

Βελτιστοποίηση

Μερικές Εισαγωγικές Έννοιες

Γενικά, για κάποιο πρόβλημα, η βελτιστοποίηση αναφέρεται στην αναζήτηση της «καλύτερης» από όλες τις δυνατές λύσεις που επιδέχεται το εν λόγω πρόβλημα. Αν δεχτούμε ότι ένα πρόβλημα είναι δυνατό να περιγραφεί μαθηματικά, δηλ. να μοντελοποιηθεί, με μία συνάρτηση τότε η βελτιστοποίηση συνίσταται στη βελτιστοποίηση της εν λόγω συνάρτησης. Έτσι, ως βελτιστοποίηση χαρακτηρίζεται η διαδικασία εύρεσης εκείνης της τιμής από το πεδίο ορισμού της συνάρτησης στην οποία η συνάρτηση εμφανίζει ολικό (ή τοπικό) μέγιστο ή ελάχιστο. Στην απλούστερη περίπτωση ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης συνίσταται στη μεγιστοποίηση ή στην ελαχιστοποίηση μιας πραγματικής συνάρτησης. Θεωρητικά, αυτό μπορεί να επιτευχθεί με συστηματική επιλογή τιμών για την ανεξάρτητη ή τις ανεξάρτητες μεταβλητές από ένα σύνολο επιτρεπτών τιμών και τον υπολογισμό των αντίστοιχων τιμών της συνάρτησης από τις οποίες επιλέγεται η βέλτιστη (μέγιστη ή ελάχιστη).

Στη συνέχεια θα αναφερθούμε με προβλήματα των οποίων η βελτιστοποίηση αφορά στη μεγιστοποίηση ή στην ελαχιστοποίηση μιας συνάρτησης η οποία ονομάζεται αντικειμενική συνάρτηση. Έτσι, ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης μπορεί να διατυπωθεί ως εξής.

Δεδομένης της πραγματικής συνάρτησης $f: A \rightarrow R$, από κάποιο σύνολο $A \subseteq R^n$, προς το σύνολο των πραγματικών αριθμών, ζητείται να βρεθεί στοιχείο $x_0 \in A$ τέτοιο ώστε:

- είτε $f(x) \leq f(x_0)$, $\forall x \in A$ αν πρόκειται για ένα πρόβλημα μεγιστοποίησης,
- είτε $f(x) \geq f(x_0)$, $\forall x \in A$ αν πρόκειται για ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης.

Συνήθεις ονομασίες για τη συνάρτηση f είναι:

- αντικειμενική συνάρτηση (objective function) ή συνάρτηση κόστους (cost function) αν το πρόβλημα αφορά ελαχιστοποίηση, και
- συνάρτηση χρησιμότητας (utility function) ή ακόμη συνάρτηση ενέργειας (energy function) αν το πρόβλημα αφορά μεγιστοποίηση.

Συνήθως για το πεδίο ορισμού της αντικειμενικής συνάρτησης ισχύει ότι $A \subseteq R^n$, και το A καθορίζεται από ένα σύνολο περιορισμών τους οποίους απαιτείται να ικανοποιούν τα στοιχεία του. Το σύνολο A ονομάζεται και χώρος αναζήτησης (search space), ή ακόμη εφικτή περιοχή (feasible region), τα δε στοιχεία του ονομάζονται υποψήφιες λύσεις (candidate solutions) ή ακόμη εφικτές λύσεις (feasible solutions).

