ΑΡΧΕΣ ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ

Τσορμπατζόγλου Ανδρέας

Ηλεκτρικό δυναμικό – Ηλεκτρεγερτική Δύναμη

Το δυναμικό φ αντιστοιχεί στο έργο (ενέργεια) που δαπανά ένα φορτίο για να μετακινηθεί από ένα σημείο του πεδίου σε ένα άλλο. Σε ένα τυχαίο σημείο P του πεδίου, το δυναμικό υπολογίζεται ως προς τυχαίο σημείο O ως εξής:

$$\varphi_{\mathrm{P}} = \int_{\mathrm{P}}^{\mathrm{O}} \vec{\mathrm{E}} \cdot d\vec{\ell}$$

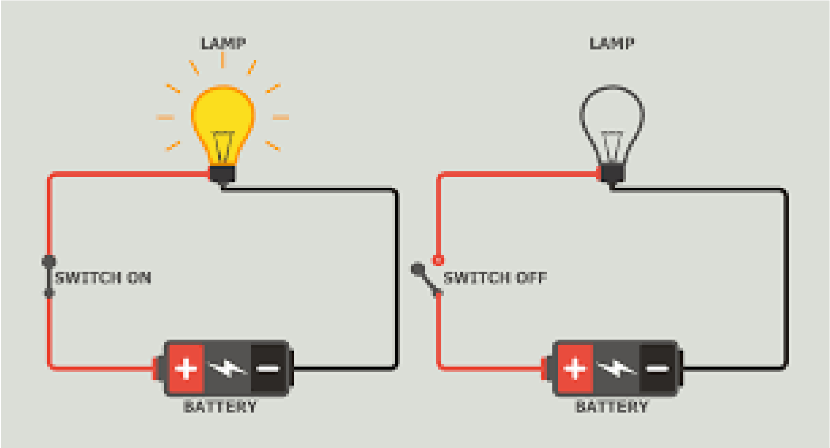
Το δυναμικό είναι βαθμωτό μέγεθος

$$\vec{\mathrm{E}} = -\vec{\nabla}\varphi$$

Το πεδίο είναι διανυσματικό μέγεθος

Αν είναι γνωστό το δυναμικό φ μπορώ να υπολογίσω την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου από τη σχέση:

Ηλεκτρεγερτική δύναμη (ΗΕΔ) ονομάζεται το δυναμικό φ ενός φορτίου όταν κινείται κατά μήκος μιας κλειστής διαδρομής σε ένα ηλεκτρικό κύκλωμα και αντιστοιχεί στο έργο που δαπανά φορτίο για να κινηθεί μέσα στο κύκλωμα



Εξισώσεις Poisson και Laplace

Σε ένα χώρο που δεν περιέχει φορτία ισχύει η εξίσωση Laplace η οποία σε καρτεσιανές συντεταγμένες γράφεται:

$$\nabla^2\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Τελεστής Laplace

Σε ένα χώρο που περιέχει φορτία ισχύει η εξίσωση Poisson η οποία σε καρτεσιανές συντεταγμένες γράφεται:

$$\nabla^2\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

Οι εξισώσεις Laplace και Poisson είναι διαφορικές εξισώσεις (περιέχουν μερικές παραγώγους) και για να τις επιλύσω σε ένα πρόβλημα πρέπει να γνωρίζω τις οριακές συνθήκες του προβλήματος, δηλαδή να γνωρίζω τις τιμές του δυναμικού στα όρια μιας συγκεκριμένης γεωμετρίας.

Μαθηματική υπενθύμιση

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$ ← Τελεστής Laplace

$$\varphi = x^2 + yz$$ ← Έστω ένα τυχαίο δυναμικό

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 (x^2 + yz)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (x^2 + yz)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 (x^2 + yz)}{\partial z^2}$$

$$= 2$$

Προσοχή στις μερικές παραγώγους. Όταν παραγωγίζω ως προς x αντιμετωπίζω τα y και z ως αριθμούς. Αντιστοίχως όταν παραγωγίζω ως προς y και z.

