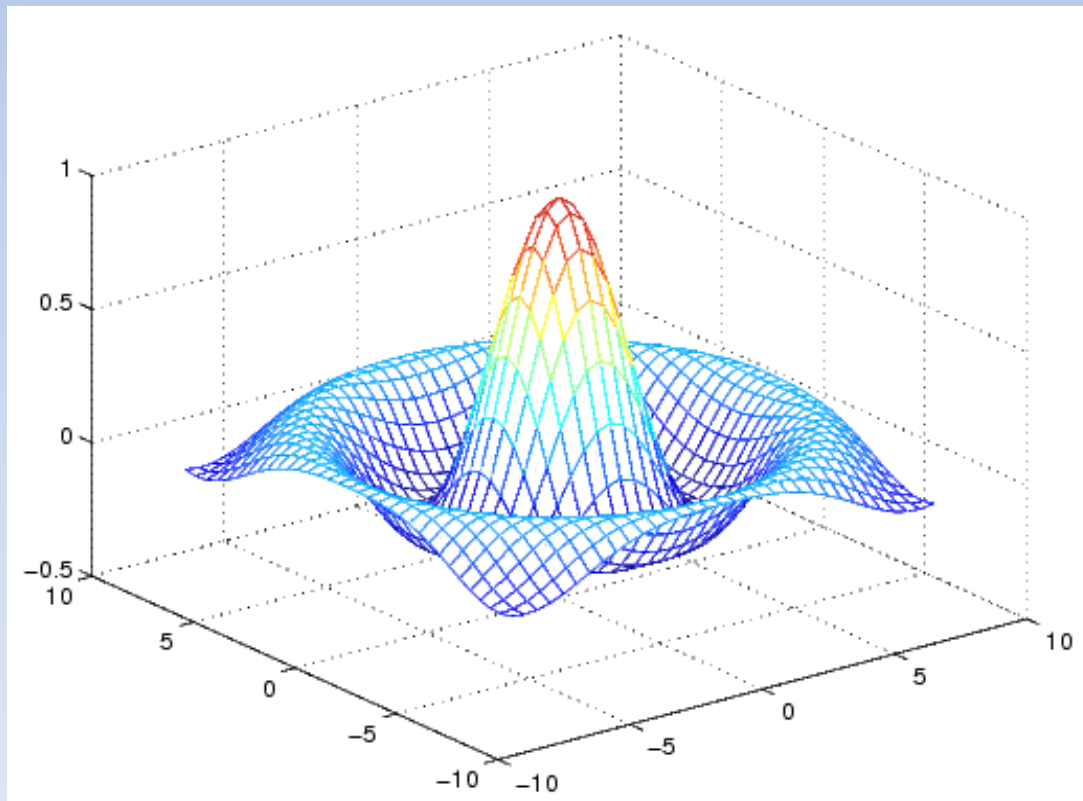


ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

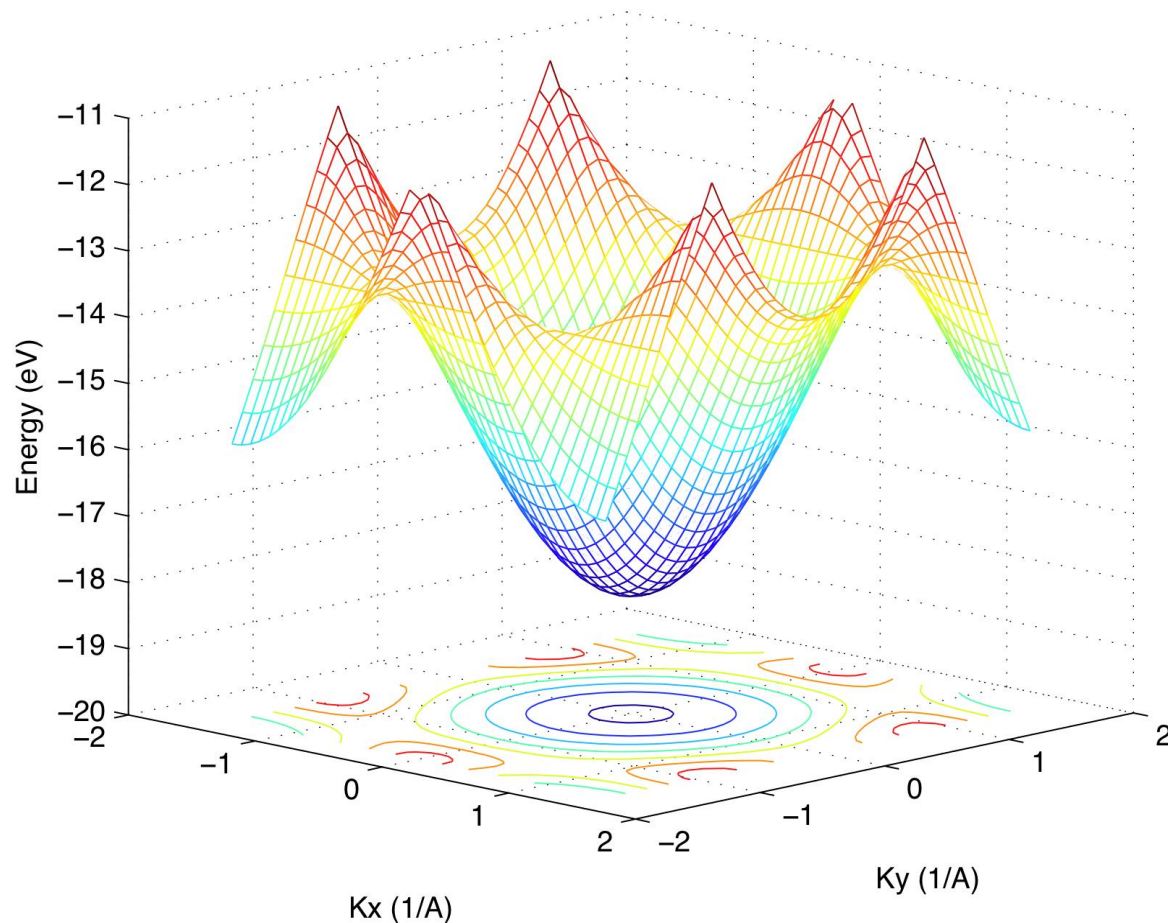
- Συναρτήσεις της μορφής $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$
- Συνάρτηση δύο μεταβλητών $z = f(x, y)$
- Γραφική παράσταση



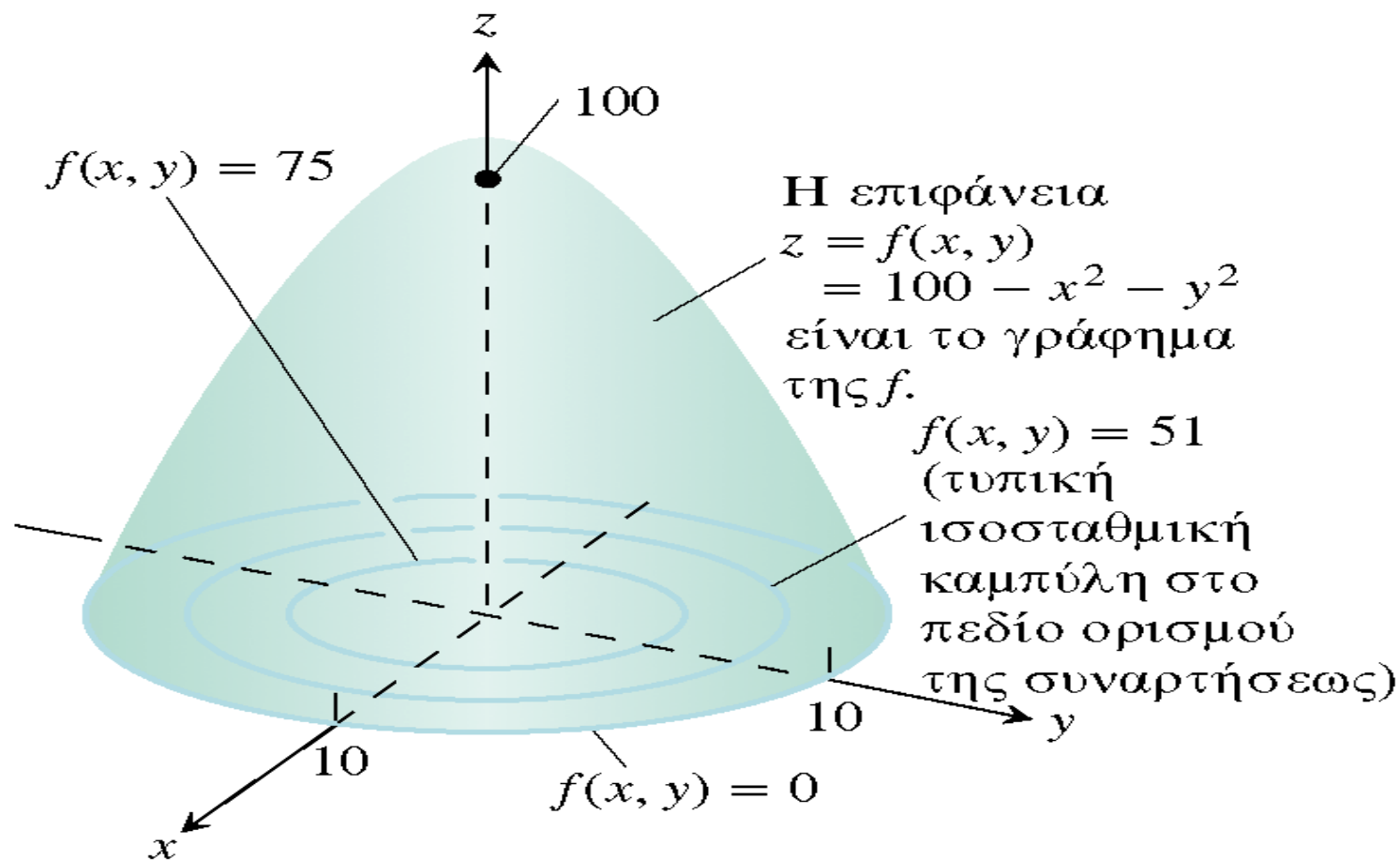
ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

