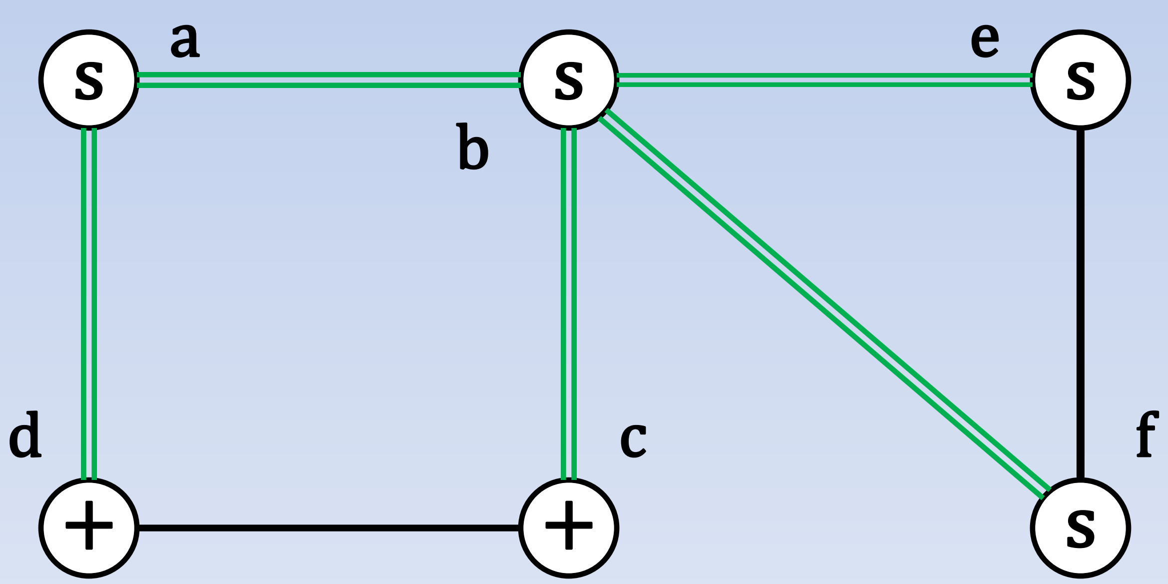
U' ={{a, b}, {a, d}, {b, c}, {b, e} , {b, f}}



Επίδειξη του Αλγορίθμου

Στο σημείο αυτό ο αλγόριθμος μπορεί να τερματίσει και πάλι.

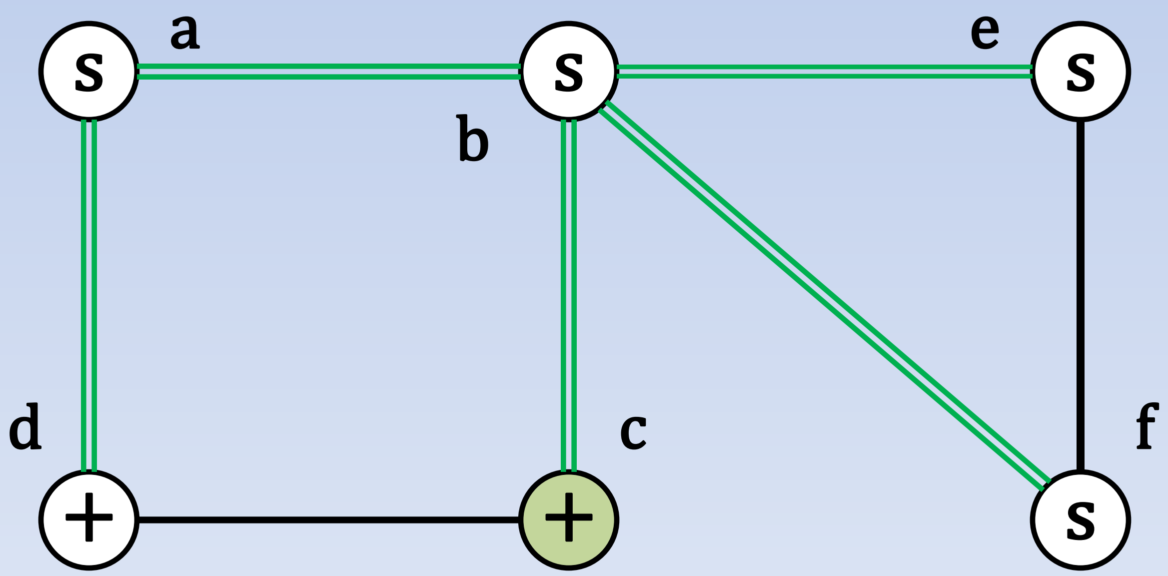
U' ={{a, b}, {a, d}, {b, c}, {b, e} , {b, f}}



