1. Εισαγωγή

Η ραγδαία εξέλιξη της τεχνητής νοημοσύνης ανοίγει νέες προοπτικές σε τομείς που ως τώρα είναι αποκλειστικοί χώροι ανθρώπινης δραστηριότητας και επέμβασης.

Η τεχνητή νοημοσύνη άρχισε να απασχολεί τον επιστημονικό κόσμο από την αρχή της δεκαετίας του 60 σαν ένας ξεχωριστός επιστημονικός κλάδος, με στόχο την αναπαραγωγή ανθρώπινης νόησης. Με την εξάπλωση των ηλεκτρονικών υπολογιστών, η τεχνητή νοημοσύνη αναπτύσσεται παράλληλα σε πολλούς τομείς στους οποίους χωρίς τους υπολογιστές δεν θα μπορούσε να πραγματοποιήσει αξιόλογο έργο.

Ιδιαίτερη ώθηση στην ανάπτυξη της τεχνητής νοημοσύνης δόθηκε στην αρχή της δεκαετίας του 80 με την αναγγελία του προγράμματος πέμπτης γενιάς υπολογιστών από την Ιαπωνία. Το φιλόδοξο αυτό πρόγραμμα σημαίνει ταυτόχρονα την επιδοκιμασία της τεχνητής νοημοσύνης και την ουσιαστική ενσωμάτωση της στο χώρο της Πληροφορικής. Στόχος του προγράμματος της Ιαπωνίας είναι η ανάπτυξη μίας νέας γενιάς υπολογιστών που θα είναι πιό προσιτοί στον άνθρωπο-χρήστη, δινοντας παράλληλα ικανότητες γιά επεξεργασία γνώσης, ακοής, όρασης, αφής, κ.ά.

Ενας απο τους πλέον διαδεδομένους και σύγχρονους τομείς της τεχνητής νοημοσύνης είναι τα έμπειρα συστήματα. Το έμπειρο συστήμα είναι ένα λογισμικό σύνολο που περιέχει τη γνώση ενός εμπειρογνώμονα σε ένα περιορισμένο πεδίο ειδικευμένης εργασίας. Εχει τη δυνατότητα να κατευθύνει ένα χρήστη στη λύση κάποιου σύνθετου προβλήματος προσφέροντας ειδική γνώση υπό μορφή συμβουλών. Με παρόμοιο τρόπο, ένα έμπειρο σύστημα μπορεί να αξιοποιήσει τη γνώση του γιά να ελέγχει αυτόματα μια διαδικασία στο φυσικό χώρο λειτουργίας της.

Η τεχνολογία των έμπειρων συστημάτων αφού εισχώρησε σε τομείς δραστηριότητας διαφόρων υπηρεσιών, αντικαθιστώντας ως ενα βαθμό τον ρόλο εμπειρογνωμόνων, διαμορφώνει μια νέα πραγματικότητα εφαρμογών και στο χώρο της βιομηχανίας. Εφαρμογές που παρουσιάζουν ιδιαίτερες δυσκολίες όπως η προσομείωση και ο αυτόματος έλεγχος μπορούν τώρα να αντιμετωπισθούν με έμπειρα συστήματα.

Ενα σύνθετο πρόβλημα που εντοπίζεται κυρίως στο χώρο της χημικής βιομηχανίας οπου λειτουργούν μή-γραμμικά, μεγάλης κλίμακας συστήματα, είναι η εφαρμογή αυτομάτου ελέγχου. Ειδικότερα, στη βιομηχανία τσιμέντου, η παραγωγική διαδικασία αποτελείται από πολύπλοκα συστήματα που καταναλώνουν μεγάλες ποσότητες θερμικής και ηλεκτρικής ενέργειας. Τέτοια συστήματα είναι οι ανακομιστές, ο περιστρεφόμενος φούρνος και οι μύλοι τσιμέντου, που η λειτουργία τους παρακολουθείται και ελέγχεται απο έμπειρους χειριστές.

Η βασική αρχή στην εφαρμογή αυτ. ελέγχου είναι η αξιοποίηση της υπάρχουσας τεχνογνωσίας των μηχανικών και έμπειρων χειριστών απο ένα ηλεκτρονικό υπολογιστή και η εφαρμογή της σε συνθήκες "πραγματικού χρόνου". Ο θεωρητικός φορέας που χρησιμοποιειται γιά την ανάπτυξη του έμπειρου συστήματος ελέγχου είναι η Ασαφής Λογική.