- Γραφική παράσταση και Ισοσταθμικές καμπύλες $f(x,y)=c$

$$E(k_x, k_y) = -11 - 2.4 \sqrt{3 + 4 \cos(2.1k_x) \cos(1.2k_y) + 2 \cos(2.5k_y)}$$

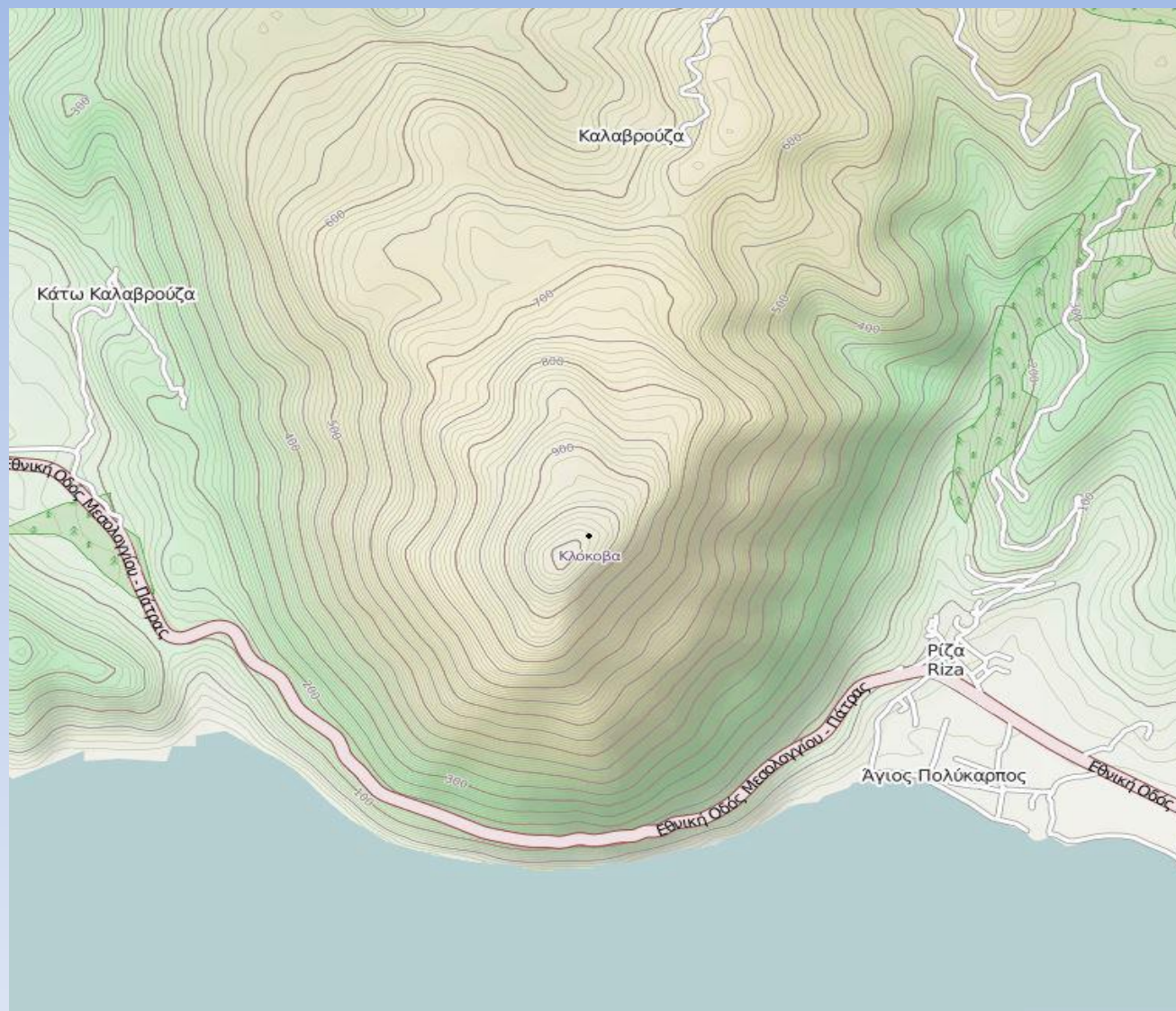


ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ



ΣΧΗΜΑ 11.4 Γραφική παράσταση της $f(x, y) = 100 - x^2 - y^2$ και μερικές ισοσταθμικές καμπύλες της (Παράδειγμα 4)