Επίδειξη του Αλγορίθμου

Βήμα (4) : Επιλέγεται η κορυφή **c ∈ X.** Συνέχεια στο **Βήμα (1).**

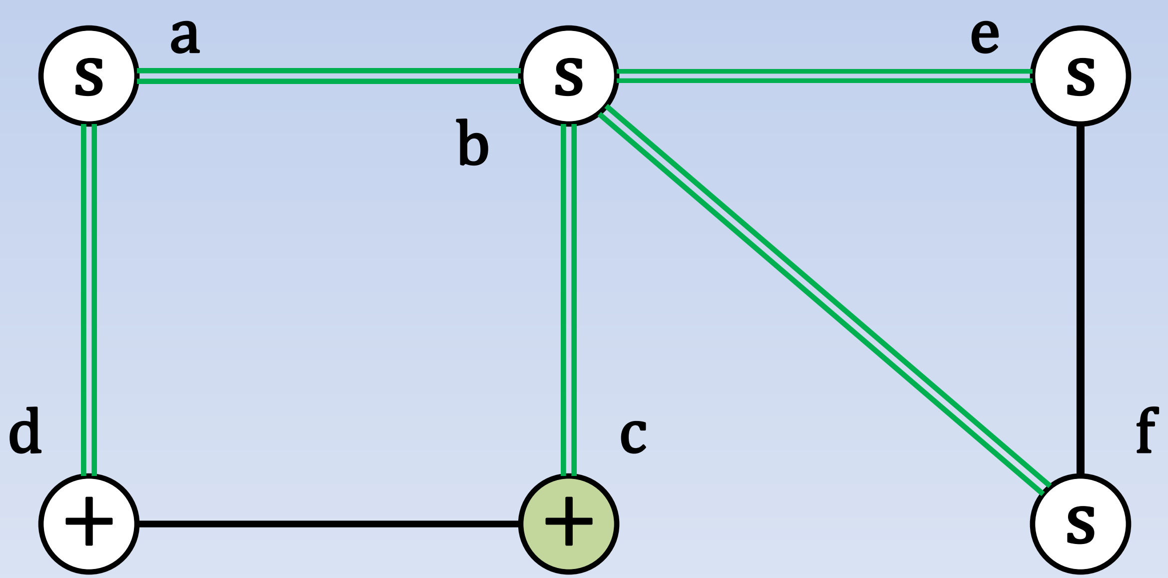
U' ={{a, b}, {a, d}, {b, c}, {b, e} , {b, f}}