2. Ασαφής Λογική

2.1. Βασικοί Οροι

Στην κλασσική θεωρία συνόλων ένα σύνολο αποτελείται από ένα ορισμένο ή άπειρο αριθμό στοιχείων. Τα στοιχεία όλων των συνόλων υπό μελέτη ανοίκουν σε ένα σταθερό υπερσύνολο αναφοράς (universe of discourse). Τα στοιχεία ενός υπερσυνόλου αναφοράς που περιέχει το σύνολο υπό μελέτη, ανοίκουν ή όχι στο υπό μελέτη σύνολο A. Αυτό μπορεί να εκφρασθεί με την χαρακτηριστική συνάρτηση f_A του συνόλου A :

$$f_A(x) = 1 \quad \text{εαν} \quad x \in A$$
$$\quad\;\; = 0 \quad \text{εαν} \quad x \notin A$$

Μπορούμε να εισάγουμε ασάφεια στην θεωρία συνόλων εάν γενικεύσουμε την χαρακτηριστική συνάρτηση έτσι ώστε να λαμβάνει άπειρο αριθμό τιμών στο κλειστό διάστημα [0,1] (βλέπε Σχ. 2.1). Εάν X είναι το υπερσύνολο αναφοράς με επιμέρους στοιχεία x, τότε

$$X = \{ x \} .$$

Ενα ασαφές σύνολο (fuzzy set) A του υπερσυνόλου αναφοράς X μπορεί να γραφεί σαν ένα σύνολο διαταγμένων ζευγών

$$A = \{ \mu_A(x)/x \} \qquad , x \in X$$

όπου $\mu_A(x)$ καλείται συνάρτηση συμμετοχής (membership function) του x στο A και ορίζεται σαν μία απεικόνιση από το X στο κλειστό διάστημα [0,1],

$$\mu_A(x) : X \to [0,1]$$

Η συνάρτηση συμμετοχής δείχνει τον βαθμό κατά τον οποίο ένα στοιχείο x ανοίκει στο σύνολο A.
Το σύνολο υποστήριξης (support set) ενός ασαφούς συνόλου A είναι το σύνολο στοιχείων του υπερσυνόλου αναφοράς X γιά τα οποία $\mu_A(x) > 0$. Ετσι ένα ασαφές σύνολο μπορούμε να το δούμε και σαν την απεικόνιση από το σύνολο υποστήριξης στο διάστημα [0,1]. Γιά αυτό το λόγο μπορούμε να δεικνύουμε ένα ασαφές σύνολο A του X με την συνάρτηση συμμετοχής $\mu_A(x)$. Γιά παράδειγμα, η συνάρτηση συμμετοχής του ασαφούς συνόλου A = { χαμηλό }, στο υπερσύνολο αναφοράς των θετικών ακεραίων αριθμών ως το 100, μπορεί να έχει τιμές όπως

$$\mu_A(0) = \mu_A(5) = \mu_A(10) = \mu_A(15) = \mu_A(20) = 1.0$$
$$\mu_A(25) = 0.9$$
$$\mu_A(30) = 0.8$$
$$\mu_A(35) = 0.6$$
$$\mu_A(40) = 0.3$$
$$\mu_A(45) = 0.1$$
$$\mu_A(50) = \mu_A(55) = \ldots = \mu_A(100) = 0.0$$

Μιά ασαφής μεταβλητή (fuzzy variable) ειναι μια της οποιας οι τιμές ειναι "ετικέττες" (labels) από ασαφή σύνολα π.χ. η θερμοκρασια κάποιας διαδικασίας μπορεί να ειναι μια ασαφής μεταβλητή που παιρνει τιμές : χαμηλή, μέση, υψηλή, κτλ. Οι τιμές χαμηλή, μέση, υψηλή, κτλ. περιγράφονται με την βοήθεια ασαφών συνόλων. Γενικότερα, οι τιμές μιας ασαφούς μεταβλητής μπορεί να ειναι προτάσεις σε κάποια προδιαγραμμένη γλώσσα (π.χ. με συνδιασμό ασαφών μεταβλητών και γλωσσικών περιγραμμάτων, όπως θα δούμε παρακάτω). Σε αυτή την περίπτωση η μεταβλητή καλειται γλωσσική μεταβλητή (linguistic variable). Γιά παράδειγμα οι τιμές της ασαφούς μεταβλητής θερμοκρασια μπορούν να εκφρασθούν σαν υψηλή, όχι υψηλή, σχετικά υψηλή, πολύ υψηλή, όχι πολύ υψηλή, πολύ πολύ υψηλή, υψηλή αλλά όχι πολύ υψηλή, αρκετά υψηλή, σχεδόν υψηλή, κτλ. Ετσι οι τιμές ειναι προτάσεις αποτελούμενες από την "ετικέττα" υψηλή, την άρνηση όχι, τα συνδετικά και και αλλά, και τα περιγράμματα πολύ, σχετικά, αρκετά, σχεδόν. Κατά αυτόν τον τρόπο η μεταβλητή θερμοκρασια ειναι μια γλωσσική μεταβλητή όπως έχει περιγραφεί παραπάνω. Το Σχ. 2.2 δείχνει την μεταβλητή θερμοκρασια με μερικές από τις τιμές της.

Η εξάρτηση μιας γλωσσικής μεταβλητής από μια άλλη (ανεξάρτητη) γλωσσική μεταβλητή περιγράφεται από μια σχέση ονομαζόμενη ασαφής εξαρτημένη σχέση (fuzzy conditional statement). Η σχέση αυτή έχει την μορφή

R : ΕΑΝ π^1 ΤΟΤΕ π^2

όπου π^1 και π^2 ειναι ασαφεις φράσεις της μορφής

π : X ειναι A

όπου A ειναι ένα ασαφές υποσύνολο του υπερσυνόλου αναφοράς X. Στο A μπορεί να δοθεί μια γλωσσική έννοια που ορίζει την τιμή του X. Για παράδειγμα,

"ΕΑΝ Χ ειναι μικρή ΤΟΤΕ Υ ειναι πολύ μεγάλη",
"ΕΑΝ Σφάλμα ειναι μεγάλο αρνητικό ΤΟΤΕ Εξοδος ειναι μεγάλη θετική".