Τέλος, μια εφικτή λύση η οποία ελαχιστοποιεί ή μεγιστοποιεί την αντικειμενική συνάρτηση ονομάζεται βέλτιστη λύση ενώ το σημείο του πεδίου ορισμού της

αντικειμενικής συνάρτησης στο οποίο παίρνει τη βέλτιστη τιμή ονομάζεται βελτιστοποιητής (optimizer) δηλ. ελαχιστοποιητής (minimizer) ή μεγιστοποιητής (maximizer). Στην πλέον συνήθη μορφή του ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης αφορά στην ελαχιστοποίηση μιας αντικειμενικής συνάρτησης. Η διατύπωση ενός προβλήματος βελτιστοποίησης συνήθως ακολουθεί τον εξής φορμαλισμό:

Για ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης

$$\min_{x \in A} f(x)$$

Για ένα πρόβλημα μεγιστοποίησης

$$\max_{x \in A} f(x)$$

Όταν το πρόβλημα εστιάζει στην εύρεση του βελτιστοποιητή τότε η διατύπωση είναι:

Για ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης

$$\arg \min_{x \in A} f(x)$$

Για ένα πρόβλημα μεγιστοποίησης

$$\arg \max_{x \in A} f(x)$$

Πολλά πραγματικά προβλήματα αλλά και θεωρητικά ζητήματα είναι δυνατό να μοντελοποιηθούν μέσα στα πλαίσια της διατύπωσης αυτής. Για παράδειγμα προβλήματα από τη φυσική, τη χημεία, τα οικονομικά, τη μηχανική κλπ. αναφέρονται στη βελτιστοποίηση κάποιας συνάρτησης ενέργειας η οποία είναι η ενέργεια του συστήματος.

Γενικά, εκτός από ιδιαίτερες περιπτώσεις όπου η αντικειμενική συνάρτηση είναι κυρτή (convex), σε ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης μπορεί να υπάρχουν πολλά τοπικά ελάχιστα (ή μέγιστα), όπου ένα τοπικό ελάχιστο (ή μέγιστο) x^* είναι ένα σημείο του πεδίου ορισμού της αντικειμενικής συνάρτησης για το οποίο, υπάρχει ένα $\delta > 0$ τέτοιο ώστε,

$$\forall x \in A, \text{ τέτοιο ώστε } \|x - x^*\| \leq \delta, \text{ να ισχύει}$$

$$f(x^*) \leq f(x) \text{ για το ελάχιστο ή } f(x^*) \geq f(x) \text{ για το μέγιστο.}$$

Δηλαδή, οι τιμές της f για όλα τα σημεία x που βρίσκονται σε μια περιοχή του x^* είναι μεγαλύτερες (ή μικρότερες) από την τιμή της f στο x^* , δηλαδή το $f(x^*)$. Αν οι προηγούμενες ανισότητες ισχύουν για όλα τα σημεία x του πεδίου ορισμού της f τότε το x^* είναι ολικό ελάχιστο (ή ολικό μέγιστο) ή απλά βέλτιστο.

Στη γενική περίπτωση, η διαδικασία βελτιστοποίησης περιλαμβάνει έναν αλγόριθμο αναζήτησης της βέλτιστης τιμής κάποιας αντικειμενικής συνάρτησης ή/και του στοιχείου του πεδίου ορισμού της αντικειμενικής συνάρτησης στο οποίο η συνάρτηση έχει βέλτιστη τιμή. Αξίζει να σημειωθεί εδώ ότι, σε πολλές περιπτώσεις ενδέχεται η συνάρτηση να παρουσιάζει βέλτιστη τιμή σε περισσότερα από ένα σημεία του πεδίου ορισμού. Στις περιπτώσεις αυτές, ανάλογα με το πρόβλημα, άλλοτε μας ενδιαφέρει η εύρεση μιας οποιασδήποτε βέλτιστης τιμής ή μιας βέλτιστης τιμής με συγκεκριμένα χαρακτηριστικά και άλλες φορές η εύρεση όλων των βέλτιστων τιμών.