Επίδειξη του Αλγορίθμου

Βήμα (1) : Δεν υπάρχει άλλη ακμή από το **c.** Συνέχεια στο **Βήμα (3).**

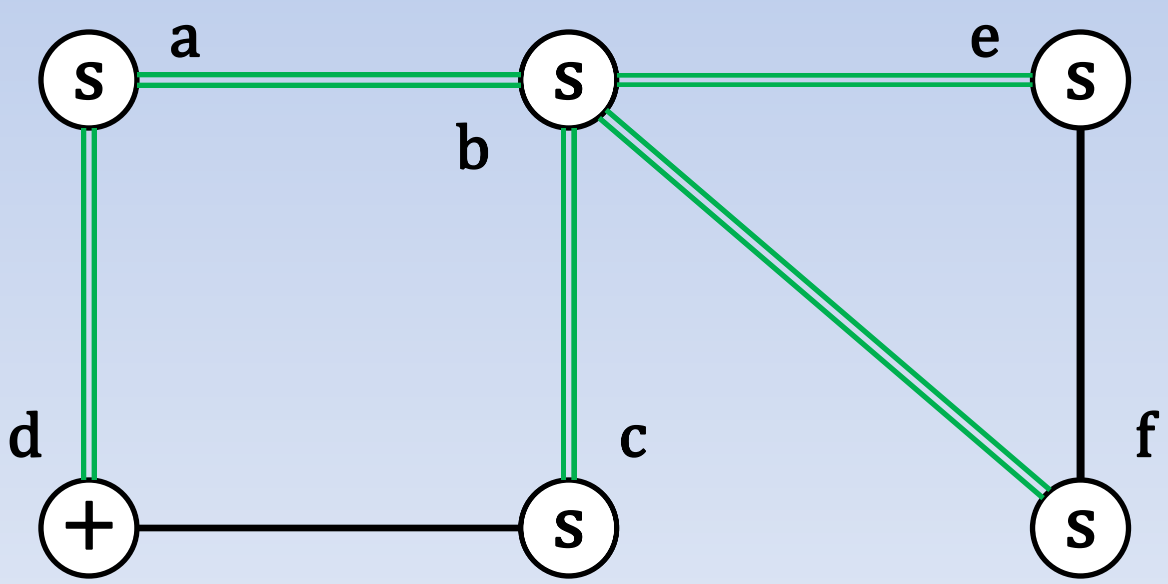
U’ ={{a, b}, {a, d}, {b, c}, {b, e} , {b, f}}



Επίδειξη του Αλγορίθμου

Βήμα (3) : Το **c** σημειώνεται με **s**. Συνέχεια στο **Βήμα (4).**

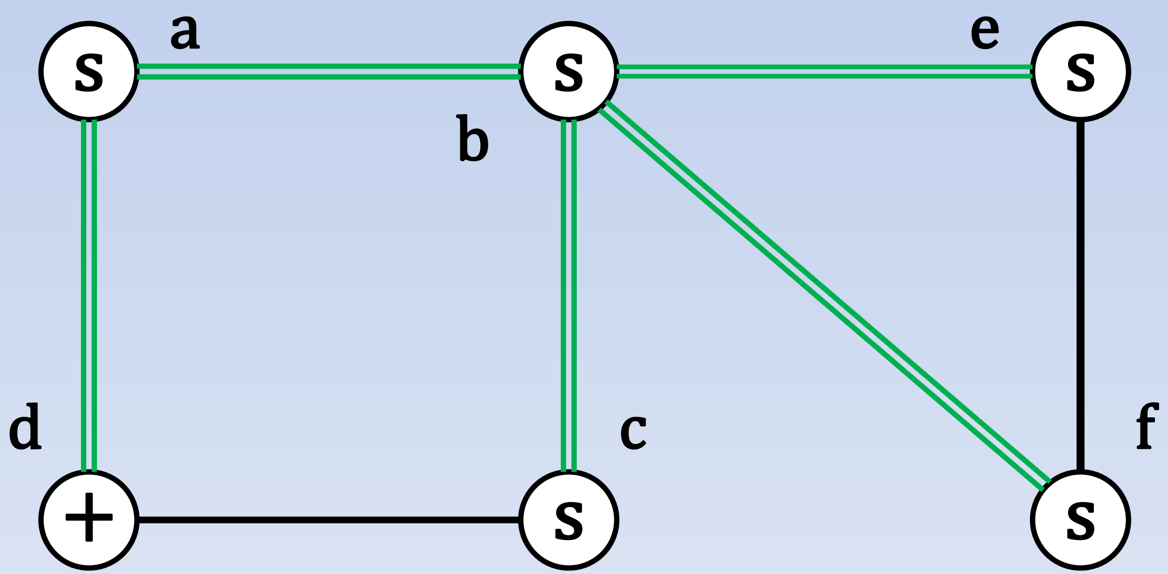
U’ ={{a, b}, {a, d}, {b, c}, {b, e} , {b, f}}



Επίδειξη του Αλγορίθμου

Στο σημείο αυτό ο αλγόριθμος μπορεί να τερματίσει και πάλι.

