ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ & ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ
ΣΧΟΛΗ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ & ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Επεξεργασία Εικόνας & Βίντεο

03. Γεωμετρικοί Μετασχηματισμοί

Εισηγητής: Νικόλαος Γιαννακέας
Επίκουρος Καθηγητής, Σημάτων & Συστημάτων

Περιεχόμενα Παρουσίασης

- Απλοί γεωμετρικοί μετασχηματισμοί
- Γεωμετρικές Ιδιότητες Εικόνας
- Αγχίγραμμος μετασχηματισμός
- Μετασχηματισμός Hough
- Μετασχηματισμός Radon

Απλοί Γεωμετρικοί μετασχηματισμοί

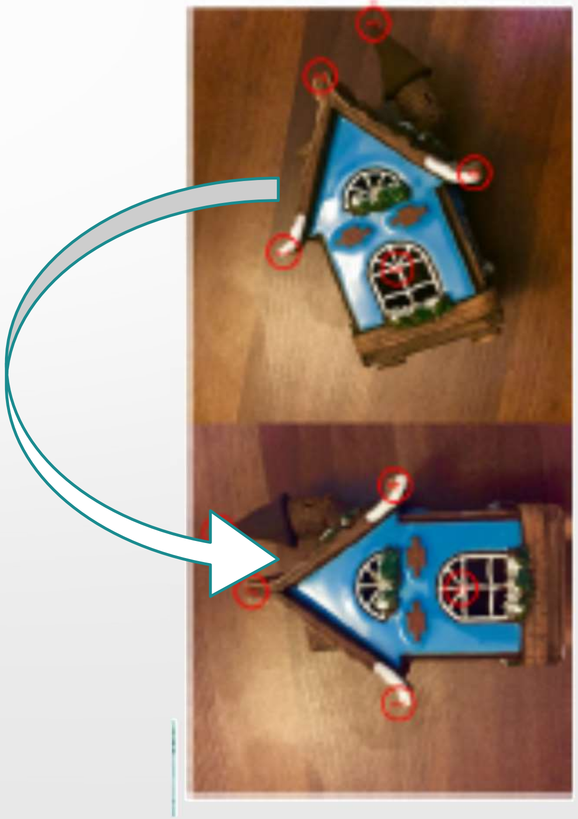
Εισαγωγή

- Οι πράξεις αυτές αφορούν στο μετασχηματισμό των συντεταγμένων της αρχικής εικόνας
- Από τις κυριότερες γεωμετρικές πράξεις είναι η μετατόπιση (translation), η στροφή (rotation) και ο καθρεπτισμός (mirroring - reflection)
- Οι πράξεις αυτές αποδίδουν συνήθως εικόνα εξόδου ίδια σε διαστάσεις με την εικόνα εισόδου (μετασχηματισμός ένα προς ένα).
- Υπάρχουν όμως και γεωμετρικές πράξεις που αποδίδουν εικόνες μεγαλύτερες ή μικρότερες από την αρχική

Απλοί Γεωμετρικοί μετασχηματισμοί

Εισαγωγή

- Είναι εύκολο να σκεφτούμε ότι πολλές φορές χρειαζόμαστε διαφορετική θέση στα αντικείμενο που απεικονίζονται σε μια εικόνα, και να τις μοντελοποιήσουμε μαθηματικά
- Οι γεωμετρικοί μετασχηματισμοί βρίσκουν εφαρμογή σε πληθώρα περιπτώσεων επεξεργασίας εικόνας
- Έτσι, για παράδειγμα, η στροφή είναι απαραίτητη για το ταίριασμα (matching) και σύγκριση εικόνων της ίδιας περιοχής που έχουν ληφθεί από διαφορετικές γωνίες



Απλοί Γεωμετρικοί μετασχηματισμοί

Μετασχηματισμός Στροφής ή Στρέψης 90°

- Θεωρούμε την εικόνα μεγέθους $N \times N = 7 \times 7$ όπως φαίνεται στο Σχήμα. Στροφή κατά 90° σημαίνει το εικονοστοιχείο με συντεταγμένες (n1,n2) να πάει στη θέση (N + 1 – n2, n1). Επομένως, πρέπει να γίνει ο μετασχηματισμός

Μαθηματική έκφραση για μετασχηματισμό στροφής μιας εικόνας κατά 90°.

$$T(n_1,n_2) = (N - n_1 + 1, n_2)$$

Απλοί Γεωμετρικοί μετασχηματισμοί

Μετασχηματισμός Καθρεφτισμού

Μετασχηματισμός Συμμετρίας (καθρεφτισμός - Mirroring)

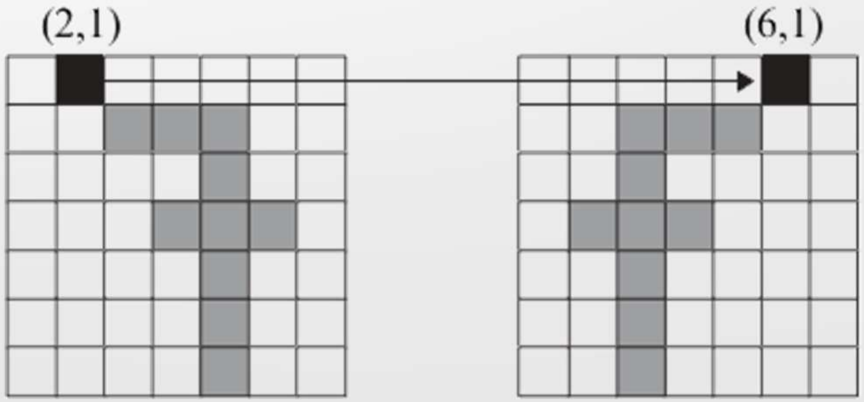
- Είναι δυνατό να έχουμε συμμετρία πολλών ειδών
- (γύρω από κατακόρυφο, οριζόντιο ή διαγώνιο άξονα)

Παράδειγμα: περίπτωση συμμετρίας γύρω από κατακόρυφο άξονα.

- Με βάση το Σχήμα για να λάβουμε τη συμμετρική εικόνα γύρω από άξονα που ταυτίζεται με τη μεσαία στήλη των εικονοστοιχείων, θα πρέπει να ισχύει

Μαθηματική έκφραση για μετασχηματισμό καθρεφτισμού ως προς τον κατακόρυφο άξονα.

$T(n_1,n_2)=(N-n_2+1,n_1)$



Απλοί Γεωμετρικοί μετασχηματισμοί

Μετασχηματισμός Μετατόπισης

Μετατόπιση (Translation)

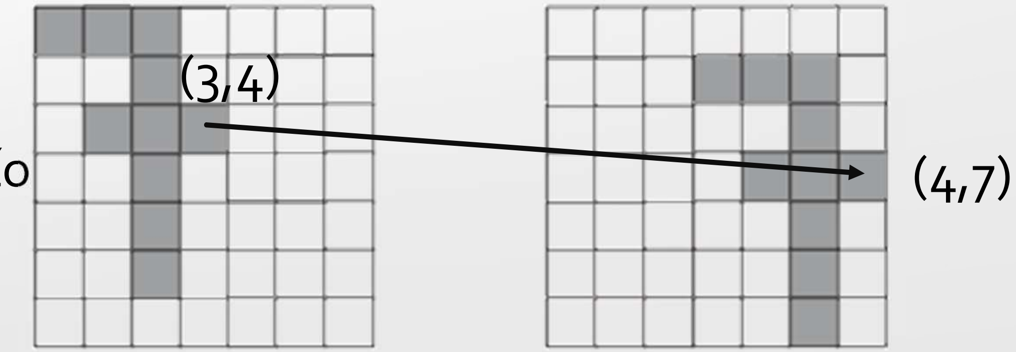
- Μια περιοχή μεταφέρεται σε διαφορετικό σημείο της εικόνας χωρίς να έχει υποστεί παραμόρφωση στο σχήμα ή το μέγεθος της

Παράδειγμα

- Στο παράδειγμα η περιοχή είναι μετατοπισμένη κατά ένα εικονοστοιχείο στον κατακόρυφο άξονα και κατά 3 εικονοστοιχεία στον οριζόντιο

Μαθηματική έκφραση για μετασχηματισμό μεταφοράς

$$T(n1,n2)=(n1+N,n2+M)$$



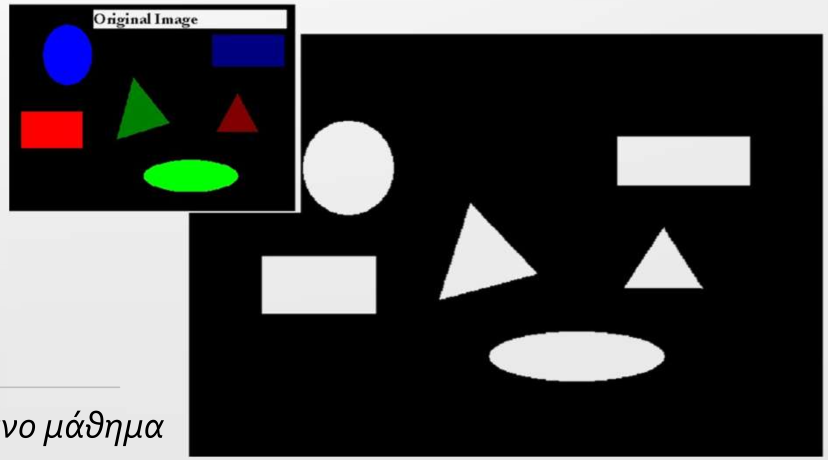
Απλοί Γεωμετρικοί μετασχηματισμοί

Δυαδικές εικόνες

- Συνήθως οι γεωμετρική μετασχηματισμοί εφαρμόζονται σε δυαδικές εικόνες*
- Δυαδικές εικόνες = άσπρο & μαύρο χρώμα μόνο
- Αποθήκευση πληροφορίας μόνο για μορφή αντικειμένων εικόνας (γεωμετρικές ιδιότητες)
    - Μέτρηση επιφανειών
    - Εύρεση θέσης & προσανατολισμού αντικειμένων
    - Γεωμετρικά χαρακτηριστικά σχήματος