Δύο ή περισσότερες ασαφεις εξαρτημένες σχέσεις μπορούν να συνδυασθούν (η μια μέσα στην άλλη) ώστε να σχηματίσουν μια ένθετη ασαφή εξαρτημένη σχέση της μορφής

$\dot{R}$: ΕΑΝ π^1 ΤΟΤΕ(ΕΑΝ π^2 ΤΟΤΕ π^3).

Αυτή αποτελείται από δύο ασαφεις εξαρτημένες σχέσεις

R^1 : ΕΑΝ π^1 ΤΟΤΕ R^2
R^2 : ΕΑΝ π^2 ΤΟΤΕ π^3.

Γιά παράδειγμα,

"ΕΑΝ Σφάλμα ειναι ΑΜΕ ΤΟΤΕ (ΕΑΝ Μεταβολή Σφάλματος ειναι ΘΜΕ ΤΟΤΕ Εξοδος ειναι ΘΜΕ)".

Δύο ή παραπάνω ασαφείς εξαρτημένες σχέσεις μπορούν να συνδυασθούν με το συνδετικό ΕΙΤΕ ώστε να σχηματίσουν έναν ασαφή αλγόριθμο (fuzzy algorithm), R^N, της μορφής

$$R^N : R^1 \text{ ΕΙΤΕ } R^2 \text{ ΕΙΤΕ } R^3 \ldots \text{ ΕΙΤΕ } R^n$$

Γιά παράδειγμα, μέρος ενός αλγόριθμου που ελέγχει την ταχύτητα ενός μοντέλλου ατμομηχανής (Mamdani και Assilian (1975)) είναι

ΕΑΝ ΣΤ είναι ΑΜΕ ΤΟΤΕ (ΕΑΝ ΜΣΤ είναι ΟΧΙ(ΑΜΕ Η ΑΜΣ)
ΤΟΤΕ ΜΠ είναι ΘΜΕ)
ΕΙΤΕ
ΕΑΝ ΣΤ είναι ΑΜΣ ΤΟΤΕ (ΕΑΝ ΜΣΤ είναι (ΘΜΕ Η ΘΜΣ Η ΘΜΙ)
ΤΟΤΕ ΜΠ είναι ΘΜΙ)
ΕΙΤΕ
ΕΑΝ ΣΤ είναι ΑΜΙ ΤΟΤΕ (ΕΑΝ ΜΣΤ είναι ΘΜΣ ΤΟΤΕ ΜΠ είναι ΘΜΙ)
ΕΙΤΕ
....

όπου ΣΤ = Σφάλμα Ταχύτητας
ΜΣΤ = Μεταβολή Σφάλματος Ταχύτητας
ΜΠ = Μεταβολή στην Παροχή Καυσίμου
ΑΜΕ,ΑΜΣ,ΑΜΙ = Αρνητικό Μεγάλο, Μέσο, Μικρό
ΘΜΕ,ΘΜΣ,ΘΜΙ = Θετικό ,, ,, ,,

2.2. Πράξεις σε Ασαφή Σύνολα

2.2.1. Οι Τελεστές Min και Max

Οι τελεστές min και max μπορούν να χρησιμοποιηθούν διαδικά ή και μοναδικά, ανάλογα με τα συμφραζόμενα. Μπορούν να ενεργήσουν πάνω σε σύνολα και πίνακες για κάθε στοιχείο τους ξεχωριστά, όπως επίσης και πάνω σε ανεξάρτητα στοιχεία. Το min και max δύο στοιχείων α, β ορίζεται

$$\alpha \wedge \beta = \mathrm{Min}(\alpha,\beta) = \alpha \quad \text{εάν } \alpha \leq \beta$$
$$= \beta \quad \text{εάν } \alpha > \beta$$

$$\alpha \vee \beta = \mathrm{Max}(\alpha,\beta) = \alpha \quad \text{εάν } \alpha \geq \beta$$
$$= \beta \quad \text{εάν } \alpha < \beta$$

Το min και max δύο συνόλων A, B δίνει το σύνολο C

$$C = A \wedge B = \{ \mathrm{Min}(\alpha,\beta) \} \quad , \forall \alpha \in A, \beta \in B$$
$$C = A \vee B = \{ \mathrm{Max}(\alpha,\beta) \} \quad , \forall \alpha \in A, \beta \in B$$

Οταν οι τελεστές χρησιμοποιούνται μοναδικά υπονοούν το ελάχιστο (infimum) ή το μέγιστο (supremum) όλων των στοιχείων ενός συνόλου, π.χ.

$$\alpha = \wedge A = \mathrm{Inf}\, A \quad , \alpha \in A$$
$$\alpha = \vee A = \mathrm{Sup}\, A \quad , \alpha \in A$$