Ένας αλγόριθμος βελτιστοποίησης είναι ο αλγόριθμος καθορισμού του ελαχίστου (ή του μεγίστου) $f(x^*)$ μιας αντικειμενικής συνάρτησης. Η πλέον γνωστή περίπτωση βελτιστοποίησης αφορά στην εύρεση του ελαχίστου μιας κυρτής συνάρτησης. Στην περίπτωση αυτή ο αλγόριθμος συνίσταται στην εύρεση της ρίζας της πρώτης παραγώγου της αντικειμενική συνάρτησης. Ως γνωστό, στο σημείο που μηδενίζεται η πρώτη παράγωγος της η αντικειμενική συνάρτηση παρουσιάζει ακρότατο (ελάχιστο).

Παραδείγματα:

1. Να λυθεί το πρόβλημα: $\min(x^2 + 1), x \in R$

Στο πρόβλημα αυτό το ελάχιστο της αντικειμενικής συνάρτησης είναι 1 και επιτυγχάνεται για $x = 0$.

2. Να λυθεί το πρόβλημα: $\max(2x), x \in R$

Στο πρόβλημα αυτό το μέγιστο της αντικειμενικής συνάρτησης δεν υπάρχει στους πραγματικούς αριθμούς.

3. Να λυθεί το πρόβλημα: $\arg \min(x^2 + 1), x \in (-\infty, -1]$

Στο σύνολο των πραγματικών αριθμών, η σχέση $x^2 + 1$ ελαχιστοποιείται για $x = 0$, ενώ για το συγκεκριμένο πεδίο ορισμού για $x = -1$. Κατά συνέπεια η ζητούμενη τιμή είναι $x = -1$.

Ένας σημαντικός αριθμός αλγορίθμων που προτείνονται για την επίλυση μη κυρτών προβλημάτων βελτιστοποίησης δεν είναι ικανοί να διαφοροποιήσουν ένα τοπικό ελάχιστο (ή μέγιστο) από ένα ολικό ελάχιστο (ή μέγιστο), δηλαδή αυτό που ονομάζεται, μιά αυστηρά βέλτιστη λύση. Έτσι κατά τη διαδικασία εξερεύνησης του χώρου των εφικτών λύσεων το πρώτο σημείο που θα εντοπίσουν θα το θεωρήσουν ως τη βέλτιστη λύση του προβλήματος.

Ο κλάδος των εφαρμοσμένων μαθηματικών που αφορά στην ανάπτυξη ντετερμινιστικών αλγορίθμων που είναι ικανοί να συγκλίνουν σε πεπερασμένο χρόνο στη βέλτιστη λύση ενός προβλήματος βελτιστοποίησης ονομάζεται καθολική βελτιστοποίηση (global optimization).

Βελτιστοποίηση με Σμήνος Σωματιδίων (Particle Swarm Optimization)

Η μέθοδος βελτιστοποίησης αυτή προτάθηκε από τους Kennedy και Eberhart στην εργασία τους:

Kennedy, J. & Eberhart, R. C., 1995, "Particle Swarm Optimization." In *Proceedings of the IEEE International Conference on Neural Networks*, Perth, Australia, IEEE Service Center, 12-13.

Η μέθοδος είναι εμπνευσμένη από τη συλλογική, ή αλλιώς την κοινωνική, συμπεριφορά σμηνών πτηνών, ψαριών και εντόμων και τη δυναμική της μετακίνησής τους. Είναι μια ευρετική μέθοδος αναζήτησης της βέλτιστης λύσης που σε αντίθεση με κλασικούς αλγόριθμους βελτιστοποίησης δεν χρησιμοποιεί την έννοια της παραγώγου (gradient) της αντικειμενικής συνάρτησης και εφαρμόζεται κυρίως σε προβλήματα όπου οι μεταβλητές παίρνουν συνεχείς τιμές. Κάποιοι συγγραφείς θεωρούν την τεχνική αυτή ως στοχαστική εξ αιτίας της τεχνικής επιλογής της επόμενης υποψήφιας λύσης χωρίς όμως ο αλγόριθμος να σχετίζεται με καθαρά στοχαστικές τεχνικές όπως η προσομοιούμενη απόσβεση (simulated annealing) ή τεχνικές πολλαπλών εκκινήσεων (multi-start).