Μαθηματική έκφραση δυαδικής εικόνας

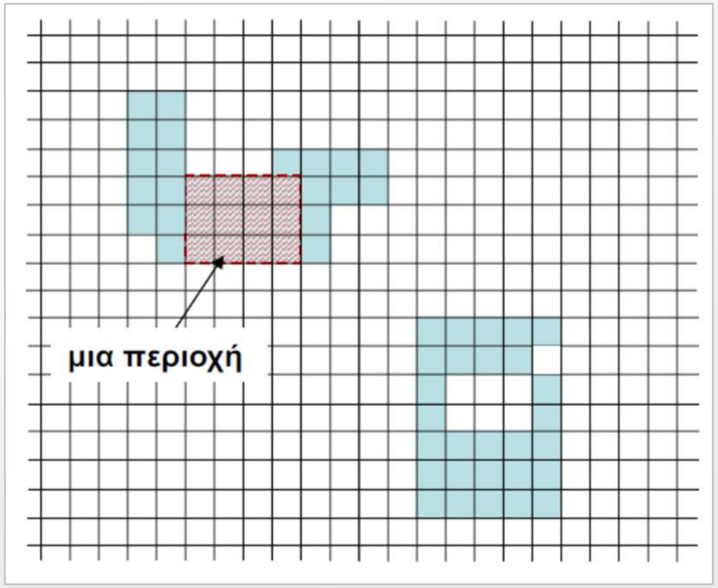
$$b(x,y)=\begin{cases}1, T_1 \leq a(x,y) \leq T_2 \\ 0, \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon}\end{cases}$$



*θα μάθουμε την μετατροπή μιας εικόνας σε δυαδική σε επόμενο μάθημα

Γεωμετρικές Ιδιότητες Αντικειμένων
Περιοχές – Συνεκτικές Περιοχές

- *Έστω V το σύνολο των τιμών γκρίζου που αποδίδονται στα αντικείμενα μιας ψηφιακής εικόνας. Για μια δυαδική (B&W) εικόνα με άσπρα αντικείμενα πάνω σε ένα μαύρο υπόβαθρο, V = {1}.*
- **Μια *περιοχή* είναι ένα σύνολο εικονοστοιχείων** που παίρνουν τιμές από το V με την ιδιότητα ότι **μεταξύ δύο οποιωνδήποτε εικονοστοιχείων του συνόλου υπάρχει ένα μονοπάτι** του οποίου όλα τα εικονοστοιχεία επίσης ανήκουν στο σύνολο



Γεωμετρικές Ιδιότητες Αντικειμένων

Περιοχές – Συνεκτικές Περιοχές

Γειτνίαση Εικονοστοιχείων: 4-γειτόνων

Δύο pixels ονομάζονται 8-γείτονες αν έχουν μεταξύ τους απόσταση “Manhattan” 1

	y - 1	y	y + 1
x - 1		(x-1, y)	
x	(x, y-1)	(x, y)	(x, y+1)
x + 1		(x+1, y)	

4-γείτονες (4-neighbors)

Γειτνίαση Εικονοστοιχείων: 8-γειτόνων

Δύο pixels ονομάζονται 8-γείτονες αν έχουν μεταξύ τους απόσταση σκακιέρας 1

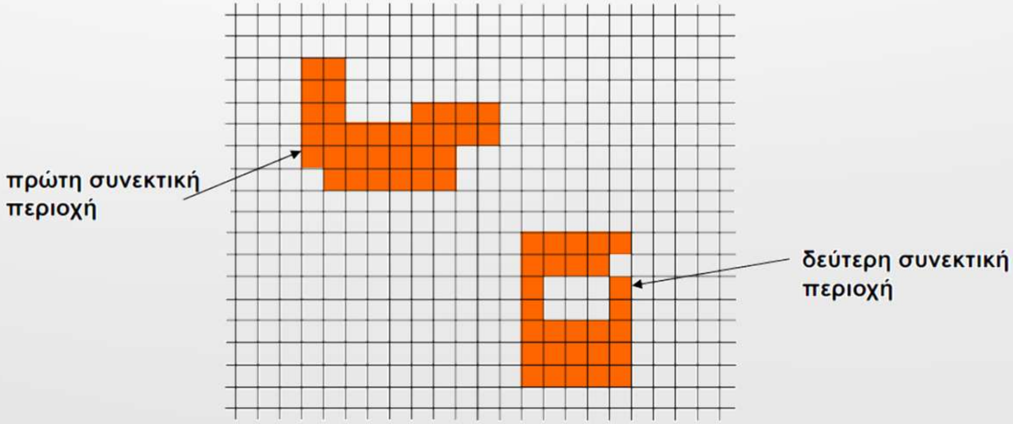
	y - 1	y	y + 1
x - 1	(x-1, y-1)	(x-1, y)	(x-1, y+1)
x	(x, y-1)	(x, y)	(x, y+1)
x + 1	(x+1, y-1)	(x+1, y)	(x+1, y+1)

8-γείτονες (8-neighbors)

Γεωμετρικές Ιδιότητες Αντικειμένων

Περιοχές – Συνεκτικές Περιοχές

- Δύο **εικονοστοιχεία ενός υποσυνόλου S της εικόνας ονομάζονται *συνδεδεμένα*** αν παίρνουν και τα δύο τιμές από το V και αν υπάρχει ένα μονοπάτι μεταξύ τους που αποτελείται εξ ολοκλήρου από εικονοστοιχεία στο S που παίρνουν τιμές από το V.
- Για κάθε pixel P της ψηφιακής εικόνας, το σύνολο των συνδεδεμένων με το P pixels ονομάζεται ***συνεκτική περιοχή***.

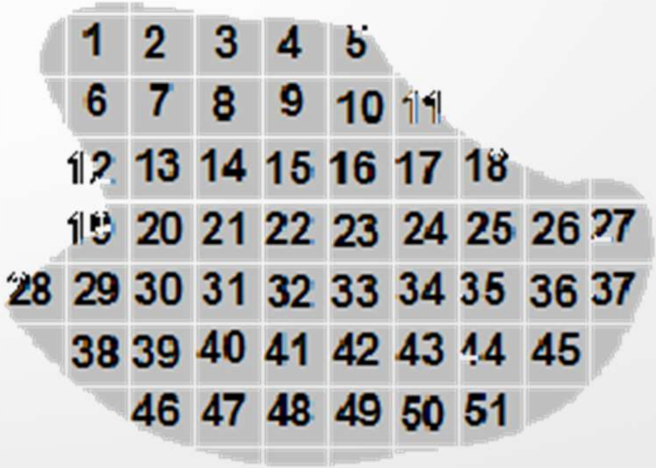


Γεωμετρικές Ιδιότητες Αντικειμένων

1. Εμβαδόν Περιοχής (Area)

Στην δυαδική (binary) Εικόνας

- Για απλότητα b(x,y)=1 για τα pixel αντικειμένων και b(x,y)=0 για τα υπόλοιπα
- Εμβαδών Περιοχής - Αντικειμένου
  - δυαδική εικόνα I που εκφράζεται από την δυαδική συνάρτηση b(x,y), αντικείμενο A,



$$A = \sum_{x=1}^{N} \sum_{y=1}^{M} b(x, y)$$

Αθροίζονται όλες οι «φωτεινότητες» τις δυαδικής περιοχής, στις δύο κατευθύνσεις

Moments (ροπές) Εικόνας

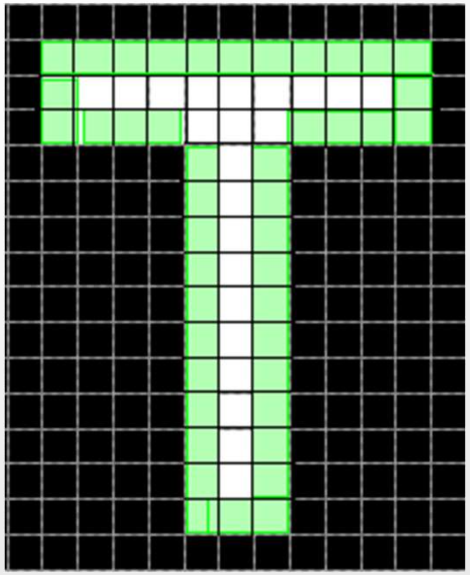
$$M(m,n) = \sum_{(x,y)\in R} \sum x^m y^n b(x, y)$$