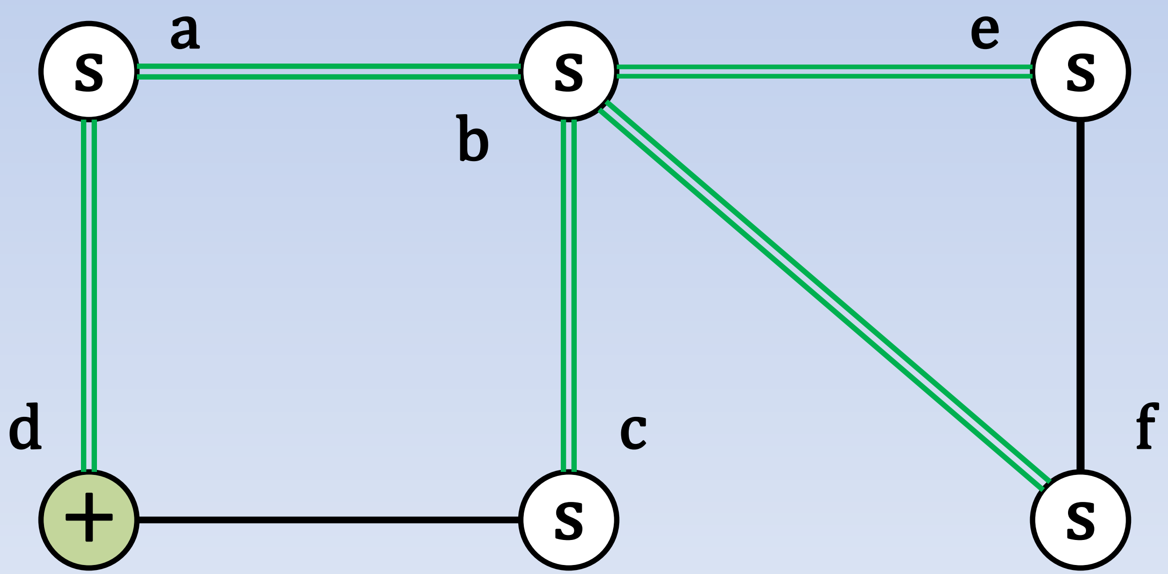
U' ={{a, b}, {a, d}, {b, c}, {b, e} , {b, f}}



Επίδειξη του Αλγορίθμου

Βήμα (4) : Επιλέγεται η κορυφή **d ∈ X.** Συνέχεια στο **Βήμα (1).**

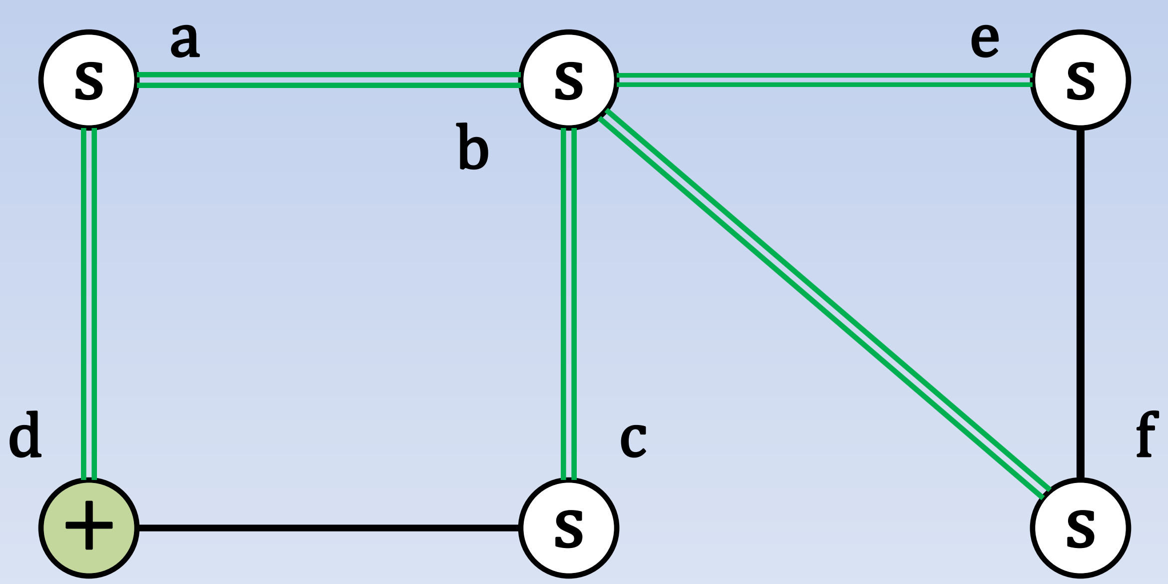
U’ ={{a, b}, {a, d}, {b, c}, {b, e} , {b, f}}