Οι τελεστές μπορούν να χρησιμοποιηθούν επίσης υπό μορφή συνάρτησης με μεμονομένα στοιχεία ή σύνολα, π.χ.

$$\alpha = \wedge(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_m)$$
$$= \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 \wedge \ldots \wedge \alpha_m$$
$$= \bigwedge_{\kappa=1}^{m} (\alpha_\kappa)$$
$$A = \wedge(A_1, A_2, A_3, \ldots, A_m)$$
$$= A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge \ldots \wedge A_m)$$
$$= \bigwedge_{\kappa=1}^{m} (A_\kappa)$$

Οταν τα στοιχεία του συνόλου είναι συναρτήσεις μιας μεταβλητής οι τελεστές εκφράζονται ως εξής

$$\alpha = \bigwedge_{x} (\alpha(x)) \qquad , x \in X.$$

Τελικά ,σημειόνουμε ότι σε εξισώσεις που περιέχουν min και max χρησιμοποιούμε τους ίδιους αλγεβρικούς κανόνες όπως στον πολλαπλασιασμό και την πρόσθεση αντίστοιχα.

2.2.2. Πράξεις

Ενα ασαφές σύνολο A του X λέγεται κενό εάν η συνάρτηση συμμετοχής είναι μηδέν παντού στο X

$$A = \emptyset \text{ εάν } \mu_A(x) = 0 \qquad , \forall x \in X.$$

Το συμπλήρωμα (complement) $\bar{A}$ ενος ασαφούς συνόλου A ορίζεται ως

$$\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x) \qquad , \forall x \in X.$$

Δύο ασαφή σύνολα είναι ίσα εάν οι συναρτήσεις συμμετοχής τους είναι ίσες παντού στο X

$$A = B \text{ εάν } \mu_A(x) = \mu_B(x) \qquad , \forall x \in X.$$

Ενα ασαφές σύνολο A είναι υποσύνολο ενός B εάν η συνάρτηση συμμετοχής του είναι μικρότερη ή ίση αυτής του B παντού στο X

$$A \subset B \text{ εάν } \mu_A(x) \leq \mu_B(x) \qquad , \forall x \in X.$$

Η ένωσις (union) δύο ασαφών συνόλων A,B στο X ορίζεται ως

$$\mu_{A\cup B}(x) = \mu_A(x) \vee \mu_B(x) \qquad , \forall x \in X.$$

Η τομή (intersection) δύο ασαφών συνόλων A,B στο X ορίζεται ως

$$\mu_{A\cap B}(x) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x) \qquad , \forall x \in X.$$

Το γινόμενο των Α, Β στο Χ ορίζεται ως

$$\mu_{AB}(x) = \mu_A(x) \cdot \mu_B(x) \quad , \forall x \in X.$$

Μια επέκταση του παραπάνω είναι τα ασαφή σύνολα A^α και αA όπου α είναι ένας θετικός πραγματικός αριθμός,

$$\mu_{A^\alpha}(x) = (\mu_A(x))^\alpha \quad , \forall x \in X.$$
$$\mu_{\alpha A}(x) = \alpha . \mu_A(x) \quad , \forall x \in X.$$

Εφαρμογές του ορισμού του γινομένου είναι οι πράξεις της συμπύκνωσης, διαστολής, η αύξηση αντίθεσης και η ασαφοποίηση.

Η συμπύκνωση (concentration) ενός ασαφούς συνόλου Α στο Χ, που γράφεται CON(A), ορίζεται

$$\mu_{CON(A)}(x) = (\mu_A(x))^2 \quad , \forall x \in X.$$

Η συμπύκνωση έχει σαν αποτέλεσμα την παραγωγή ενός υποσυνόλου του Α τέτοιου ώστε η μείωση του βαθμού κατά τον οποίο ανοίκει το στοιχείο x στο Α είναι σχετικά μικρή γιά αυτά τα x που έχουν υψηλό βαθμό συμμετοχής και σχετικά μεγάλη γιά αυτά τα x με χαμηλό βαθμό συμμετοχής.

Η διαστολή (dilation) ενός ασαφούς συνόλου Α στο Χ, που γράφεται DIL(A), ορίζεται

$$\mu_{DIL(A)}(x) = (\mu_A(x))^{0.5} \quad , \forall x \in X.$$

Το αποτέλεσμα της διαστολής είναι το αντίθετο αυτού της συμπύκνωσης.
Επίσης ισχύει $CON(A) \subset A \subset DIL(A)$.

Η αύξηση αντίθεσης (contrast intensification) ενός ασαφούς συνόλου Α στο Χ, που γράφεται INT(A), ορίζεται

$$\mu_{INT(A)}(x) = 2(\mu_A(x))^2 \quad \text{γιά} \quad 0 \leq \mu_A(x) \leq 0.5$$
$$= 1 - 2(1- \mu_A(x))^2 \quad \text{γιά} \quad 0.5 \leq \mu_A(x) \leq 1$$

Αυτή η πράξη διαφέρει από την συμπύκνωση στο ότι η συνάρτηση συμμετοχής μεγαλώνει πάνω από το 0.5 και μικραίνει κάτω από το 0.5. Αρὰ η αύξηση αντίθεσης έχει σαν αποτέλεσμα να ελλατώνει την ασάφεια του Α.