Ως προς τις επιδόσεις του ο αλγόριθμος Βελτιστοποίησης με Σμήνος Σωματιδίων (ΒμΣΣ) ή αλλιώς αλγόριθμος PSO είναι συγκρίσιμος με το Γενετικό Αλγόριθμο (Genetic Algorithm) με τον οποίο κατατάσσεται στην κατηγορία των εξελικτικών αλγορίθμων ή ακόμη στους αλγορίθμους που βασίζονται σε πληθυσμό (population based algorithms).

Προτερήματα

- Εύκολη υλοποίηση
- Προσέγγιση αδιάφορη προς την αλλαγή κλίμακας των μεταβλητών
- Δεν κάνει χρήση της έννοιας της παραγώγου και του συνεπαγόμενου υπολογιστικού κόστους
- Χρησιμοποιεί ελάχιστες παραμέτρους
- Χαρακτηρίζεται ως αποτελεσματική μέθοδος για την ολική εξερεύνηση του χώρου των εφικτών λύσεων

Μειονεκτήματα

- Ευρετική προσέγγιση με χρήση αρκετών μη γνωστών παραμέτρων
- Δεν εγγυάται την εύρεση της ολικά βέλτιστης τιμής δεδομένου ότι δεν αποδεικνύεται ντετερμινιστική σύγκλιση αλλά στοχαστική σύγκλιση (convergence in probability)
- Χαμηλές επιδόσεις έως αδυναμία αναζήτησης της βέλτιστης τιμής σε τοπικό επίπεδο
- Απαιτεί μεγάλο αριθμό σωματιδίων σε την περίπτωση προβλημάτων μεγάλων διαστάσεων

Παραδείγματα εφαρμογών

- Ταυτοποίηση της νόσου Parkinson
- Αναγνώριση εικόνας
- Βελτιστοποίηση δικτύων διανομής ηλεκτρικής ενέργειας
- Βιοχημικές διεργασίες
- Ταυτοποίηση βιομηχανικών συστημάτων
- Εκπαίδευση νευρωνικών δικτύων
- Εξαγωγή κανόνων από ασαφή δίκτυα
- κλπ.

Βασικός Αλγόριθμος PSO

Στη συνέχεια παρουσιάζεται η βασική έκδοση του αλγορίθμου, χωρίς κάποια από τις διάφορες βελτιώσεις που έχουν παρουσιαστεί κατά καιρούς από διάφορους συγγραφείς.

Έστω ότι η αντικειμενική συνάρτηση είναι $f: A \rightarrow R$, όπου $A \subseteq R^n$, της οποίας αναζητείται η βέλτιστη τιμή, έστω η ελάχιστη. Ο αλγόριθμος χρησιμοποιεί ως σμήνος ένα σύνολο από m n -διάστατα σημεία που συμβολίζονται με x^i , $i = 1..m$ τα οποία τοποθετούνται σε τυχαίες θέσεις στο πεδίο ορισμού της αντικειμενικής συνάρτησης, δηλ. στο σύνολο A . Σε κάθε επανάληψη ο αλγόριθμος μετακινεί τα σωματίδια προσδιορίζοντας τη νέα θέση τους λαμβάνοντας υπόψη έως εκείνη την επανάληψη, αφενός την καλύτερη θέση του σωματιδίου και αφετέρου τη θέση του σωματιδίου με την καλύτερη επίδοση σε όλο το σμήνος.

Ο όρος καλύτερη θέση για ένα σωματίδιο σημαίνει τη θέση στην οποία το σωματίδιο έχει την καλύτερη τιμή για την αντικειμενική συνάρτηση δηλ. τη μικρότερη ή τη μεγαλύτερη εφικτή τιμή.