Επίδειξη του Αλγορίθμου

Βήμα (1) : Δεν υπάρχει άλλη ακμή από το **d.** Συνέχεια στο **Βήμα (3).**

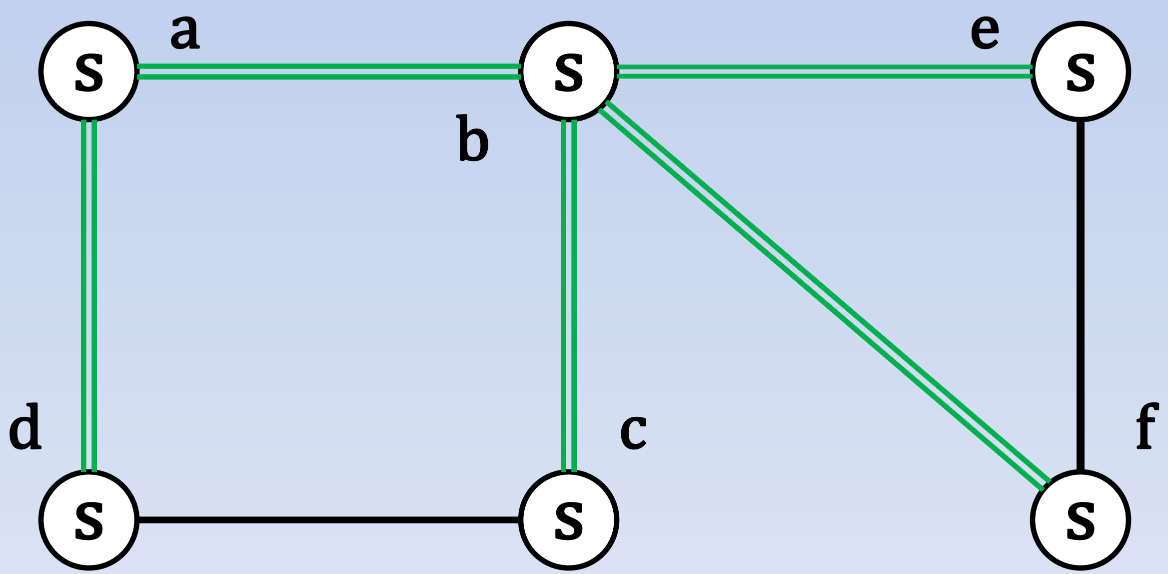
U’ ={{a, b}, {a, d}, {b, c}, {b, e} , {b, f}}



Επίδειξη του Αλγορίθμου

Βήμα (3) : Το **d** σημειώνεται με **s**. Συνέχεια στο **Βήμα (4).**

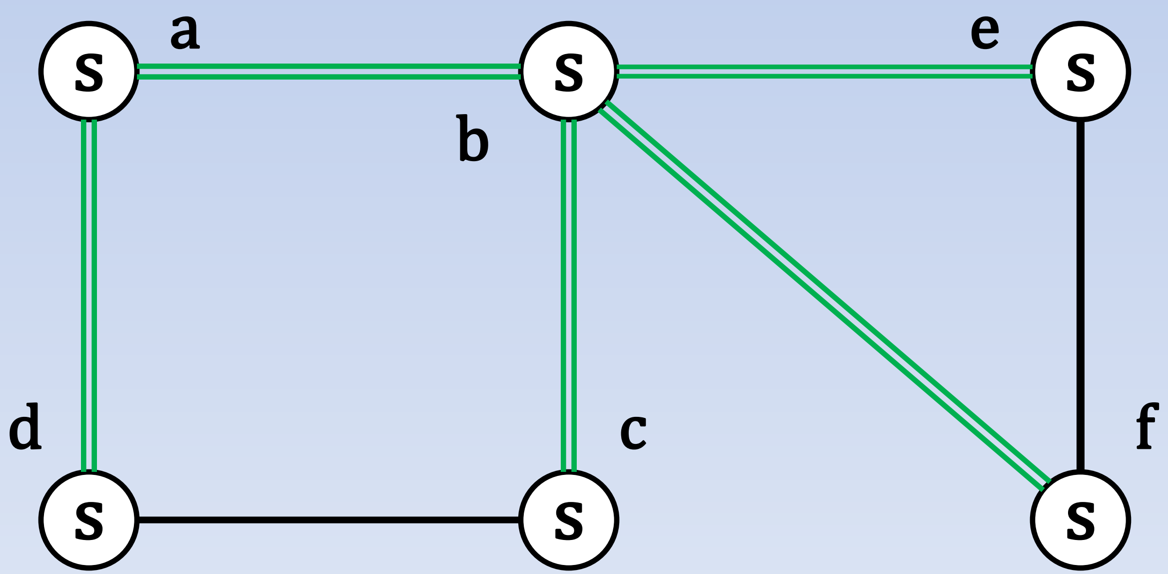
U' ={{a, b}, {a, d}, {b, c}, {b, e} , {b, f}}