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

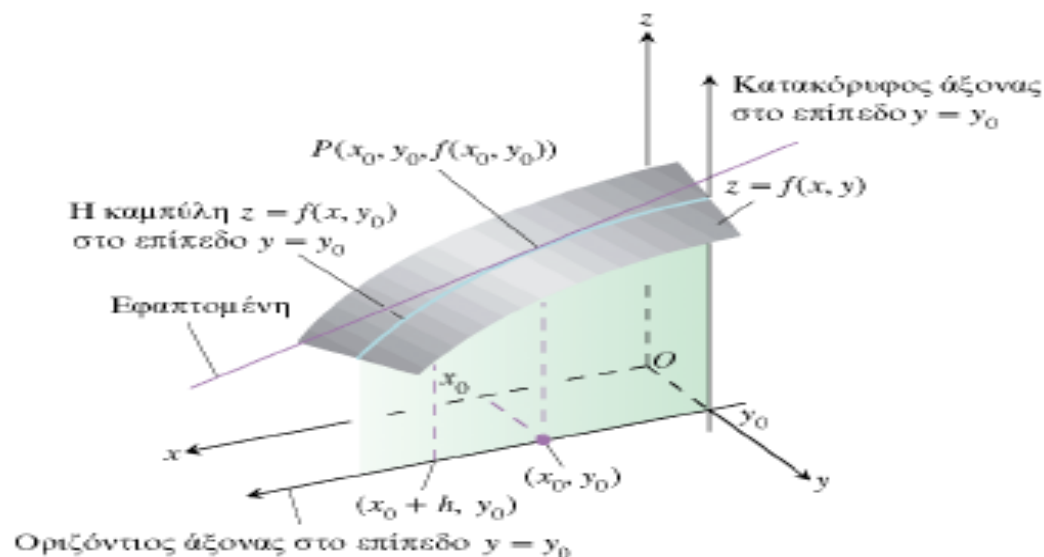


ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

Παράγωγοι συναρτήσεων πολλών μεταβλητών

Μερική παράγωγος ως προς x

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = f_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$