Η πράξη της ασαφοποίησης (fuzzyfication) έχει σαν αποτέλεσμα τη μετατροπή ενός κλασσικού (σαφούς) συνόλου σε ένα ασαφές σύνολο ή την αύξηση του βαθμού ασάφειας ενός ασαφούς συνόλου.Η συνάρτηση ασαφοποίησης (fuzzyfier), F, χαρακτηρίζεται από τον πυρήνα (kernel), K(x), που είναι το ασαφές σύνολο που προκείπτει από την εφαρμογή του F στο μεμονομένο στοιχείο x. Το αποτέλεσμα της εφαρμογής του F στο ασαφές σύνολο Α δίδεται από

$$F(A;K) = \{ \mu_A(x).\mu_{K(x)}(x)/x \}$$

Ο πυρήνας K(x) μπορεί να είναι ο ίδιος γιά όλα τα επιμέρους στοιχεία x ή μπορεί να είναι διαφορετικός γιά διάφορα στοιχεία x. Γιά παράδειγμα παίρνουμε την απλή περίπτωση ασαφοποίησης ενός μοναδιαίου συνόλου (με ένα μόνο στοιχείο) και που ανοίκει στο υπερσύνολο αναφοράς

$$X = \{ -6,-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,6 \}$$

Εάν το υποσύνολο είναι

$$\begin{aligned} A &= \{ \mu_A(x)/x \} \\ &= \{ 0/-6,0/-5,0/-4,0/-3,1.0/-2,0/-1,0/0, \\ &\quad 0/1,0/2,0/3,0/4,0/5,0/6 \} \end{aligned}$$

και ο πυρήνας είναι

$$\begin{aligned} K(-2) &= \{ \mu_{K(-2)}(x)/x \} \\ &= \{ 0/-6,0/-5,0.3/-4,0.7/-3,1.0/-2,0.7/-1,0.3/0, \\ &\quad 0/1,0/2,0/3,0/4,0/5,0/6 \} \\ K(-6) &= K(-5) = \ldots = K(0) = \ldots = K(5) = K(6) = 0 \end{aligned}$$

τότε

$$\begin{aligned} F(A;K) &= \{ \mu_A(-6).\mu_{K(-6)}(x)/x \} + \\ &\quad \{ \mu_A(-5).\mu_{K(-5)}(x)/x \} + \ldots + \\ &\quad \{ \mu_A(-2).\mu_{K(-2)}(x)/x \} + \ldots + \\ &\quad \{ \mu_A(6).\mu_{K(6)}(x)/x \} \\ &= \{ \mu_A(-2).\mu_{K(-2)}(x)/x \} \\ &= \{ 1.0.\mu_{K(-2)}(x)/x \} \\ &= K(-2) \end{aligned}$$

όπου το "+" δεικνύει την πράξη της ένωσης. Αρα η ασαφοποίηση έχει σαν αποτέλεσμα την προσαρμογή του πυρήνα K(-2) γύρω από το στοιχείο -2 του A.

Τώρα ας πάρουμε την περίπτωση της (περαιτέρω) ασαφοποίησης ενός ασαφούς συνόλου όπου, γιά παράδειγμα,

$$\begin{aligned} X &= \{ 1,2,3 \} \\ A &= \{ 0.8/1,0.6/2 \} \\ K(1) &= \{ 1/1,0.4/2 \} \\ K(2) &= \{ 0.4/1,1/2,0.4/3 \} \end{aligned}$$

τότε

$$\begin{aligned} F(A;K) &= 0.8(1/1+0.4/2) + 0.6(0.4/1+1/2+0.4/3) \\ &= 0.8/1+0.32/2+0.24/1+0.6/2+0.24/3 \\ &= \{ 0.8/1,0.6/2,0.24/3 \} \end{aligned}$$

Το αποτέλεσμα φαίνεται στο Σχ. 2.3 . Σημειώνουμε ότι η ασαφοποίηση μεμονομένων στοιχείων χρησιμεύει στην δημιουργία ασαφών συνόλων από αποθηκευμένα (σε μνήμη Η/Υ) απλά στοιχεία, και η ασαφοποίηση ασαφών συνόλων βοηθά στον ορισμό γλωσσικών περιγραμμάτων (hedges) όπως περίπου, ελαφρά, πολύ, κτλ.