Πυκνότητα ρεύματος – ηλεκτρικό ρεύμα

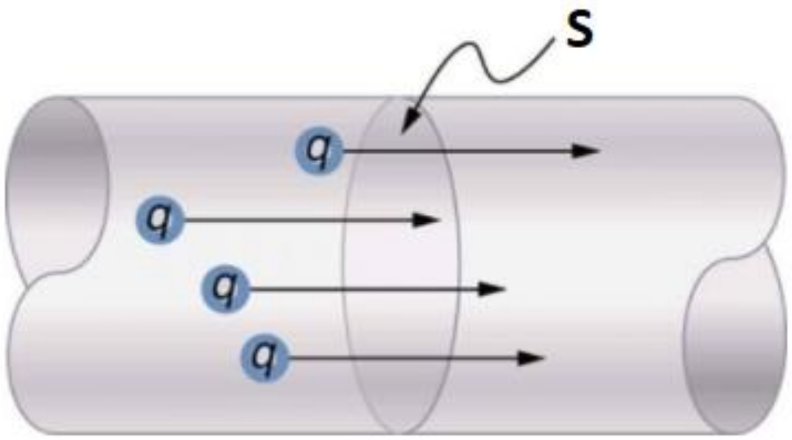
Η πυκνότητα ρεύματος N φορτίων q με κοινή ταχύτητα **u** ορίζεται ως το διανυσματικό μέγεθος:

$$\vec{J} = Nq\vec{u} = \rho\vec{u}$$

Η Πυκνότητα Ρεύματος *J* αντιστοιχεί στο φορτίο που διέρχεται από μια επιφάνεια *S* ανά μονάδα χρόνου και ανά μονάδα επιφανείας

Όπου ρ η χωρική πυκνότητα φορτίου.

Το ηλεκτρικό ρεύμα I που διέρχεται μέσα από μια επιφάνεια S εκφράζει το συνολικό φορτίο που διέρχεται από την επιφάνεια στη μονάδα του χρόνου.



$$\mathrm{I} = \frac{dQ}{dt} = \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

Η μονάδα μέτρησης της έντασης του ηλεκτρικού ρεύματος είναι το 1 Ampere: $\mathbf{1A = \frac{1\,Cb}{1\,s}}$

Εξίσωση συνέχειας

Αν σε έναν όγκο V έχω συνολικό φορτίο Q, οποιαδήποτε μεταβολή του φορτίου είναι ίση με τη ροή του ηλεκτρικού ρεύματος μέσα από την επιφάνεια S που περικλείει τον όγκο.

Ο νόμος του Gauss περιγράφει την ηλεκτρική ροή Φ όταν το φορτίο στον όγκο V είναι σταθερό. <u>Η παρακάτω εξίσωση</u> περιγράφει το ηλεκτρικό ρεύμα όταν το φορτίο στον όγκο μεταβάλλεται.

$$\boxed{\frac{dQ}{dt} = \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{S}} \xrightarrow{Q=\iiint_V \rho dV} \frac{d}{dt}\iiint_V \rho dV = -\oiint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} \xrightarrow[\text{Gauss}]{\text{Θεώρημα}} \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{J} dV$$

Αφαιρώντας το τριπλό ολοκλήρωμα όγκου έχουμε την **εξίσωση συνέχειας**: $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

Όταν το φορτίο μένει αμετάβλητο: $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$ που είναι η διαφορική μορφή του νόμου του Kirchhoff

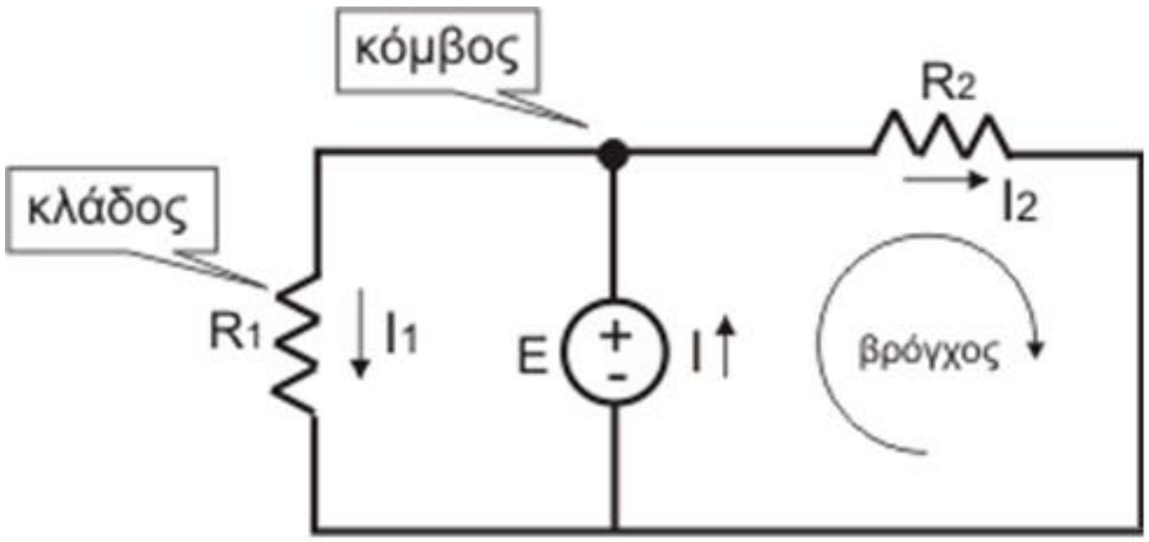
Νόμος του Kirchhoff

Νόμος των ρευμάτων του Kirchhoff

Το αλγεβρικό άθροισμα των εντάσεων των ρευμάτων σε κάθε κόμβο του κυκλώματος είναι ίσο με μηδέν.