Επίδειξη του Αλγορίθμου

Βήμα (4) : Τέλος του αλγορίθμου.

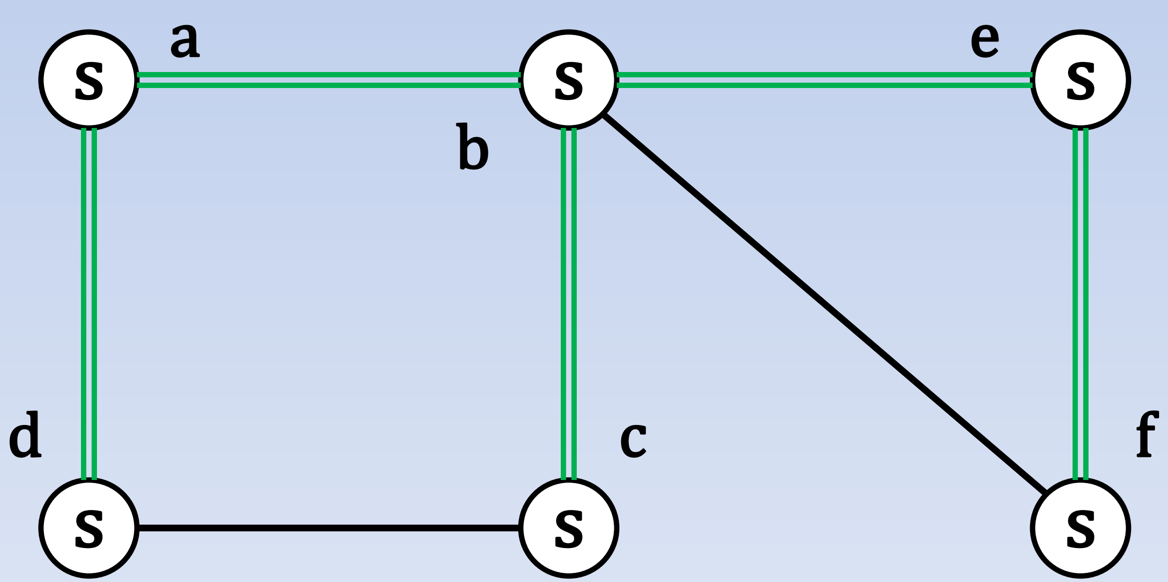
U’ ={{a, b}, {a, d}, {b, c}, {b, e} , {b, f}}



Επίδειξη του Αλγορίθμου

Ερώτημα : Η εκδοχή αυτή του αλγορίθμου ως ποιά στρατηγική αναζήτησης θα μπορούσε να περιγραφεί; Κατά πλάτος ή κατά βάθος; Γιατί;

U' ={{a, b} , {b, e}, {e, f}, {a, d}, {b, c} }



Ελάχιστο Επικαλύπτον Δέντρο

Ορισμός και Αλγόριθμοι

Έστω **G=(X, U)** ένα μη κατευθυνόμενο συνεκτικό βεβαρυμένο γράφημα. Ας θεωρήσουμε εδώ την περίπτωση που το γράφημα έχει θετικούς συντελεστές βάρους σε κάθε ακμή.