2.2.3. Αλγεβρικές Ιδιότητες

Χρησιμοποιόντας τους ορισμούς της ένωσης, τομής και συμπληρώματος μπορούμε να δείξουμε ότι οι παρακάτω αλγεβρικές ιδιότητες της κλασσικής λογικής και θεωρίας συνόλων ισχύουν και γιά τα ασαφή σύνολα

Νόμος διπλής άρνησης	$\bar{\bar{A}} = A$
Αδύναμη πράξη	$A \cap A = A$ $A \cup A = A$
Μεταθετική ιδιότητα	$A \cap B = B \cap A$ $A \cup B = B \cup A$
Προσεταιριστική ιδιότητα	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
Επιμεριστική ιδιότητα	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
Νόμος Απορόφησης	$A \cap (A \cup B) = A$ $A \cup (A \cap B) = A$
Μεταβατικός Νόμος	Εάν $A \subset B$ και $B \subset C$ τότε $A \subset C$
Θεωρήματα De Morgan	$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

Οι παραπάνω ιδιότητες μπορούν να γραφούν και μέσω των συναρτήσεων συμμετοχής. Γιά παράδειγμα, γιά τον συσχετισμό

$$(\mu_A \wedge \mu_B) \wedge \mu_C = \mu_A \wedge (\mu_B \wedge \mu_C)$$

ή γιά το θεώρημα De Morgan

$$\overline{\mu_A \vee \mu_B} = \mu_{\bar{A}} \wedge \mu_{\bar{B}}$$

Επιπλέον οι παρακάτω σχέσεις αληθεύουν μόνο γιά ασαφή σύνολα

$$X \cap \bar{X} \neq \emptyset$$

$$X \cup \bar{X} \neq E$$

$A \cap \emptyset = \emptyset$ ή $\mu_A \wedge 0 = 0$
$A \cup \emptyset = A$ ή $\mu_A \vee 0 = \mu_A$
$A \cap E = A$ ή $\mu_A \wedge 1 = \mu_A$
$A \cup E = E$ ή $\mu_A \vee 1 = 1$

όπου $\emptyset$ είναι ένα κενό σύνολο, και το
E ορίζεται ως $\mu_E(x) = 1, \forall x \in X$.

2.3. Γλωσσικές Μεταβλητές

Οπως αναφέρθηκε προηγουμένως μια γλωσσική μεταβλητή παίρνει τιμές που είναι προτάσεις σε μία φυσική ή τεχνιτή γλώσσα. Γενικά η τιμή μιας γλωσσικής μεταβλητής είναι ένας σύνθετος όρος αποτελούμενος από "ατομικούς" όρους. Οι ατομικοί όροι μπορούν να υποδιαιρεθούν σε τέσσερεις κατηγορίες

(α) Πρωτεύοντες όροι (primary terms) που είναι ετικέττες προγραμμένων ασαφών συνόλων του υπερσυνόλου αναφοράς (π.χ. υψηλό, χαμηλό, μικρό, μέσο, μεγάλο, μηδέν).
(β) Την άρνηση (negation) ΌΧΙ (NOT) και τα συνδετικά (connectives) ΚΑΙ (AND) και Η (OR).
(γ) Γλωσσικά Περιγράμματα (hedges) όπως πολύ, ελαφρά, σχεδόν, αρνητικό.
(δ) Δείκτες (markers) όπως οι παρενθέσεις.

Οι πρωτέυοντες όροι μπορούν να έχουν συναρτήσεις συμμετοχής που είναι συνεχείς ή διακριτές.Οι συνεχείς συναρτήσεις σύμμετοχής ορίζονται με αναλυτικές συναρτήσεις. Γιά παράδειγμα, η παρακάτω γενική συνάρτηση μπορεί να χρησιμοποιηθεί γιά τον ορισμό των προτευόντων όρων μικρό, μέσο, μεγάλο

$$\mu_A(x) = (\, 1 + (a(x-c))^b\,)^{-1}$$

Με τις τρείς παραμέτρους a,b,c αλλάζουμε το σχήμα του $\mu_A(x)$. Το c καθορίζει το σημείο με την μικρότερη ασάφεια, το a καθορίζει το έυρος και το b την αντίθεση (contrast), Σχ. 2.4(α). Γιά παράδειγμα,

$$\mu_{ΜΙΚΡΟ}(x) = (\, 1 + 9x^2\,)^{-1}$$
$$\mu_{ΜΕΣΟ}(x) = (\, 1 + 9(x-0.5)^2\,)^{-1}$$
$$\mu_{ΜΕΓΑΛΟ}(x) = (\, 1 + (x-2)^2\,)^{-1}$$

Αλλος τρόπος γιά να ορίζουμε συνεχείς συναρτήσεις συμμετοχής είναι μέσω των συναρτήσεων S και Π, Σχ. 2.4(β). Η συνάρτηση S είναι μονοτονική και ορίζεται μέσω τριών παραμέτρων α,β,γ ως

$$\begin{aligned} S(x,\alpha,\beta,\gamma) &= 0 && \text{γιά} \quad x \le \alpha \\ &= 2[\,(x-\gamma)/(\gamma-\alpha)\,]^2 && \text{γιά} \quad \alpha \le x \le \beta \\ &= 1 - 2[\,(x-\gamma)/(\gamma-\alpha)\,]^2 && \text{γιά} \quad \beta \le x \le \gamma \\ &= 1 && \text{γιά} \quad x \ge \gamma \end{aligned}$$