Το εμβαδόν είναι ροπή μηδενικής τάξης

Γεωμετρικές Ιδιότητες Αντικειμένων

2. Περίμετρος (Perimeter)

- Η απόσταση γύρω από τα όρια της περιοχής (βαθμωτό μέγεθος).
- Προσδιορίζεται υπολογίζοντας την απόσταση μεταξύ κάθε γειτονικού ζεύγους εικονοστοιχείων γύρω από το περίγραμμα της περιοχής
- Είναι το μέγεθος του περιγραμμάτος (μονοπατιού από εικονοστοιχεία στα όρια της περιοχής)*

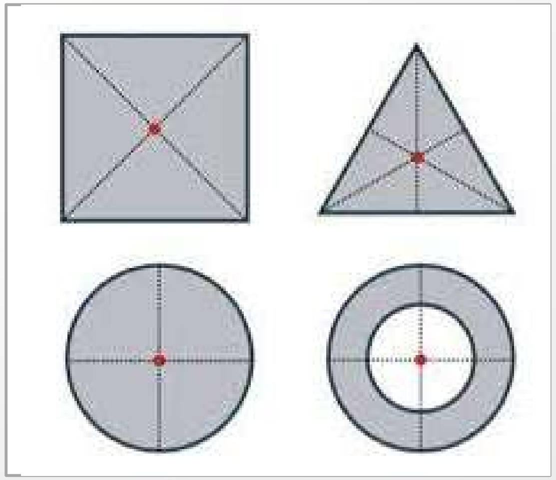


Σε επόμενο μάθημα θα δούμε πως εξάγεται το περίγραμμα

Γεωμετρικές Ιδιότητες Αντικειμένων

3. Κεντροειδές (Centroid)

- Το κεντροειδές (centroid) είναι το σημείο που καθορίζει την θέση ενός ολόκληρου αντικειμένου
- Για δυαδικές εικόνες ταυτίζεται με το κέντρο μάζας του αντικειμένου
- Δεν είναι απαραίτητο το κεντροειδές να βρίσκεται μέσα στην περιοχή (βλ. δακτύλιο στην εικόνα)



$$x_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i x_i}{M} \qquad y_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i y_i}{M}$$

Τύπος κέντρου μάζας

$$A = \sum_{x=1}^{N} \sum_{y=1}^{M} b(x, y)$$

$$\bar{x} = \frac{M(1,0)}{A} \qquad \bar{y} = \frac{M(0,1)}{A}$$

Moments (ροπές) Εικόνας

$$M(m,n) = \sum \sum_{(x,y)\in R} x^m y^n b(x,y)$$

Το κεντροειδές είναι ροπή πρώτης τάξης

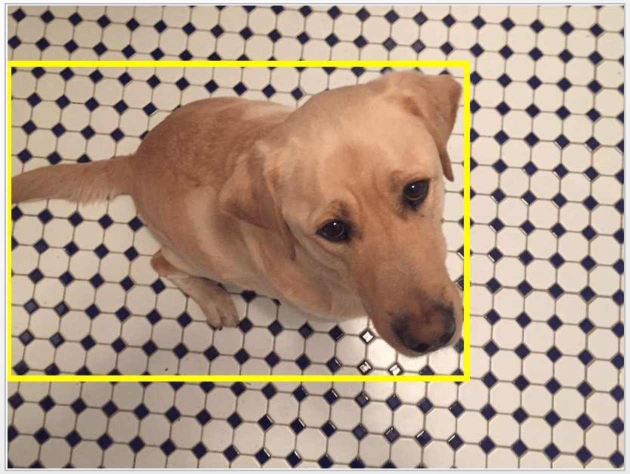
Γεωμετρικές Ιδιότητες Αντικειμένων

4. Περιγεγραμμένο πλαίσιο

- Το περιγρεγραμμένο πλαίσιο (bounding box) είναι μια εναλλακτική προσσέγγιση προσδιορισμού της θέσης μιας περιοχής
- Συνήθως ορίζεται με βάση την θέση του και το μέγεθος του

Για παράδειγμα,

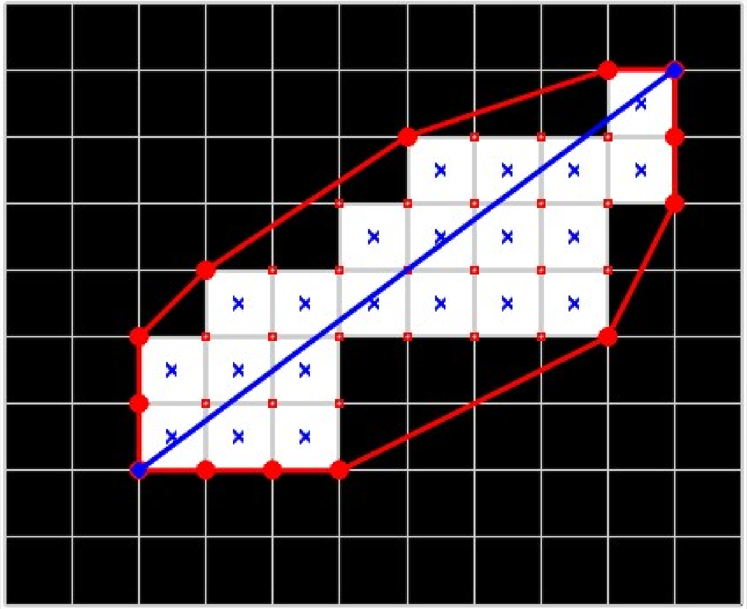
- Ένα 2-D πλαίσιο με τιμή [5.5 8.5 11 14] υποδεικνύει
  - ότι η συντεταγμένη (x, y) της επάνω αριστερής γωνίας του κουτιού είναι (5.5, 8.5),
  - το οριζόντιο πλάτος του κουτιού είναι 11 pixel και το κατακόρυφο ύψος του κουτιού είναι 14 pixel.



Γεωμετρικές Ιδιότητες Αντικειμένων

5. Κυρτό πολύγωνο

- Το κυρτό πολύγωνο (convex hull) είναι το ελάχιστο πολύγωνο που δύναται να περικλήσει η περιοχή
- Είναι σαν το περιγεγραμμένο πλαίσιο, με την διαφορά ότι δεν περιορίζεται στις τέσσερεις μόνο πλευρές
- Ορίζεται με τις συντεταγμένες (x,y) όλων των κορυφών του πολυγώνου

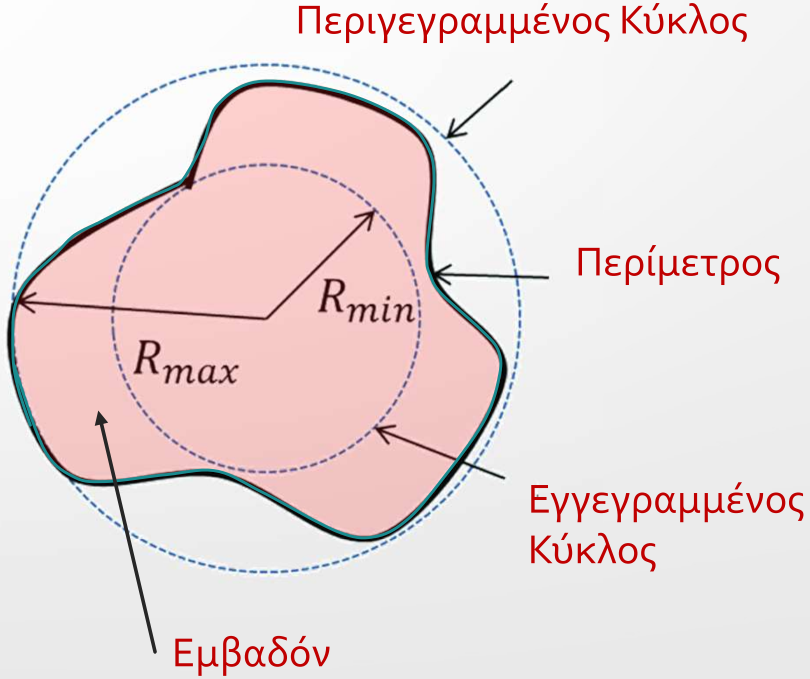


Γεωμετρικές Ιδιότητες Αντικειμένων

6. Κυκλικότητα

- Η κυκλικότητα (roundness or circularity) παρέχει ένα αξιόπιστο μέτρο του πόσο κυκλικό είναι ένα αντικείμενο ή μια περιοχή
- Για μια περιοχή απολύτως κυκλική η τιμή της κυκλικότητας είναι ίση με 1
- Γενικά θα πρέπει η περιοχή να μην περιέχει οπές αλλά να είναι συμπαγής

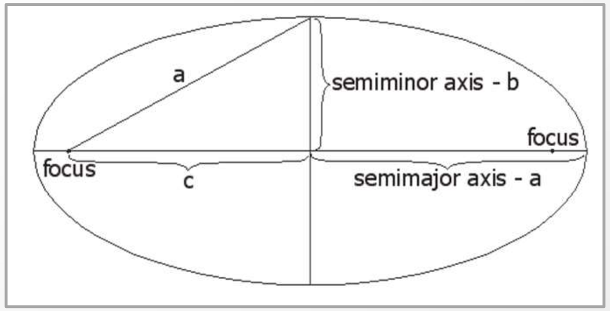
$$κυκλικότητα = \frac{4 \cdot \text{Εμβαδόν} \cdot \pi}{\text{περίμετρος}^2}$$



Γεωμετρικές Ιδιότητες Αντικειμένων

7. Εκκεντρότητα

- Η εκκεντρότητα (eccentricity) είναι ένα κανονικοποιημένο μέγεθος (πεδίο τιμών 0-1) που εκφράζει πόσο «συμπιεσμένο» είναι ένα αντικείμενο
- Αντίθετα η κυκλικότητα είναι ένα μέτρο που μπορεί να ξεχωρίσει κυκλικά σχήματα με τριγωνικά και ορθογώνια
  - Μια έλλειψη της οποίας η εκκεντρότητα είναι 0 (μηδέν) είναι στην πραγματικότητα ένας κύκλος
  - Μια έλλειψη της οποίας η εκκεντρότητα είναι 1 είναι ένα τμήμα ευθείας γραμμής.