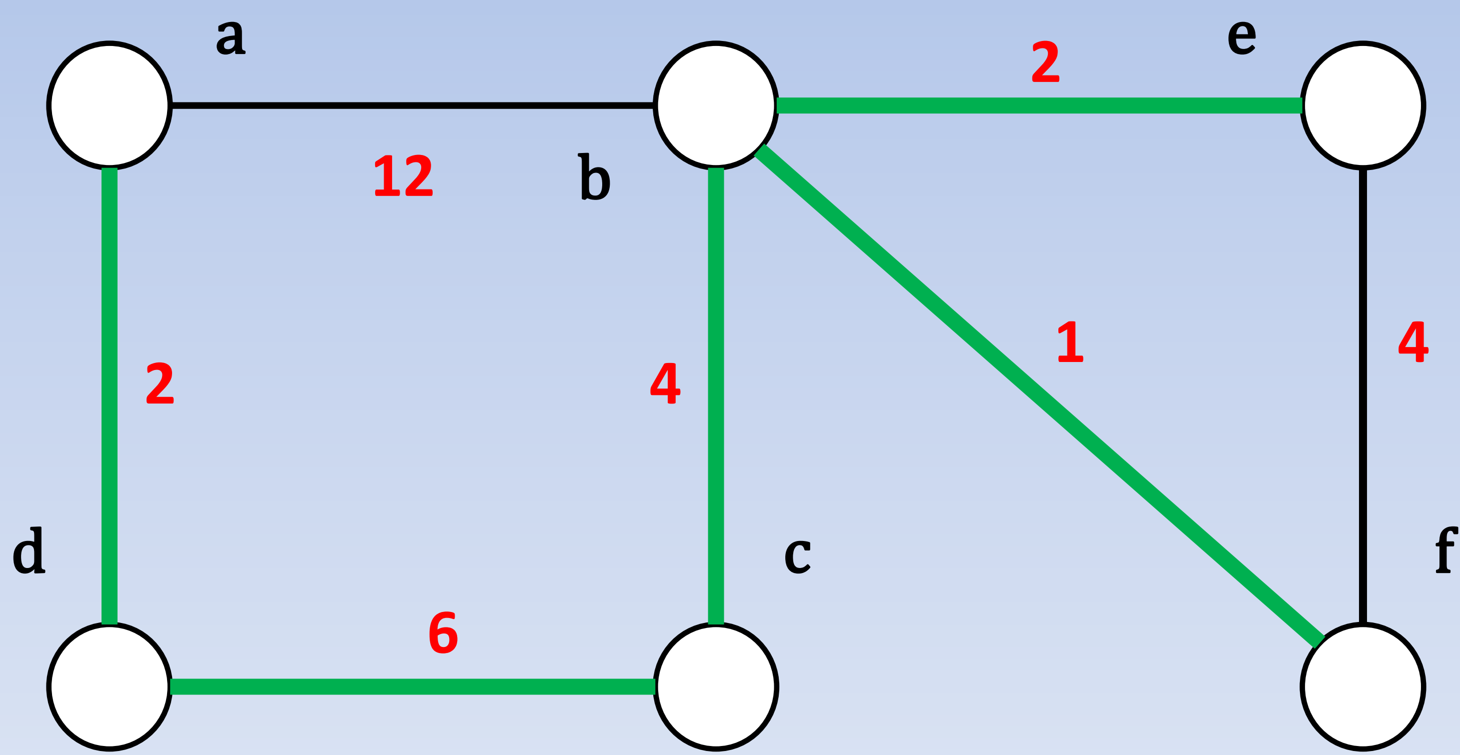
Ζητείται να κατασκευαστεί ένα μερικό γράφημα του **G** έστω **G'=(X', U')** το οποίο είναι δέντρο το οποίο επί πλέον θα περιέχει εκείνες τις ακμές των οποίων το άθροισμα των βαρών είναι ελάχιστο.

Το δέντρο αυτό ονομάζεται ελάχιστο επικαλύπτον δέντρο (minimal spanning tree) και το πρόβλημα καθορισμού του είναι ένα κλασσικό πρόβλημα διακριτής βελτιστοποίησης (συνδυαστικής) για το οποίο έχουν προταθεί αλγόριθμοι όπως των:

- Otakar Borůvka (1926), Vojtěch Jarník (1930) (Prim),
- Prim (1957), Dijkstra (1959), Kruskal (1956), …