Η συνάρτηση Π αλλάζει μονοτονικότητα μόνο σε ένα σημείο και ορίζεται μέσω δύο συναρτήσεων S. Εδώ η παράμετρος β είναι το έυρος του συνόλου (απόσταση μεταξύ δύο σημείων όπου η τιμή της συνάρτησης συμμετοχής είναι 0.5) και η συνάρτηση δίδεται από

$$\begin{aligned} \Pi(x,\beta,\gamma) &= S(x,\gamma-\beta,\gamma-\beta/2,\gamma) && \text{γιά} \quad x \le \gamma \\ &= 1 - S(x,\gamma,\gamma+\beta/2,\gamma+\beta) && \text{γιά} \quad x \ge \gamma \end{aligned}$$

Επίσης συνεχείς συναρτήσεις συμμετοχής μπορούν να σχηματισθούν από ένα αριθμό συνεχών γραμμικών κομματιών. Οι τρείς πρότυπες μορφές που δείχνει το Σχ. 2.4(γ) μπορούν να αντιπροσωπεύσουν πολλούς διαφορετικούς πρωτέυοντες όρους (συμπεριλαμβανομένων και των όρων μικρό, μέσο, μεγάλο).

Ετσι κάθε ασαφές σύνολο έχει ρυθμιζόμενες παραμέτρους : σημεία αλλαγής μονοτονικότητας B1 και B2, αριστερή παράμετρο L και δεξιά παράμετρο R. Ενα παράδειγμα χρήσης αυτών των προτύπων συναρτήσεων φαίνεται στο Σχ. 2.4(δ).

Οι διακριτές συναρτήσεις συμμετοχής αποτελούνται από σύνολα τιμών που αντιστοιχούν σε μεμονομένα στοιχεία ενός διακριτού υπερσυνόλου αναφοράς. Γιά παράδειγμα, εάν

$$X = \{ 0,1,2,3,4,5,6 \}$$

μπορούμε να ορίσουμε

$$\{ \mu_{ΜΙΚΡΟ}(x) \} = \{ 0.3,0.7,1.0,0.7,0.3,0,0 \}$$
$$\{ \mu_{ΜΕΣΟ}(x) \} = \{ 0,0,0.3,0.7,1.0,0.7,0.3 \}$$
$$\{ \mu_{ΜΕΓΑΛΟ}(x) \} = \{ 0,0,0,0,0.3,0.7,1.0 \}$$

Διακριτές συναρτήσεις συμμετοχής μπορούν να σχηματισθούν βέβαια και από συνεχείς συναρτήσεις με δειγματοληψία στα απαιτούμενα διαστήματα.

Η άρνηση ΟΧΙ και τα συνδετικά ΚΑΙ και Η μπορούν να ορισθούν μέσω των πράξεων του συμπληρώματος, τομής και ένωσης, αντίστοιχα. Συνήθως το συνδετικό ΚΑΙ χρησιμοποιήται με μεταβλητές που έχουν διαφορετικά υπερσύνολα αναφοράς

$$A = \{ \mu_A(x)/x \} \qquad , x \in X$$
$$B = \{ \mu_B(y)/y \} \qquad , y \in Y$$
$$A \text{ ΚΑΙ } B = \{ \mu_A(x) \wedge \mu_B(y)/(x,y) \} \qquad , x \in X,\ y \in Y$$
$$= \{ \mu_{A\ ΚΑΙ\ B}(x,y)/(x,y) \}$$

Π.χ. "ο ατμός είναι θερμός ΚΑΙ υγρός". Εάν οι τιμές των A και B ανοίκουν στο ίδιο υπερσύνολο αναφοράς τότε η επεξήγηση της έννοιας ακυρώνει την συγκηρία (conjuncture), π.χ. "ο ατμός είναι θερμός ΚΑΙ ψυχρός" είναι χωρίς έννοια. Η μόνη περίπτωση όπου μεταβλητές του ιδίου υπερσυνόλου αναφοράς μπορούν να συνδεθούν με ΚΑΙ είναι όταν παίρνουμε το συμπλήρωμα τους (άρνηση), π.χ. "ο ατμός ΔΕΝ είναι θερμός ΚΑΙ ΔΕΝ είναι ψυχρός", ή αλλιώς "ο ατμός είναι ΟΧΙ θερμός ΚΑΙ ΟΧΙ ψυχρός". Το συνδετικό Η συνδέει γλωσσικές τιμές της αυτής μεταβλητής. Και οι δύο τιμές ανοίκουν στο ίδιο υπερσύνολο αναφοράς

$$A = \{ \mu_A(x)/x \} \qquad , x \in X$$
$$B = \{ \mu_B(x)/x \}$$
$$A \text{ Η } B = \{ \mu_A(x) \vee \mu_B(x)/x \} \qquad , x \in X$$
$$= \{ \mu_{A\ Η\ B}(x)/x \}$$

Γιά παράδειγμα, "ο ατμός είναι θερμός Η ψυχρός". Εάν οι δύο γλωσσικές τιμές που συνδέονται με το συνδετικό Η ανοίκουν σε διαφορετικές γλωσσικές μεταβλητές τότε η πρόταση φαίνεται ότι είναι σημασιολογικά λάθος, π.χ. "ο ατμός είναι θερμός Η υγρός". Το συνδετικό Η μπορεί παρ'όλα αυτά να χρησιμοποιηθεί με μεταβλητές σε διαφορετικά υπερσύνολα αναφοράς εαν οι μεταβλητές βρίσκονται στο μέρος της συνθήκης σε μία σχέση της μορφής ΕΑΝ...ΤΟΤΕ... Γιά παράδειγμα

"ΕΑΝ η πίεση είναι υψηλή Η η ταχύτητα είναι μεγάλη ΤΟΤΕ η παροχή καυσίμου είναι μηδέν".