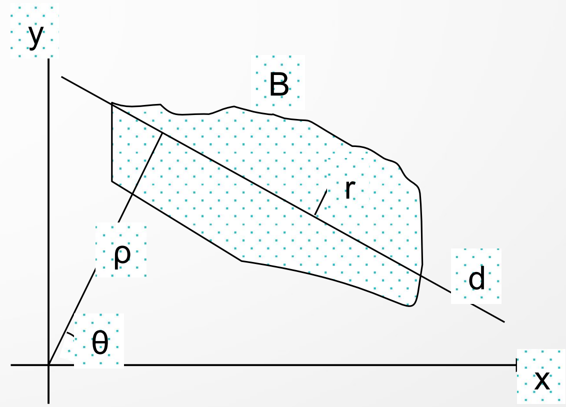
$$Eccentricity = \frac{c}{a}$$

λόγος της απόστασης μεταξύ των εστιών της έλλειψης και του κύριου μήκους του άξονα

Γεωμετρικές Ιδιότητες Αντικειμένων

8. Προσανατολισμός

- Ο προσανατολισμός (orientation) μιας περιοχής ορίζεται Η γωνία μεταξύ του άξονα x και του κύριου άξονα της έλλειψης που έχει τις ίδιες ροπές με την περιοχή
  - δεν έχει τιμή για απόλυτα κυκλική περιοχή
  - μοναδικός προσανατολισμός απαιτεί επίμηκες σχήμα
  - καθορισμός προσανατολισμού από τη θ



ρ: Άξονας ελάχιστης αδράνειας= άξονα ελάχιστης ροπής δεύτερης τάξης στις δυαδικές εικόνες

Moments (ροπές) Εικόνας

$$M(m,n) = \sum \sum_{(x,y)\in R} x^m y^n b(x,y)$$

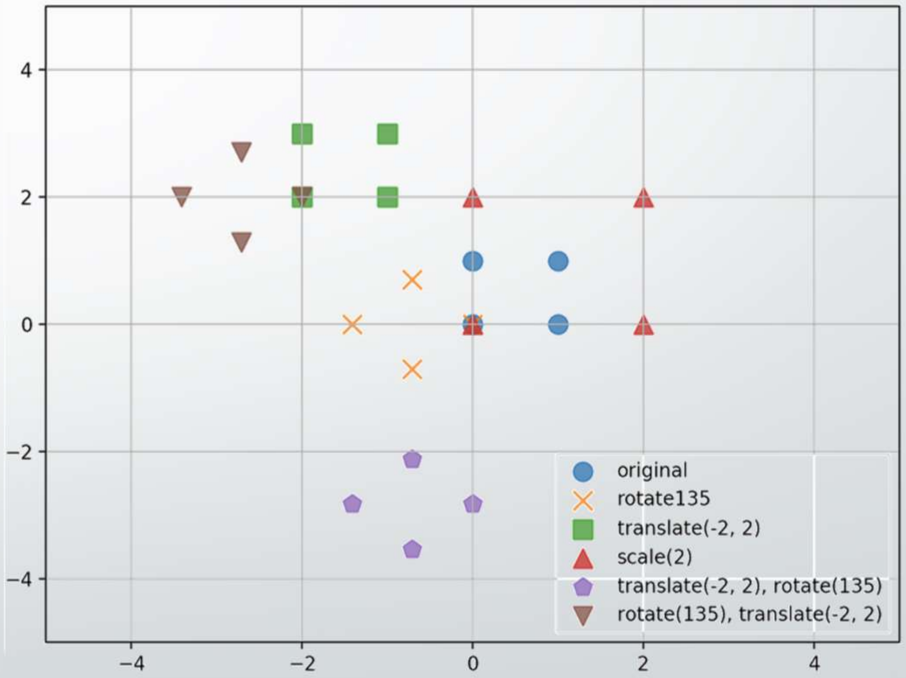
Ο προσανατολισμός σχετίζεται με ροπή 2ης τάξης

Γεωμετρικοί Μετασχηματισμοί

Αγχίγραμμος Μετασχηματισμός (Affine Transform)

Ο Αγχίγραμμος Μετασχηματισμός με επιτρέπει με χρήση πινάκων να εφαρμόσουμε πολλούς γεωμετρικούς μετασχηματισμούς είτε μεμονωμένα είτε όλους μαζί:

- Κλιμάκωση (Scaling)
- Κατοπτρισμός (Reflation)
- Περιστροφή (Rotation)
- Μετατόπιση (Translation)
- Οριζόντια παραμόρφωση (Horizontal Shear)
- Κατακόρυφη Παραμόρφωση (Vertical Shear)



T □ T_1 □T_2 □T_3

Γεωμετρικοί Μετασχηματισμοί

Αγχίγραμμος Μετασχηματισμός (Affine Transform)

- Ταυτότητα (Identity)

$$\begin{bmatrix} x_{tranformed} \\ y_{tranformed} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{initial} \\ y_{initial} \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Κατοπτρισμός (mirroring) με βάση τον οριζόντιο άξονα

$$\begin{bmatrix} x_{tranformed} \\ y_{tranformed} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{initial} \\ y_{initial} \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Κατοπτρισμός (mirroring) με βάση τον Κατακόρυφο άξονα

$$\begin{bmatrix} x_{tranformed} \\ y_{tranformed} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{initial} \\ y_{initial} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Γεωμετρικοί Μετασχηματισμοί

Αγχίγραμμος Μετασχηματισμός (Affine Transform)

- Κλιμάκωση (Scaling)

$$\begin{bmatrix} x_{tranformed} \\ y_{tranformed} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{initial} \\ y_{initial} \\ 1 \end{bmatrix}$$

S_x : Πολλαπλασιάζει το μέγεθός στην οριζόντια διάσταση

S_y : Πολλαπλασιάζει το μέγεθός στην κατακόρυφη διάσταση

- Περιστροφή (Rotation)

$$\begin{bmatrix} x_{tranformed} \\ y_{tranformed} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{initial} \\ y_{initial} \\ 1 \end{bmatrix}$$

θ : περιστροφή σε μοίρες

- Μετατόπιση (Translation)

$$\begin{bmatrix} x_{tranformed} \\ y_{tranformed} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{initial} \\ y_{initial} \\ 1 \end{bmatrix}$$

t_x : απόσταση στον οριζόντιο άξονα σε pixels

t_y : απόσταση στον κατακόρυφο άξονα σε pixels

Γεωμετρικοί Μετασχηματισμοί

Αγχίγραμμος Μετασχηματισμός (Affine Transform)

- Παραμόρφωση (Shear) στον κατακόρυφο άξονα

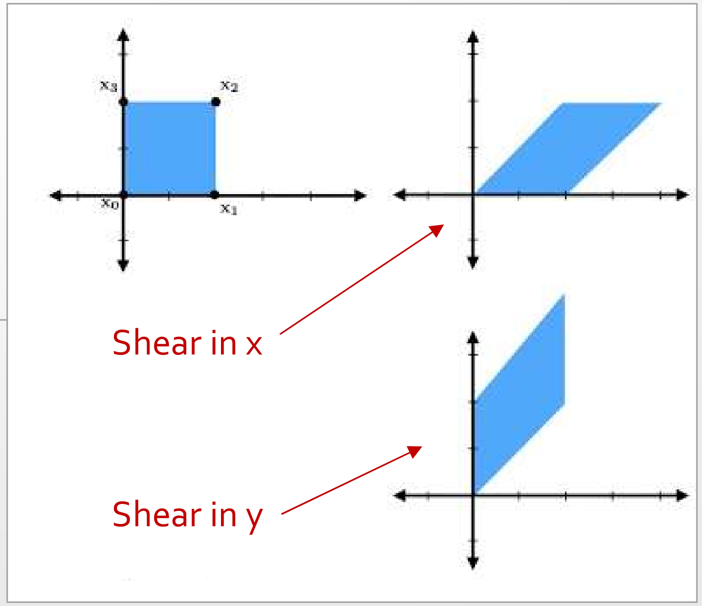
$$\begin{bmatrix} x_{tranformed} \\ y_{tranformed} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ Sh_y & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{initial} \\ y_{initial} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Sh_x : Εκφράζει το μέγεθος της παραμόρφωσης στην οριζόντια διάσταση