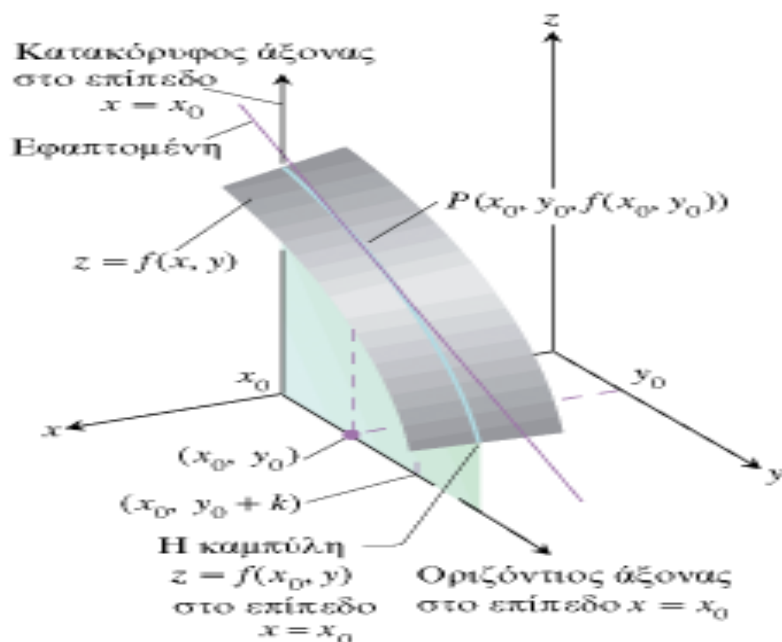
ΣΧΗΜΑ 11.13 Τομή του επιπέδου $y = y_0$ με την επιφάνεια $z = f(x, y)$, όπως φαίνεται από σημείο πάνω από το πρώτο τεταρτημόριο του επιπέδου xy .

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

Παράγωγοι συναρτήσεων πολλών μεταβλητών

Μερική παράγωγος ως προς y

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = f_y = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$



ΣΧΗΜΑ 11.14 Η τομή του επιπέδου $x = x_0$ με την επιφάνεια $z = f(x, y)$, όπως φαίνεται από σημείο πάνω από το πρώτο τεταρτημόριο του επιπέδου xy .

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

Παράγωγοι συναρτήσεων πολλών μεταβλητών

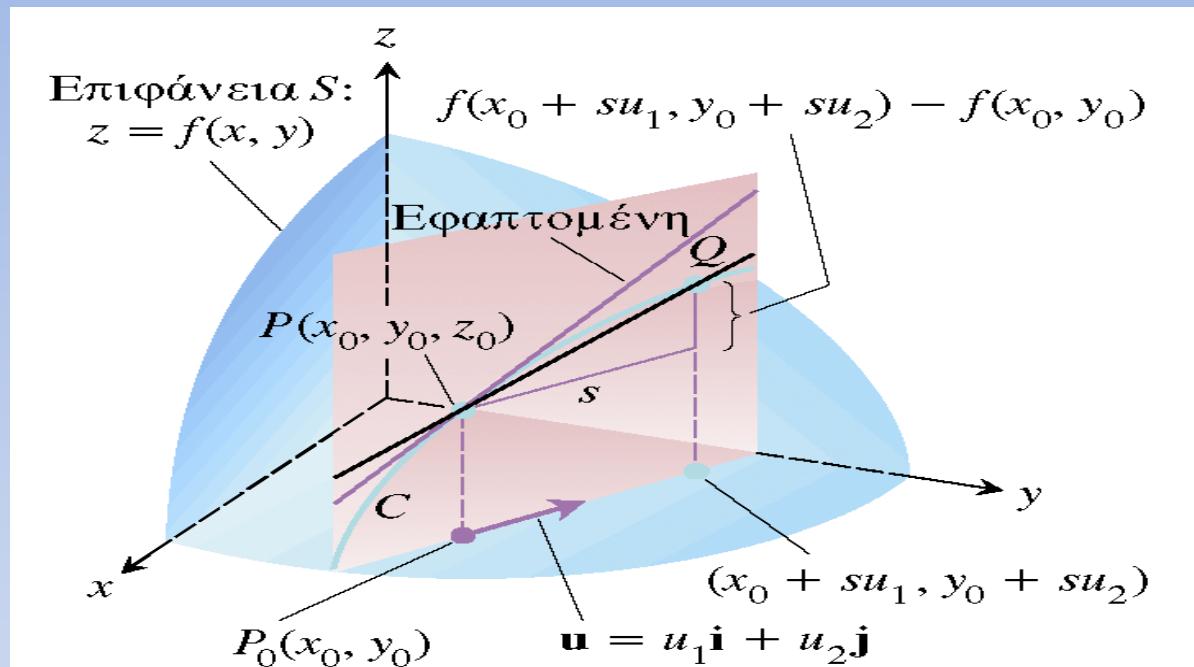
- Για να υπολογιστεί η μερική παράγωγος ως προς x μιας συνάρτησης δύο μεταβλητών $f(x,y)$, θεωρούμε το y σαν σταθερά και παραγωγίζουμε την συνάρτηση ως προς x σαν να ήταν συνάρτηση μιας μεταβλητής.