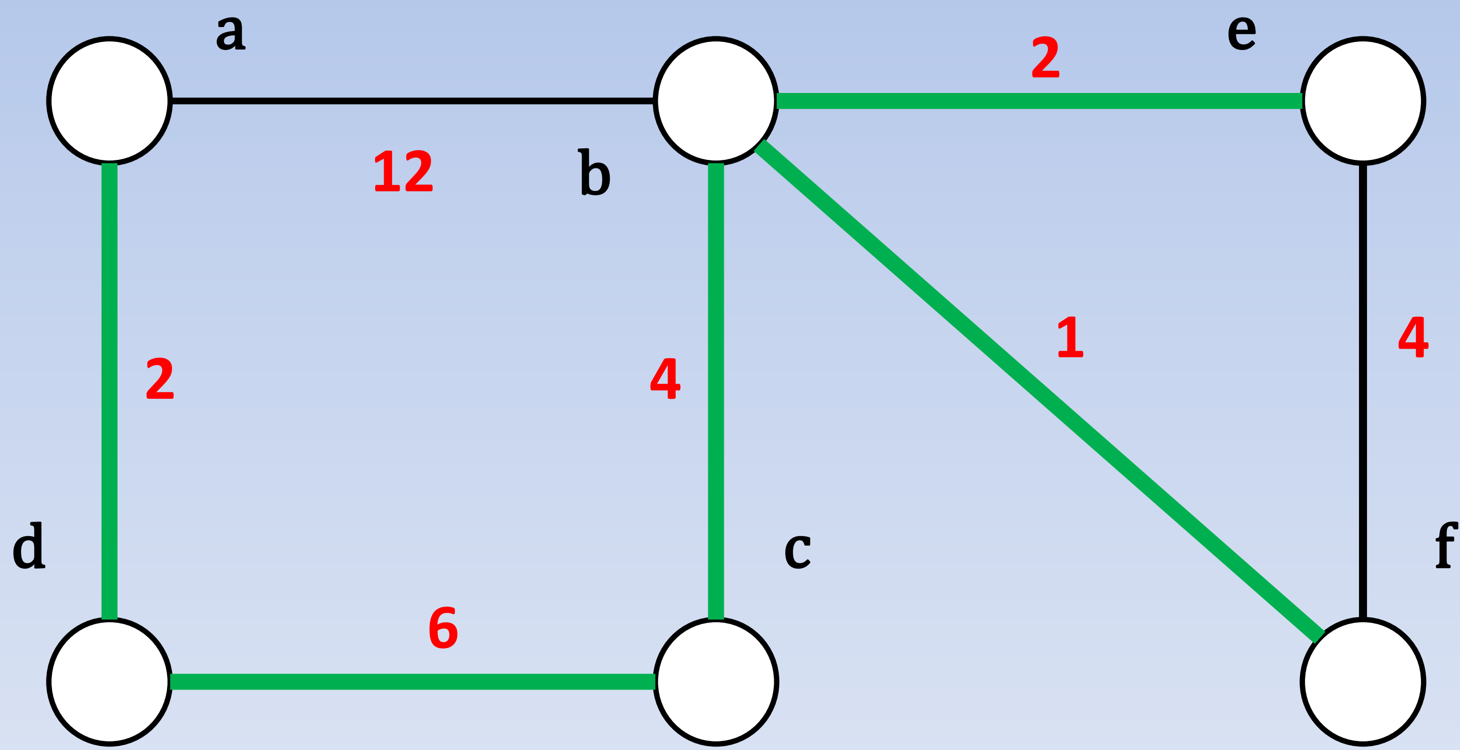
Ελάχιστο Επικαλύπτον Δέντρο

Παράδειγμα ελάχιστου επικαλύπτοντος δέντρου



Ελάχιστο Επικαλύπτον Δέντρο

Άσκηση: Με βάση το επόμενο γράφημα τι παρατηρείτε για τις ακμές που αποτελούν το ελάχιστο επικαλύπτον δέντρο, αν ταξινομήσετε όλες τις ακμές σε φθίνουσα τάξη για τα βάρη των ακμών.



Ελάχιστο Επικαλύπτον Δέντρο

Άσκηση

Με βάση τις παρατηρήσεις της προηγούμενης άσκησης σκεφτείτε και προτείνετε έναν απλό αλγόριθμο υπολογισμού του ελάχιστου επικαλύπτοντος δέντρου.

Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε όλες τις έννοιες και τους αλγορίθμους που είναι γνωστά στο μάθημα αυτό για τα γραφήματα και τα δέντρα.