Νόμος των τάσεων του Kirchhoff

Το αλγεβρικό άθροισμα όλων των τάσεων σε κάθε βρόγχο ενός κυκλώματος είναι ίσο με μηδέν



Μαθηματική υπενθύμιση

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{z}$$

← Τελεστής απόκλισης που είναι **διάνυσμα**

$$\vec{J} = J_x\hat{x} + J_y\hat{y} + J_z\hat{z}$$

← **Διάνυσμα** της πυκνότητας ρεύματος

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{J} = \frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} + \frac{\partial J_z}{\partial z}$$

← **Εσωτερικό γινόμενο**, άρα βαθμωτό μέγεθος

Παράδειγμα: Αν $\vec{J} = x^2\hat{x} + 4y\hat{z}$ άρα $J_x = x^2$, $J_y = 0$ και $J_z = 4y$ τότε

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{J} = \frac{\partial\left(x^2\right)}{\partial x} + \frac{\partial 0}{\partial y} + \frac{\partial\left(4y\right)}{\partial z} = 2x$$

Νόμος του Ohm

Έστω σ η ειδική αγωγιμότητα ενός μέσου. Τότε μπορώ να ορίσω την πυκνότητα ρεύματος ως:

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$

Αν ορίσω την ειδική αντίσταση σ=1/ρ τότε:

$$\vec{J} = \frac{\vec{E}}{\rho}$$

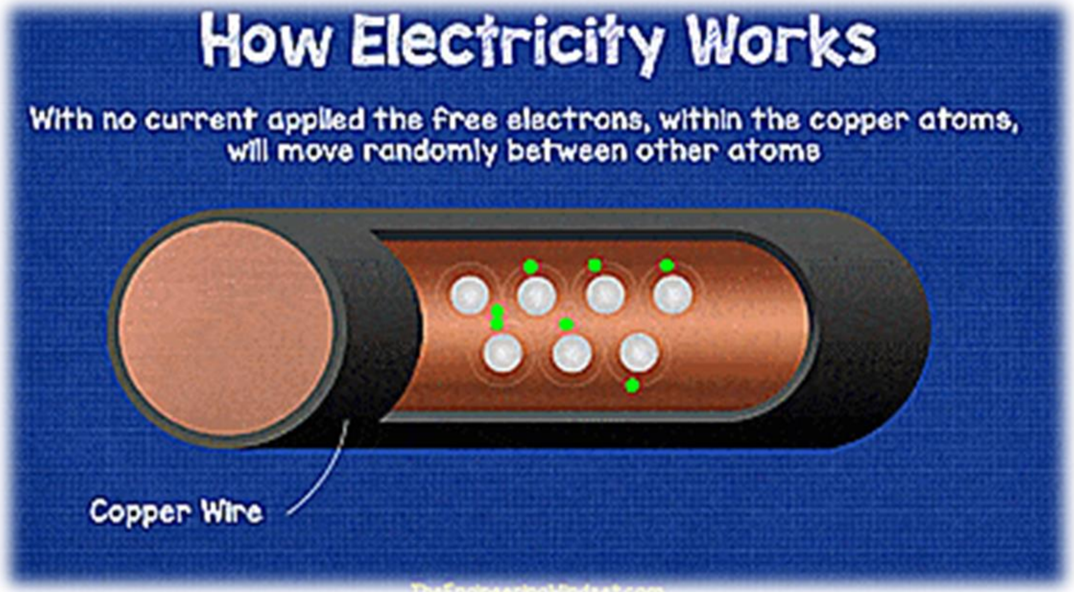
Οι 2 τύποι αποτελούν γενικές διατυπώσεις του νόμου του Ohm ως προς την ειδική αγωγιμότητα σ και την ειδική αντίσταση ρ.