Παρόμοια υπολογίζεται η μερική παράγωγος ως προς y .

Παράδειγμα: Να υπολογιστούν οι μερικές παράγωγοι της $f(x,y) = x \cos(y) + y e^x$

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

Παράγωγος κατά κατεύθυνση (ή κατευθυνόμενη παράγωγος)



ΣΧΗΜΑ 11.27 Η κλίση της καμπύλης C στο P_0 είναι

$$\begin{aligned} & \lim_{Q \rightarrow P} \text{κλίση } (PQ) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + su_1, y_0 + su_2) - f(x_0, y_0)}{s} \\ &= \left(\frac{df}{ds} \right)_{\mathbf{u}, P_0} = (D_{\mathbf{u}} f)_{P_0}. \end{aligned}$$

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

Παράγωγος κατά κατεύθυνση (ή κατευθυνόμενη παράγωγος)

- Τρόπος υπολογισμού: μέσω του διανύσματος της κλίσης

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{j}$$

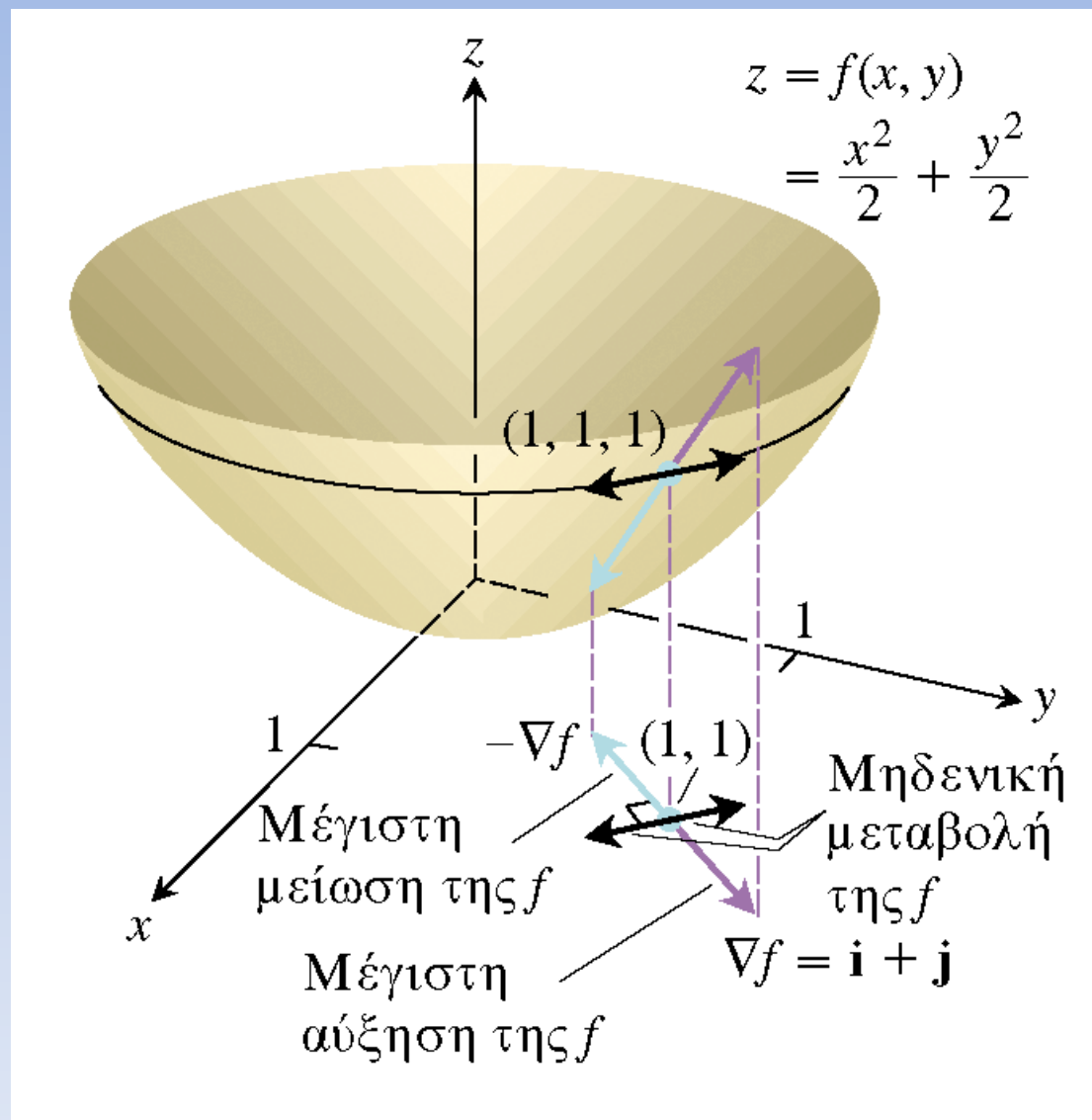
- Η παράγωγος κατά την κατεύθυνση του μοναδιαίου διανύσματος $\hat{u} = u_1 \hat{i} + u_2 \hat{j}$ δίνεται από το εσωτερικό γινόμενο:

$$D_{\hat{u}} f = \vec{\nabla} f \cdot \hat{u} = \frac{\partial f}{\partial x} u_1 + \frac{\partial f}{\partial y} u_2$$

Ιδιότητες της κλίσης

- Για $\theta=0 \Rightarrow D_{\hat{u}}f=\max$
- Σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της η f παρουσιάζει την μέγιστη αύξηση κατά μήκος της κατεύθυνσης του διανύσματος της κλίσης
- Για $\theta=\pi \Rightarrow D_{\hat{u}}f=\min$
- η f παρουσιάζει την μέγιστη μείωση
- Για $\theta=\pi/2 \Rightarrow D_{\hat{u}}f=0$
- η f δεν παρουσιάζει μεταβολή σε κατεύθυνση κάθετα στο διάνυσμα της κλίσης

Ιδιότητες της κλίσης

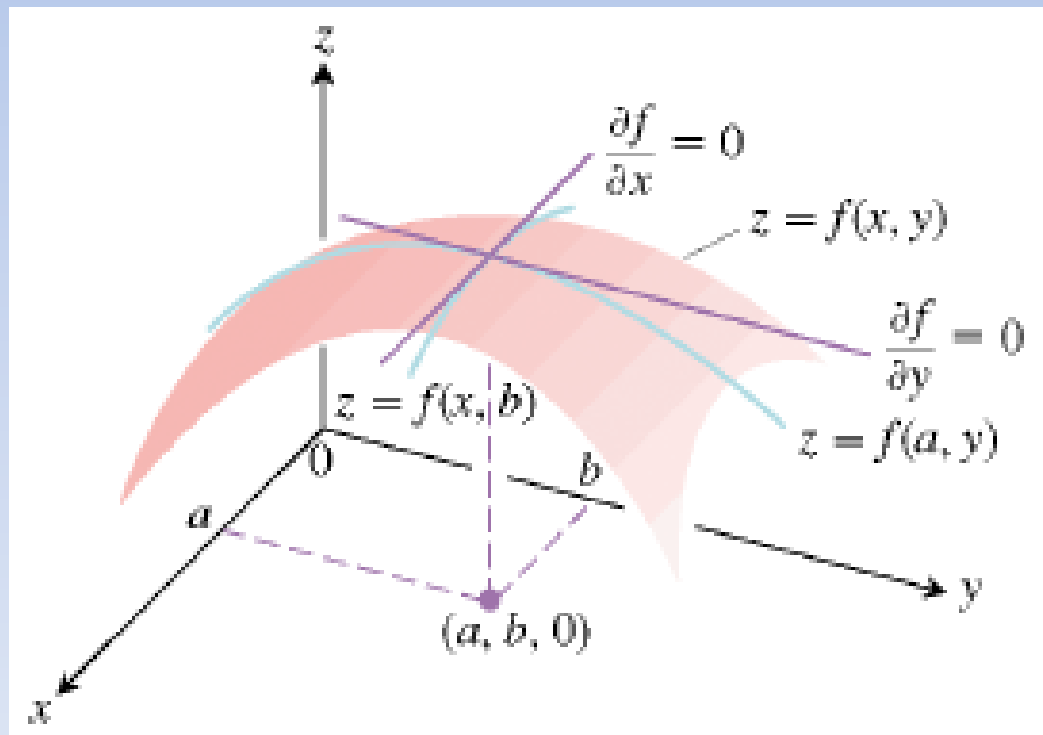


Ιδιότητες της κλίσης