- Παραμόρφωση (Shear) στον οριζόντιο άξονα

$$\begin{bmatrix} x_{tranformed} \\ y_{tranformed} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & Sh_x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{initial} \\ y_{initial} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Αρχικό Σχήμα



Γεωμετρικοί Μετασχηματισμοί

Αγχίγραμμος Μετασχηματισμός (Affine Transform)

- Τι γίνεται σε περίπτωση που απαιτείται πολλαπλός μετασχηματισμός;
- ΑΠ: Μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε τους πίνακες από τους γεωμετρικούς μετασχηματισμούς που θέλουμε να εφαρμόσουμε

Παράδειγμα (Μετατόπιση – Κλιμάκωση – Περιστροφή μαζί)

$$\mathbf{p}' = (\mathbf{T}\cdot\mathbf{R}\cdot\mathbf{S})\cdot\mathbf{p} = \begin{bmatrix}1 & 0 & t_x\\0 & 1 & t_y\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s_x & 0 & 0\\0 & s_y & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\1\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & t_x\\ \sin\theta & \cos\theta & t_y\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s_x & 0 & 0\\0 & s_y & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\1\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}\mathbf{R}' & \mathbf{t}\\ \mathbf{0} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{S}' & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\1\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}\mathbf{R}'\mathbf{S}' & \mathbf{t}\\ \mathbf{0} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\1\end{bmatrix}$$

Γεωμετρικοί Μετασχηματισμοί

Αγχίγραμμος Μετασχηματισμός (Affine Transform)

Βασικά προβλήματα

- Δύο ή και περισσότερα εικονοστοιχεία μπορεί να απεικονιστούν στην ίδια θέση
- Μπορεί να υπάρξουν θέσεις στην εικόνα εξόδου που μπορεί να μην απεικονιστούν

Αντιμετώπιση

- Μέθοδοι παρεμβολής
- Εφαρμογή Μορφολογικών πράξεων*

**θα το μελετήσουμε σε επόμενο μάθημα*

Γεωμετρικοί Μετασχηματισμοί
Εισαγωγή στην Διόρθωση στροφής

- Η **στροφή** συνήθως προέρχεται από μη ευθυγραμμισμένη τοποθέτηση ή φωτογράφιση του αντικειμένου με τον ψηφιακό μετατροπέα (Φωτογραφική Μηχανή, Μικροσκόπιο, Σαρωτής
- **Παράδειγμα:** Ένα έγγραφο που θέλουμε να σκανάρουμε και το τοποθετούμε με μικρή κλίση στον σαρωτή


Sing Your Heart Out
Can't dance? Try karaoke, CD-ROM style.


Sing Your Heart Out
Can't dance? Try karaoke, CD-ROM style.

Γεωμετρικοί Μετασχηματισμοί
Εισαγωγή στην Διόρθωση στροφής

- Πως μπορούμε να **γνωρίζουμε την γωνία**, την οποία πρέπει να εφαρμόσουμε στον μετασχηματισμό στρέψης για να ευθυγραμμίσουμε το έγγραφό?
- Πιο γνωστές μέθοδοι υπολογισμού και διόρθωσης στροφής
  - Μετασχηματισμός Hough
  - Ανάλυση Προβολών της Εικόνας
  - Μετασχηματισμός Radon

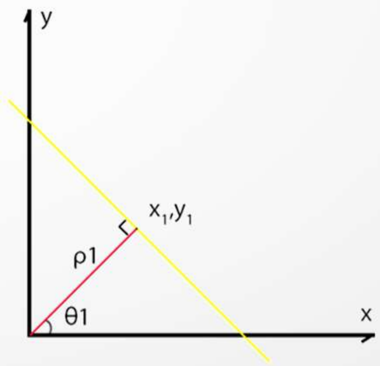

Sing Your Heart Out
Can't dance? Try karaoke, CD-ROM style.


Sing Your Heart Out
Can't dance? Try karaoke, CD-ROM style.

Γεωμετρικοί Μετασχηματισμοί
Μετασχηματισμός Hough

- Ο μετασχηματισμός Hough αντιστοιχίζει τα σημεία μιας ευθείας του επιπέδου της εικόνας σε ένα σημείο (ρ,θ) του επιπέδου Hough (πολικών συντεταγμένων).
- Μια ευθεία του επιπέδου της εικόνας περιγράφεται από την σχέση:

$$\rho = x\ cos\theta + y\ cos\theta$$

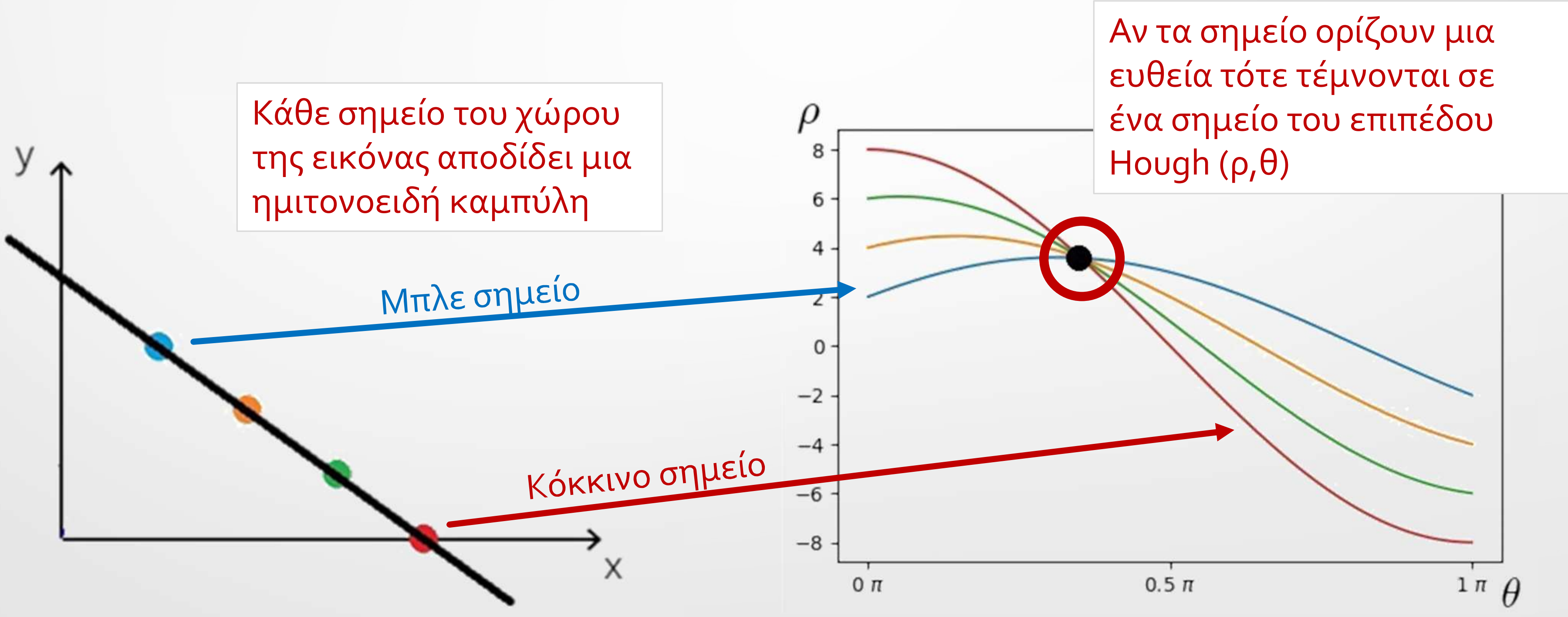


ρ: η κάθετη απόσταση από την αρχή των αξόνων
θ: η γωνία που σχηματίζει η κάθετη στην ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων

Duda, R.D, Hart, P.E: Use of the Hough transform to detect lines and curves in pictures. Commum. ACM 15 (1972) 11-15