Θα παραστήσουμε τις μεταβλητές του αλγορίθμου στην k επανάληψη ως εξής:

- x_k^i η θέση του i σωματιδίου
- v_k^i η ταχύτητα του i σωματιδίου
- p_k^i η καλύτερη γνωστή θέση του i σωματιδίου έως την k επανάληψη
- p_{best}^g η καλύτερη θέση που έχει βρεθεί ένα σωματίδιο από ολόκληρο το σμήνος (έως την k επανάληψη)
- f_{best}^i η καλύτερη γνωστή τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης για το i σωματίδιο έως την k επανάληψη
- f_{best}^g η καλύτερη γνωστή τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης για ολόκληρο το σμήνος (έως την k επανάληψη)

Επί πλέον χρησιμοποιούνται οι ακόλουθες μεταβλητές:

- k_{max} ο μέγιστος αριθμός επαναλήψεων του αλγορίθμου
- v_0^{max} η μέγιστη αρχικά επιτρεπόμενη ταχύτητα των σωματιδίων (ο ρόλος και η χρησιμότητα της δεν φαίνονται στον αλγόριθμο αλλά εξηγούνται στη συνέχεια)
- f_{best}^* η ενδεχόμενα γνωστή βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης

Σημείωση: Η τιμή f_{best}^* δεν είναι πάντα γνωστή και δεν χρησιμοποιείται σε όλες τις εκδόσεις του αλγορίθμου.

Οι θέσεις των σωματιδίων στην $k + 1$ επανάληψη ενημερώνονται σύμφωνα με τη σχέση:

$$x_{k+1}^i = x_k^i + v_{k+1}^i,$$

όπου,

$$v_{k+1}^i = v_k^i + c_1 r_1 (p_k^i - x_k^i) + c_2 r_2 (p_{best}^g - x_k^i).$$

Ο όρος $c_1 r_1 (p_k^i - x_k^i)$ ονομάζεται γνωστική συνιστώσα για το i σωματίδιο, ενώ ο όρος $c_2 r_2 (p_{best}^g - x_k^i)$ ονομάζεται κοινωνική συνιστώσα για το i σωματίδιο.

Επί πλέον ισχύουν τα εξής:

- c_1 είναι ο συντελεστής της γνωστικής συνιστώσας
- c_2 είναι ο συντελεστής της κοινωνικής συνιστώσας
- r_1, r_2 είναι τυχαίοι πραγματικοί αριθμοί στο διάστημα $[0,1]$ οι οποίοι επιλέγονται σε κάθε επανάληψη και καθορίζουν το βαθμό στον οποίο θα ληφθούν υπόψη για τη νέα θέση κάθε σωματιδίου η καλύτερη γνωστή θέση του καθώς και η καλύτερη γνωστή θέση του σμήνους.

// Αρχικοποίηση

1. Ανάθεση τιμών στις παραμέτρους $k_{max}, c_1, c_2, v_0^{max}, f_{best}^*$
2. Τυχαία αρχικοποίηση των θέσεων των σωματιδίων $x_0^i \in A \subseteq R^n, i = 1..p$
3. Τυχαία αρχικοποίηση των ταχυτήτων των σωματιδίων $0 < v_0^i \leq v_0^{max}, i = 1..p$
4. Αρχικοποίηση $k = 0$
5. Για κάθε σωματίδιο $i = 1..m$ αρχικός υπολογισμός της τιμής της αντικειμενικής συνάρτησης $f_k^i = f(x_k^i)$ με βάση τη θέση του.
6. Για κάθε σωματίδιο $i = 1..m$ αρχικοποίηση της καλύτερης θέσης του, p_k^i .
7. Αρχικοποίηση της καλύτερης τιμής f_{best}^g και της καλύτερης θέσης p_{best}^g του σμήνους.
8. $k = k + 1$;
9. Υπολογισμός της συνθήκης τερματισμού