ΣΧΗΜΑ 11.29 Η κατεύθυνση μέγιστης αύξησης της $f(x, y) = (x^2/2) + (y^2/2)$ στο $(1, 1)$ είναι $\nabla f|_{(1,1)} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ και αντιστοιχεί στην κατεύθυνση της πλέον απότομης ανόδου επί της σχεδιασθείσας επιφάνειας στο $(1, 1)$.

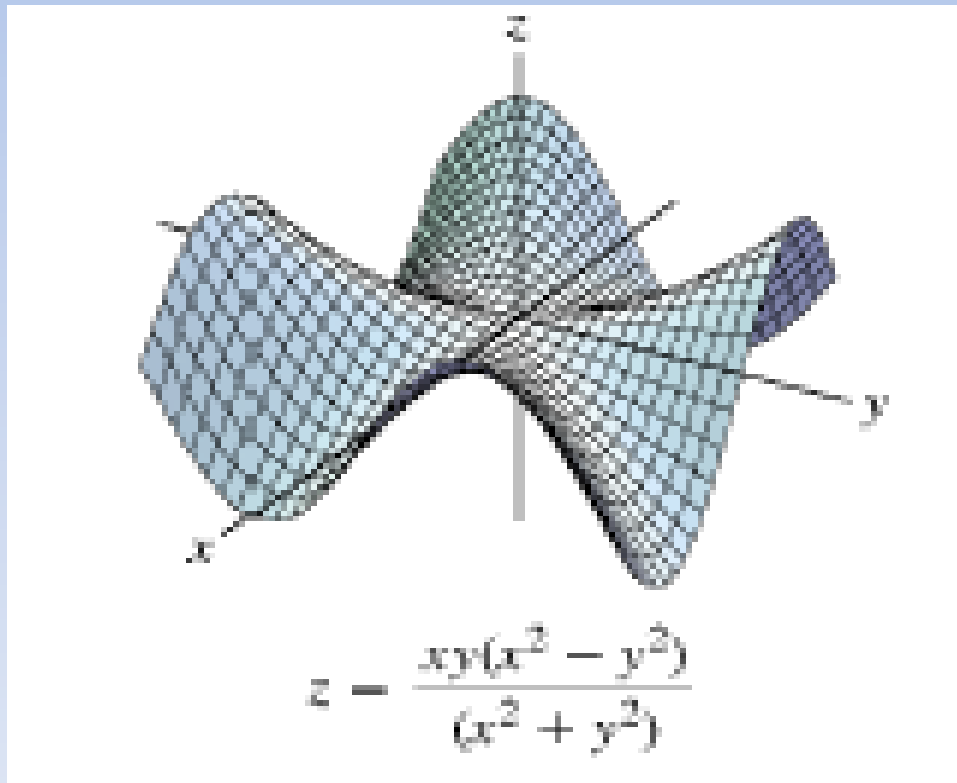
Ιδιότητες της κλίσης

- Αν η $f(x,y)$ είναι παραγωγίσιμη σε μια περιοχή και έχει σε ένα εσωτερικό σημείο αυτής της περιοχής τοπικό ακρότατο, τότε σε αυτό το σημείο $f_x=0$ και $f_y=0$.



Ιδιότητες της κλίσης

- Το αντίστροφο πάλι δεν ισχύει: μπορεί οι μερικές παράγωγοι να μηδενίζονται σε κάποιο σημείο και να μην αντιστοιχεί σε ακρότατο (π.χ. σαγματικά σημεία).



Ιδιότητες της κλίσης

- Το gradient ως διάνυσμα υποδεικνύει την αύξηση της κλίσης μιας συνάρτησης.
- Παράδειγμα: <https://en.wikipedia.org/wiki/Gradient>