Γεωμετρικοί Μετασχηματισμοί

Μετασχηματισμός Hough



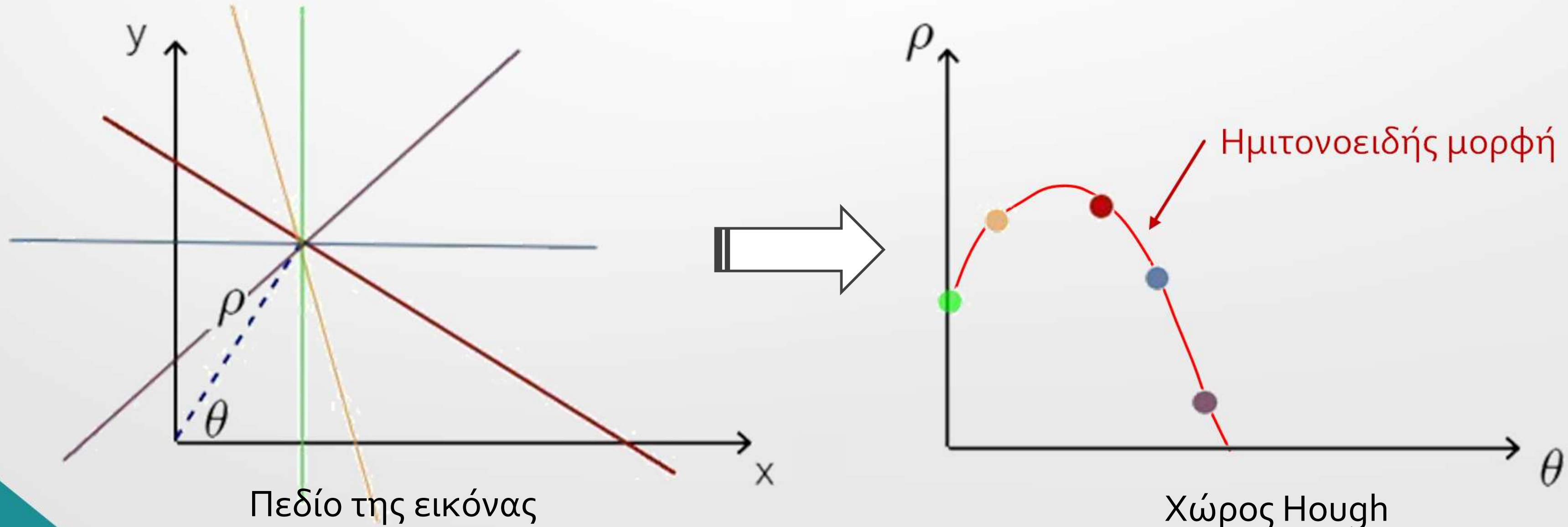
Πεδίο της εικόνας

Χώρος Hough

Γεωμετρικοί Μετασχηματισμοί
Μετασχηματισμός Hough

Υλοποίηση

- Για όλα τα σημεία της εικόνας υπολογίζεται ο μετασχηματισμός Hough όλων των ευθειών που διέρχονται από αυτά



Πεδίο της εικόνας

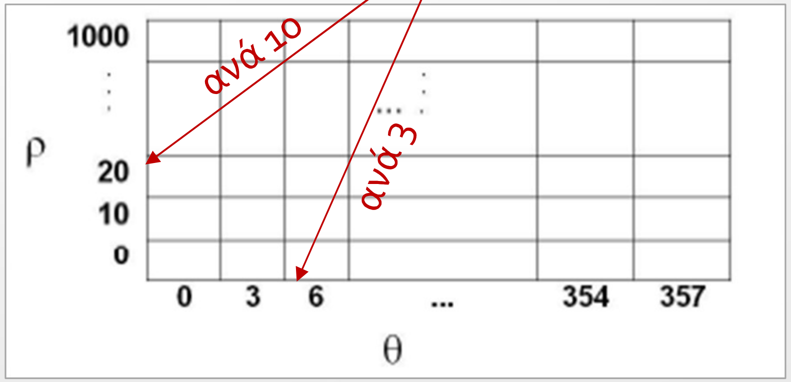
Χώρος Hough

Γεωμετρικοί Μετασχηματισμοί

Μετασχηματισμός Hough

- Όλα τα εξαγόμενα ζευγάρια τιμών (ρ,θ) αποθηκεύονται σε ένα πίνακα συσσώρευσης
- Σε κάθε κελί καταχωρείται η συχνότητα εμφάνισης του ζεύγους τιμών
- Τα κελιά που έχουν τις μεγαλύτερες τιμές αντιστοιχούν και στις επικρατέστερες στρέψεις της εικόνας

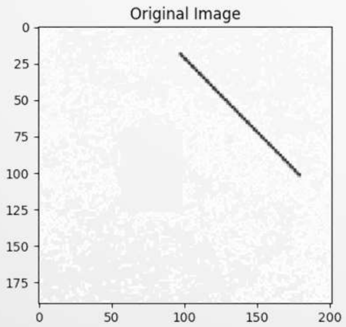
Πρέπει να οριστεί και η κβάντιση των τιμών των ρ και θ