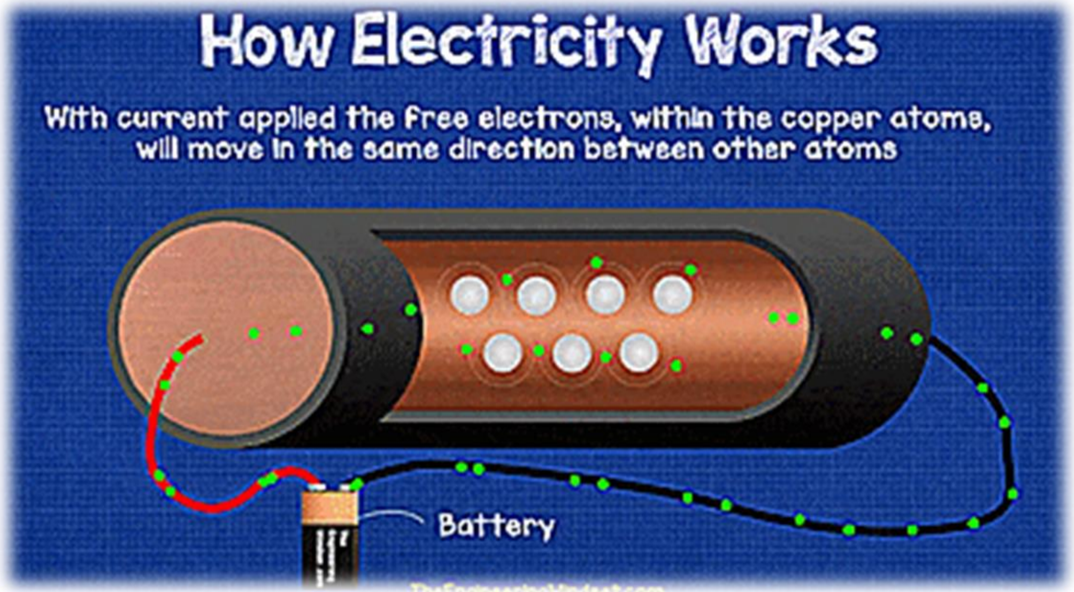
Αν αντί για την ειδική αγωγιμότητα και την ειδική αντίσταση χρησιμοποιήσω την αντίσταση R και την αγωγιμότητα G=1/R τότε έχω την κλασική διατύπωση του Ohm για ένα αγωγό που διαρρέεται από ρεύμα I όταν εφαρμοστεί στα άκρα του τάση (διαφορά δυναμικού) V.

$$R = \frac{V}{I} = \frac{1}{G}$$

Η μονάδα μέτρησης της αντίστασης είναι 1 Ohm (1 Ω): $\mathbf{1\Omega = \dfrac{1\,V}{1\,A}}$

Τιμές Ειδικής αντίστασης



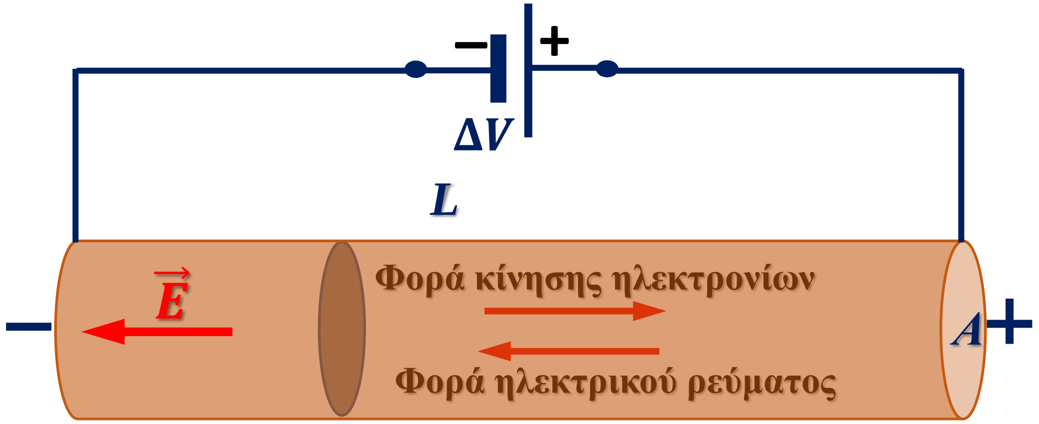


Τιμές ειδικής αντίστασης	
Υλικό	**Ειδική αντίσταση (Ω·m)**
Σίδερο	10×10^{-8}
Χαλκός	1.7×10^{-8}
Άνθρακας	3500×10^{-8}
Πυρίτιο	640
Γυαλί	10^{12}
Χαλαζίας	10^{16}

Νόμος του Ohm - 2

Η ηλεκτρική αντίσταση του αγωγού εξαρτάται από τη φύση του υλικού του αγωγού, τις διαστάσεις του αγωγού και από τη θερμοκρασία του αγωγού

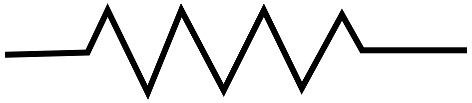
Όσο πιο μεγάλη είναι η θερμοκρασία του αγωγού τόσο πιο συχνές είναι οι συγκρούσεις των ελεύθερων ηλεκτρονίων με τα άτομα του μεταλλικού πλέγματος του αγωγού.