// Επανάληψη

10. Αν η συνθήκη τερματισμού ισχύει τότε τέλος του αλγορίθμου, αλλιώς συνέχεια στο βήμα 11.
11. Για κάθε σωματίδιο $i = 1..m$ του σμήνους εκτέλεσε τα βήματα 11.1 έως 11.5
 - 11.1 Ενημέρωση της ταχύτητας του σωματιδίου v_k^i
 - 11.2 Ενημέρωση της θέσης του σωματιδίου x_k^i
 - 11.3 Υπολογισμός της τιμής της αντικειμενικής συνάρτησης $f_k^i = f(x_k^i)$ με βάση τη θέση του σωματιδίου
 - 11.4 εάν $f_k^i \leq f_{best}^i$ τότε
$$f_{best}^i = f_k^i;$$
$$p_k^i = x_k^i;$$
 - 11.5 εάν $f_k^i \leq f_{best}^g$ τότε
$$f_{best}^g = f_k^i;$$
$$p_{best}^g = x_k^i;$$

12. $k = k + 1$;

13. Υπολογισμός της συνθήκης τερματισμού, Συνέχεια στο βήμα 10.

14. Τέλος αλγορίθμου. Προσδιορίστηκαν, η καλύτερη δυνατή θέση για τα σωματίδια του σμήνους και η βέλτιστη τιμή που αντιστοιχεί στη θέση αυτή.

Ο τερματισμός του αλγορίθμου καθορίζεται από το πρόβλημα. Τυπικά η συνθήκη τερματισμού συντίθεται από τις ακόλουθες δύο βασικές συνθήκες:

a) $k \leq k_{max}$

b) $|f_{best}^g - f_{best}^*| \leq \varepsilon$, όπου ε ένας πολύ μικρός θετικός αριθμός π.χ. ($\varepsilon = 0.001$)

Σγόλιο

Ένα σωματίδιο του σμήνους του οποίου η θέση υπολογίζεται σύμφωνα με τις προηγούμενες σχέσεις από τον αλγόριθμο υπάρχει σοβαρός κίνδυνος να «εκτροχιαστεί» αν δεν περιοριστεί. Γιά το λόγο αυτό έχουν προταθεί διάφορες προσεγγίσεις εκ των οποίων οι επικρατέστερες είναι οι ακόλουθες:

– Μέγιστη ταχύτητα

Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή μετά τον υπολογισμό των ταχυτήτων η ταχύτητα κάθε σωματιδίου συγκρίνεται με μία προκαθορισμένη μέγιστη ταχύτητα v^{max} σύμφωνα με την ακόλουθη λογική:

εάν $v_k^i > v^{max}$ τότε

$$v_k^i = v^{max};$$

εάν $v_k^i < -v^{max}$ τότε

$$v_k^i = -v^{max};$$

Να σημειωθεί ότι η τιμή της μέγιστης ταχύτητας είναι δυνατό να αλλάζει κατά την εκτέλεση του αλγορίθμου.

– Αδρανειακό βάρος (inertia weight)

Το αδρανειακό βάρος είναι ένας συντελεστής που πολλαπλασιάζει την τιμή της ταχύτητας του σωματιδίου κατά την προηγούμενη επανάληψη σε μία προσπάθεια να τη διατηρήσει, λειτουργώντας έτσι με τρόπο ανάλογο της αδράνειας. Η σχέση υπολογισμού της ταχύτητας των σωματιδίων παίρνει τη μορφή:

$$v_{k+1}^i = w^i v_k^i + c_1 r_1 (p_k^i - x_k^i) + c_2 r_2 (p_{best}^g - x_k^i)$$

– Παράγοντας σύσφιγξης (constriction factor)

Πρόκειται γιά ένα παράγοντα αντίστοιχο με το αδρανειακό βάρος ο οποίος όμως εφαρμόζεται στο σύνολο των όρων που συνθέτουν τη συνισταμένη ταχύτητα ενός

σωματιδίου σε κάθε επανάληψη. Συγκεκριμένα η σχέση υπολογισμού της ταχύτητας των σωματιδίων παίρνει τη μορφή:

$$v_{k+1}^i = X(v_k^i + c_1 r_1 (p_k^i - x_k^i) + c_2 r_2 (p_{best}^g - x_k^i))$$

Είναι προφανές ότι η μέθοδος του αδρανειακού βάρους και η μέθοδος που χρησιμοποιεί τον παράγοντα σύσφιγξης είναι ισοδύναμες.