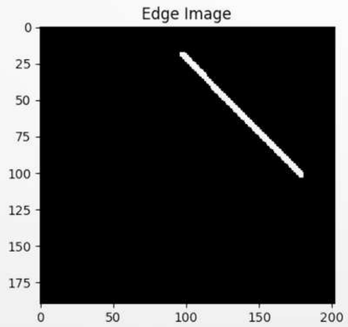
Πίνακας Συσσώρευσης

Γεωμετρικοί Μετασχηματισμοί

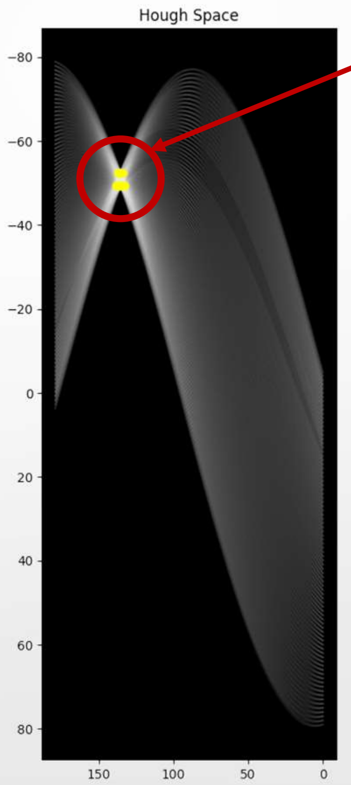
Μετασχηματισμός Hough



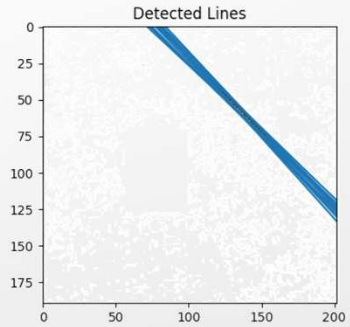
Αρχική Εικόνας



Δυαδική εικόνας Ακμών



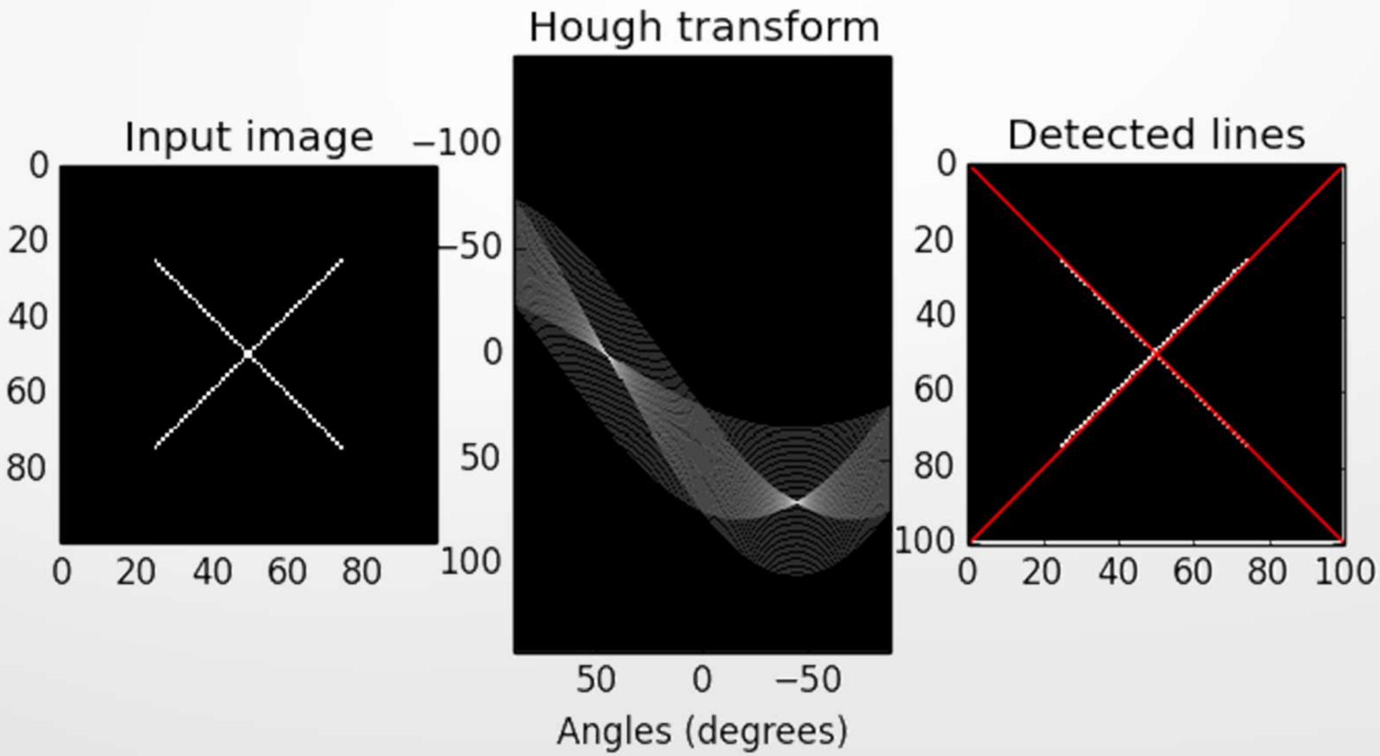
Σημείο Τομής



Εντοπισμένες Ευθείες

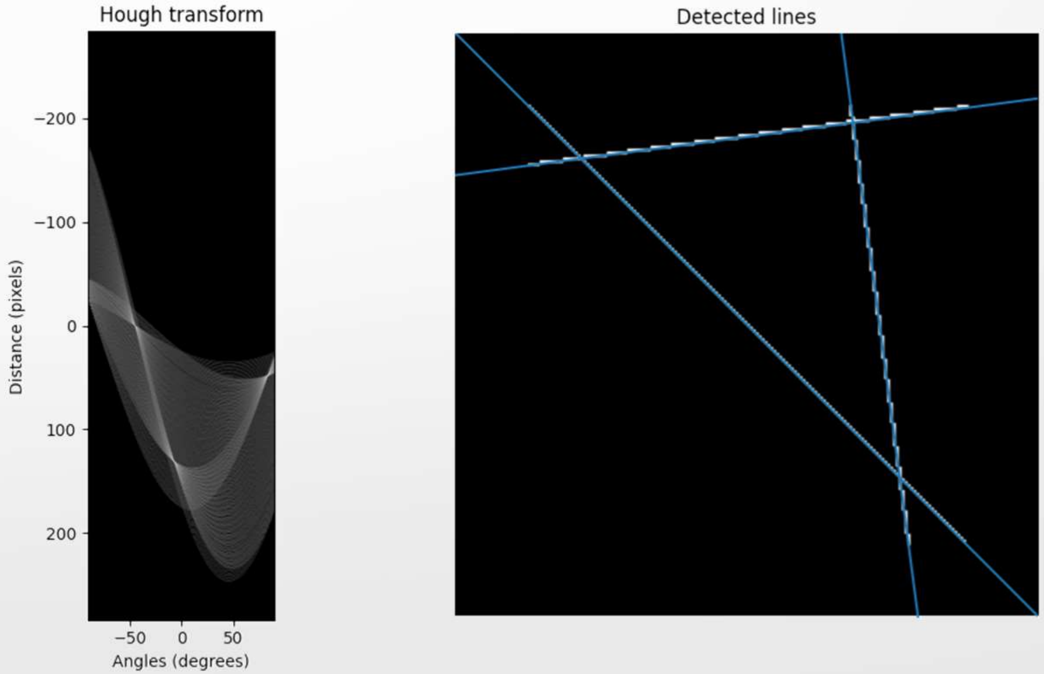
Γεωμετρικοί Μετασχηματισμοί

Μετασχηματισμός Hough



Γεωμετρικοί Μετασχηματισμοί

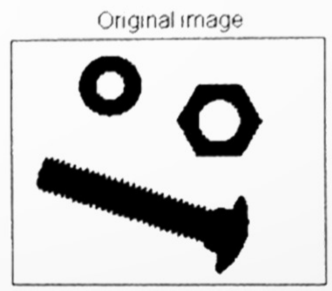
Μετασχηματισμός Hough

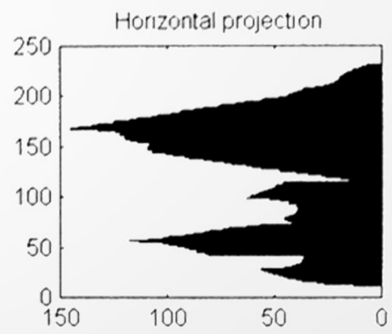


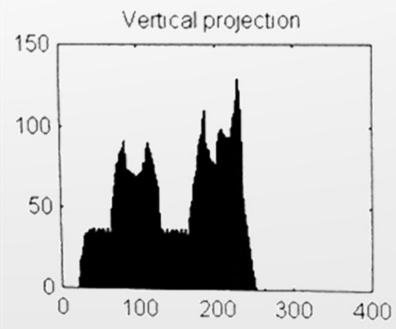
Γεωμετρικοί Μετασχηματισμοί

Ανάλυση Προβολών

- Σε κάθε δυαδική εικόνα μπορούμε να υπολογίσουμε την κάθετη και την οριζόντια προβολή της (προφίλ ή ιστόγραμμα προβολών)
- Είναι το άθροισμα των φωτεινοτήτων (συχνότητα εμφάνισης) σε κάθε στήλη ή γραμμή αντιστοίχως
- Στην ουσία είναι ο αριθμός των εικονοστοιχείων που ανήκουν στα αντικείμενα σε κάθε στήλη και κάθε γραμμή







$$H[i] = \sum_{j=1}^{M} B[i,j]$$

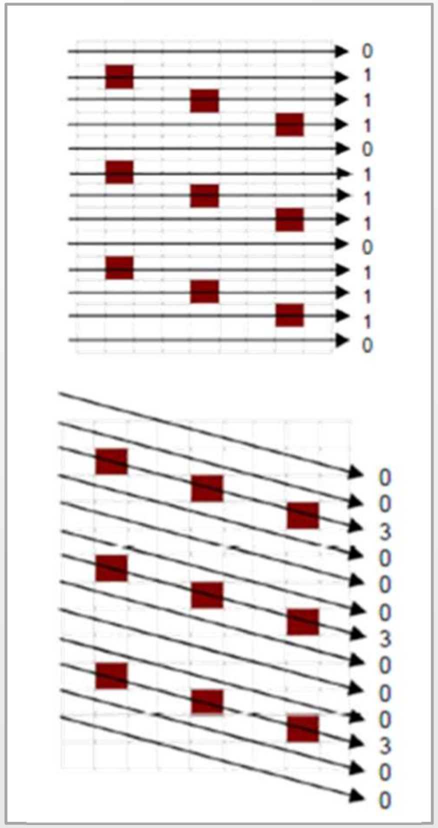
$$V[i] = \sum_{i=1}^{N} B[i,j]$$

Γεωμετρικοί Μετασχηματισμοί
Ανάλυση Προβολών

- Δύναται να υπολογιστούν οι προβολές και σε άλλες κατευθύνσεις
- Οι συμμετρίες της κάθε εικόνας μπορούν να καθορίσουν τον τρόπο με τον οποίο προσδιορίζεται μια ανεπιθύμητη στρέψη στην εικόνα
- Οι προβολές είναι μονοδιάστατα σήματα τα οποία μπορούμε να επεξεργαστούμε με κλασικές τεχνικές ΨΕΣ (Ψηφιακής Επεξεργασίας Εικόνας)

$$A(\theta) = \sum_{i=1}^{m} c_i^2(\theta)$$

Υπολογισμός Ενέργειας του σήματος των προβολών



Γεωμετρικοί Μετασχηματισμοί
Ανάλυση Προβολών

Παράδειγμα

- Η εξαγωγή της οριζόντιας προβολής σε μια εικόνα κειμένου/ εγγράφου
- Σε μια εικόνα που έχει υποστεί μικρή στρέψη το σήμα της προβολής δεν έχει μεγάλες διακυμάνσεις
- Υπολογίζεται επαναληπτικά η ενέργεια της προβολής για διαφορετικές
- Η γωνία που μεγιστοποιεί την ενέργεια αντιστοιχεί στην γωνία που έχει περιστρέφει το έγγραφο

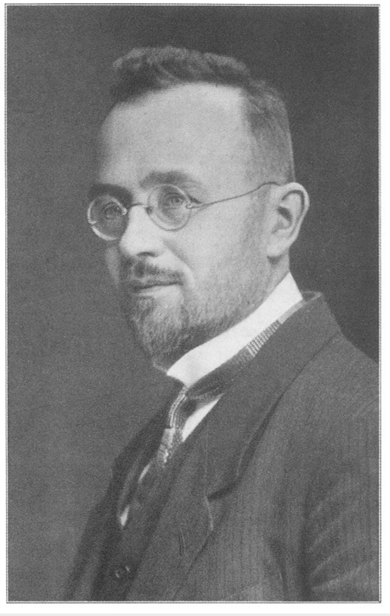
Γεωμετρικοί Μετασχηματισμοί

Μετασχηματισμός Radon

- Επιτρέπει τον προσδιορισμό της προβολής διδιάσταστης συνάρτησης f(x,y) σε συγκεκριμένη διεύθυνση
- Είναι ένας γενικευμένος μετασχηματισμός όπως ακριβώς ο μετασχηματισμός Fourier

- Διαφορετικές Μορφές
  - Γραμμικός
  - Κυκλικός
  - Γενικευμένος

- Ιδιότητες
  - Γραμμικός
  - Συμμετρία
  - Χωρική Μετατόπιση



Johan Radon
Αυστρία 1887-1956

Γεωμετρικοί Μετασχηματισμοί

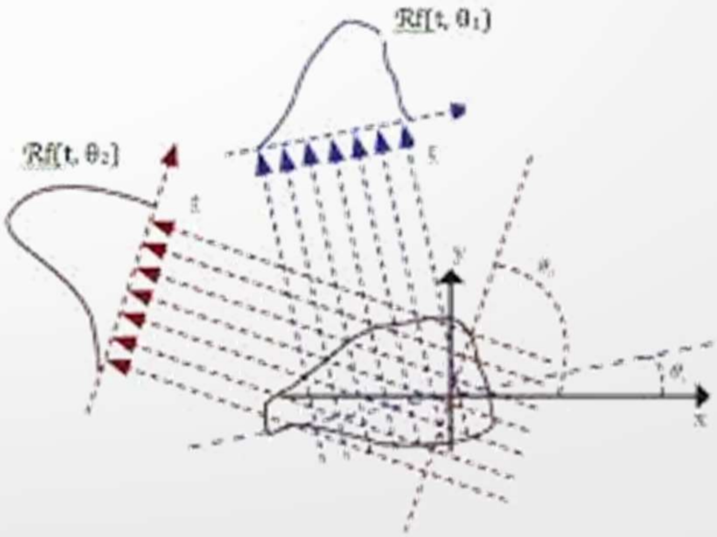
Μετασχηματισμός Radon

Μαθηματική Έκφραση (συνεχής περίπτωση)

$$\mathcal{R}f \equiv p(\rho,\theta) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\boxed{\delta(x\cos\theta + y\sin\theta - \rho)}dxdy$$