Η φορά της έντασης του ηλεκτρικού ρεύματος είναι αντίθετη της φοράς κίνησης των ηλεκτρονίων

Αντιστάτης εμπορίου

Το σύμβολο των αντιστατών στα ηλεκτρικά κυκλώματα είναι:



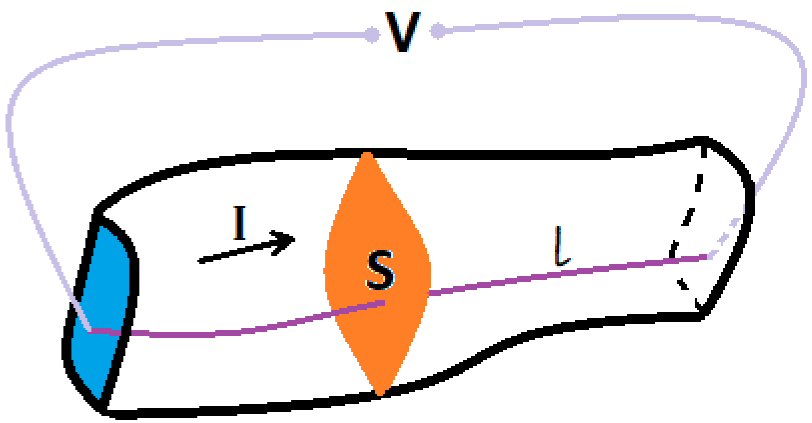
R

Ωμική αντίσταση αγωγού τυχαίας διατομής

Ξεκινώντας από τον νόμο του Ohm μπορώ να γράψω τη γενική μορφή υπολογισμού της αντίστασης τυχαίου αγωγού του οποίου τυχαία διατομή του S διαρρέεται από ρεύμα I όταν εφαρμοστεί στα άκρα του τάση V και l μια τυχαία γραμμή που ενώνει τα άκρα του αγωγού.

$$R = \frac{V}{I} = \frac{\int_l \vec{E}\cdot d\vec{l}}{\iint_S \vec{J}\cdot d\vec{S}} \overset{\vec{J}=\sigma\vec{E}}{=} \frac{1}{\sigma}\frac{\int_l \vec{E}\cdot d\vec{l}}{\iint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}}$$

Επειδή όμως $C = \dfrac{Q}{V} = \dfrac{\varepsilon \iint_S \vec{\mathrm{E}}\cdot d\vec{S}}{\int_l \vec{\mathrm{E}}\cdot d\vec{l}}$



Βρίσκω μια πολύ και απλή σχέση που συνδέει την αντίσταση και τη χωρητικότητα

$$RC = \frac{\varepsilon}{\sigma}$$

Νόμος του Joule

Σύμφωνα με τον νόμο του Joule η ισχύς P που καταναλίσκεται σε μια ωμική αντίσταση R που διαρρέεται από ρεύμα I δίνεται από τη σχέση:

$$P = I^2 R = IV$$

Ορίζω επίσης την ισχύ ανά μονάδα όγκου p (μικρός λατινικός χαρακτήρας):

$$p = \frac{dP}{dV} = \vec{J} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\sigma} \vec{J} \cdot \vec{J} = \sigma \vec{E} \cdot \vec{E}$$

Αρχή των ελάχιστων απωλειών

Μέσα σε ένα αγώγιμο μέσο η πυκνότητα ρεύματος J κατανέμεται με τέτοιον τρόπο ώστε να παράγεται το ελάχιστο ποσό θερμότητας

Ερωτήσεις

- Τι είναι η ηλεκτρεγερτική δύναμη;
- Ποια είναι η διαφορά ανάμεσα στην εξίσωση Laplace και την εξίσωση Poisson;
- Πώς σχετίζεται το ρεύμα με την πυκνότητα ρεύματος;
- Ποιο φυσικό μέγεθος περιγράφει η κίνηση φορτίων μέσα από μια επιφάνεια;
- Με ποια εξίσωση σχετίζεται ο νόμος του Kirchhoff;
- Πώς σχετίζονται η ειδική αντίσταση με την ειδική αγωγιμότητα;
- Από τι εξαρτάται η ηλεκτρική αντίσταση ενός αγωγού;