Δυαδικά Σμήνη Σωματιδίων (Binary Particle Swarms)

Μια εκδοχή της μεθόδου PSO είναι αυτή στην οποία ισχύει ότι οι θέσεις των σωματιδίων είναι οι κορυφές υπερ-κύβου στις n διαστάσεις. Αν και οι μεταβλητές που αφορούν τις ταχύτητες των σωματιδίων του σμήνους είναι συνεχείς αλλά περιορισμένες στο διάστημα $[0,1]$ και οι μεταβλητές p_k^i και p_{best}^g υπολογίζονται όπως και στα σμήνη σωματιδίων με συνεχείς τιμές, εν τούτοις οι θέσεις των σωματιδίων είναι σημεία του συνόλου $A = \{0,1\}^n$. Έτσι η αντικειμενική συνάρτηση έχει τη μορφή $f: \{0,1\}^n \rightarrow R$.

Για τον υπολογισμό των θέσεων των σωματιδίων χρησιμοποιείται ο ίδιος αλγόριθμος με τις αναγκαίες τροποποιήσεις. Η βασική διαφορά έγκειται στο ότι οι ταχύτητες υπολογίζονται όπως και στα σμήνη με συνεχείς τιμές αλλά ορίζονται με όρους πιθανοτήτων. Έτσι η ταχύτητα u_{k+1}^i του i σωματιδίου ορίζεται στο διάστημα $[0,1]$ μέσω μιας διαδικασίας αναγωγής ή αλλιώς κανονικοποίησης η οποία συντελείται με χρήση της γνωστής σιγμοειδούς συνάρτησης:

$$u_{k+1}^i = \text{sigmoid}(v_{k+1}^i) = \frac{1}{1 + e^{-v_{k+1}^i}},$$

όπου βέβαια η τιμή της v_{k+1}^i υπολογίζεται με χρήση της γνωστής, από την προηγούμενη παράγραφο, σχέσης.

Τέλος οι νέες θέσεις των σωματιδίων υπολογίζονται ως εξής,

$$x_{k+1}^i = \begin{cases} 1 & \text{αν } r_{ij} < u_{k+1}^i \\ 0 & \text{αν } r_{ij} \geq u_{k+1}^i \end{cases}$$

όπου $u_{k+1}^i = \text{sigmoid}(v_{k+1}^i)$ και r_{ij} είναι ένας αριθμός που έχει επιλεγεί τυχαία με ομοιόμορφη κατανομή από το διάστημα $[0,1]$.

Σχόλια

Στη δυαδική εκδοχή του αλγορίθμου εκτός από την ερμηνεία της ταχύτητας που αλλάζει σε σχέση με τη συνεχή εκδοχή διαφορετικός είναι και ο ρόλος του αδρανειακού βάρους ή του συντελεστή σύσφιγξης. Το αποτέλεσμα των συντελεστών αυτών είναι αντίθετο από εκείνο στη συνεχή εκδοχή.

Επί πλέον στη συνεχή εκδοχή μεγάλες τιμές για την ταχύτητα ή τη μέγιστη ταχύτητα ενισχύουν την αναζήτηση. Αντίθετα στη δυαδική PSO μικρές τιμές της μέγιστης ταχύτητας προωθούν την αναζήτηση και αν η μέγιστη ταχύτητα είναι μηδέν τότε η αναζήτηση είναι καθαρά τυχαία (στοχαστική).