Η χωρική συνάρτηση. Στην περίπτωση της εικόνας η φωτεινότητες σε κάθε θέση της εικόνας

Κρουστική συνάρτηση η οποία διατηρεί μη μηδενικές τιμές σε κάθε μια από τις διευθύνσεις



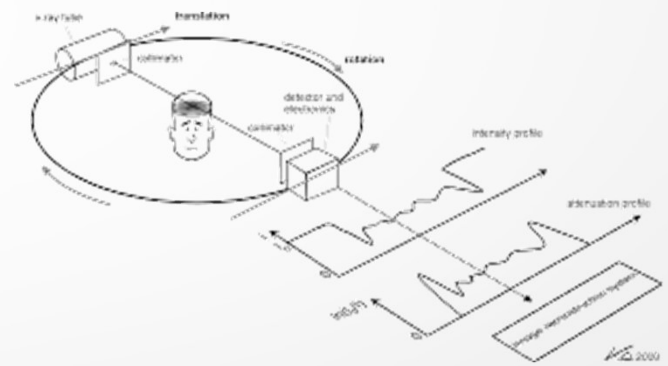
Ολοκληρώνει τις προβολές σε όλες τις διευθύνσεις

Γεωμετρικοί Μετασχηματισμοί

Μετασχηματισμός Radon

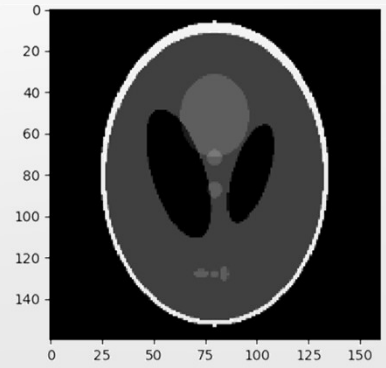
Εφόσον μπορεί να αντιστραφεί είναι δυνατόν από την καταγραφή προβολών να ανακατασκευαστεί το πεδίο της εικόνας

CT

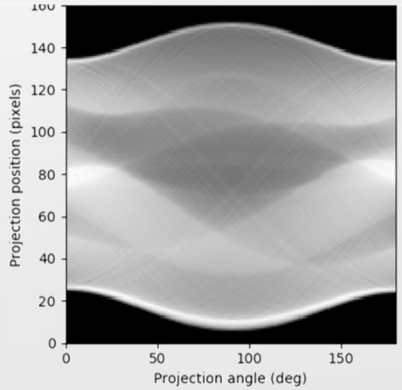


Εφαρμογές

- Τομογραφία & βιοϊατρικές εφαρμογές
- Γενικά ψηφιακή επεξεργασία εικόνας
- Ανάλυση & επαναδημιουργία εικόνων από επιμέρους προβολές, τριδιάστατες εικόνες οργάνων



Shepp-Logan Ghost

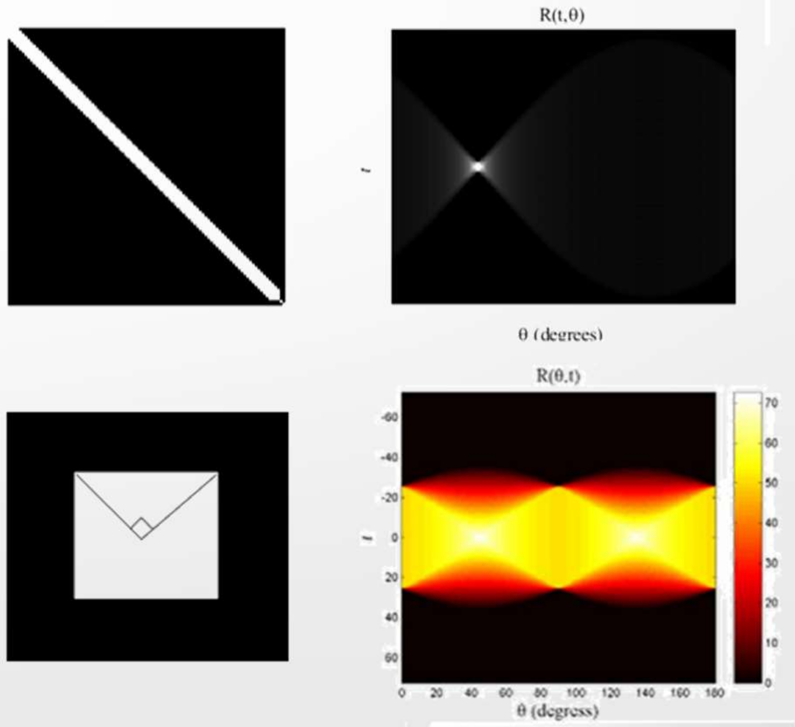


Συνόγραμμα

Γεωμετρικοί Μετασχηματισμοί

Μετασχηματισμός Radon

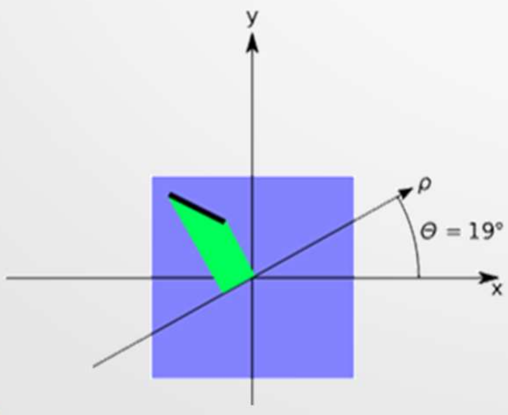
- Στις απλές περιπτώσεις και ο μετασχηματισμός Radon αντιστοιχίζει της ευθείες στο πεδίο της εικόνας με σημεία στο πεδίο *R*
- Έτσι μπορεί να χρησιμοποιηθεί όπως ο μετασχηματισμός hough για τον εντοπισμός ευθειών, κύκλων κ.ο.κ

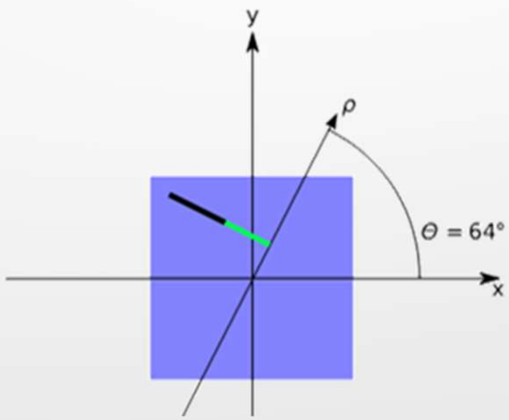


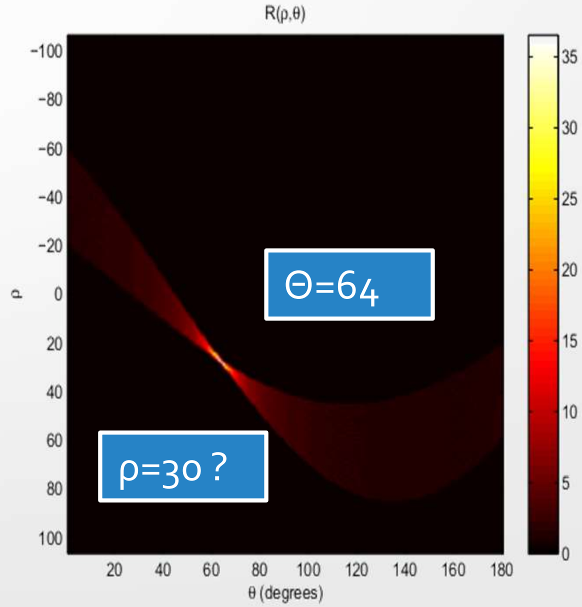
Γεωμετρικοί Μετασχηματισμοί

Μετασχηματισμός Radon

- Καθώς ο μετασχηματισμός ολοκληρώνει την κάθε μια όλες τις κατευθύνσεις δύναται στον χώρο R να βρεθούν επικρατούσες κατευθύνσεις της εικόνας







Βιβλιογραφία

- Οι διαφάνειες βασίζονται στο υλικό του Καθηγητή κ. Ν. Βασιλά για το μάθημα «Επεξεργασία Εικόνας», ακαδημ. έτος 2017-2018, Πανεπιστήμιο Δυτικής Αττικής.
- Βιβλίο Αναγνωστόπουλος