Η πράξη ΟΧΙ μπορεί να θεωρηθεί συνόνυμη με την άρνηση στην φυσική γλώσσα. Εάν

$$A = \{ \mu_A(x)/x \} \quad , x \in X$$
$$\text{ΟΧΙ } A = \{ (1 - \mu_A(x))/x \} \quad , x \in X.$$

Γιά παράδειγμα, "η πίεση είναι ΟΧΙ υψηλή", ή "η πίεση ΔΕΝ είναι υψηλή".

Τα γλωσσικά περιγράμματα (hedges) χρησιμεύουν στη δημιουργία ενός μεγαλύτερου συνόλου γλωσσικών τιμών για μία γλωσσική μεταβλητή απο μία μικρή συλογή προτευόντων όρων. Για παράδειγμα, χρησιμοποιόντας το περίγραμμα ΠΟΛΥ μαζί με τα ΟΧΙ, ΚΑΙ και τον πρωτέυοντα όρο "μεγάλο", μπορούμε να δημιουργήσουμε τα ασαφή σύνολα ΠΟΛΥ μεγάλο, ΠΟΛΥ ΠΟΛΥ μεγάλο, ΟΧΙ ΠΟΛΥ μεγάλο, μεγάλο ΚΑΙ ΟΧΙ ΠΟΛΥ μεγάλο, κτλ. Ενα γλωσσικό περίγραμμα ορίζεται σαν ένας μοναδικός τελεστής, h, που ενεργεί σε ένα ασαφές σύνολο A και δίδει ένα νέο σύνολο B, δηλ.

$$B = h\,A$$

όπου τα A και B είναι του ιδίου υπερσυνόλου αναφοράς, X. Ετσι το h ορίζεται σαν μία απεικόνιση

$$h : A \to B$$

η οποία παίρνει μία συναρτησιακή μορφή όταν χρησιμοποιούμε τιμές συμμετοχής

$$\mu_B(x) = h(\mu_A(x))$$

Σε ένα τέτοιο μετασχηματισμό μπορούμε να δώσουμε μία γλωσσική έννοια και μερικοί από αυτούς είναι

ΠΟΛΥ A :	$\mu_{CON(A)}(x)$	
ΜΑΛΛΟΝ A :	$\mu_{DIL(A)}(x)$	
ΠΡΑΓΜΑΤΙ A :	$\mu_{INT(A)}(x)$	
ΣΥΝ A :	$(\mu_A(x))^{1.25}$	
ΠΛΗΝ A :	$(\mu_A(x))^{0.75}$	
ΠΑΝΩ ΑΠΟ A :	$1 - \mu_A(x)$	$, x \geq x_{max}$
	0	, αλλιώς
ΚΑΤΩ ΑΠΟ A :	$1 - \mu_A(x)$	$, x \leq x_{min}$
	0	, αλλιώς

Τα ΣΥΝ και ΠΛΗΝ είναι τεχνιτά περιγράμματα που παρέχουν ελαφρότερο βαθμό συμπύκνωσης και διαστολής του ασαφούς συνόλου A από ότι οι πράξεις CON(A) και DIL(A). Τα παραπάνω περιγράμματα φαίνονται στο Σχ. 2.5.
Επί πλέον τα περιγράμματα ΑΡΝΗΤΙΚΟ και ΘΕΤΙΚΟ χρησιμοποιούνται, συνήθως μαζί, όταν το x μπορεί να λάβει αρνητικές και θετικές τιμές. Ετσι όταν μία συνάρτηση συμμετοχής έχει ορισθεί για $x > 0$, και με κέντρο το $x = \alpha$, τότε η αντίστοιχη συνάρτηση με κέντρο το $x = -\alpha$ μπορεί να διαφοροποιηθεί μέσω των περιγραμμάτων ΑΡΝΗΤΙΚΟ και ΘΕΤΙΚΟ (βλ. π.χ. Σχ. 2.4(δ)).

Γλωσσικά περιγράμματα μπορούν να συνδεθούν κατά σειρά γιά να σχηματίσουν μία σύνθετη γλωσσική μεταβλητή, δηλ.

$$C = h_1 \, h_2 \, h_3 \, \ldots \, A.$$

Με τους παραπάνω ορισμούς είναι τώρα δυνατόν να υπολογίσουμε την συνάρτηση συμμετοχής σύνθετων όρων, όπως π.χ.

A = όχι πολύ μικρό και όχι μεγάλο

$$\mu_A(x) = [\ 1 - (\mu_{ΜΙΚΡΟ}(x))^2\ ] \wedge [\ 1 - \mu_{ΜΕΓΑΛΟ}(x)\ ].$$

2.4. Ασαφείς Συνεπαγωγές (fuzzy implications)

Μία ασαφής σχέση συνεπαγωγής (fuzzy implication statement) ή ασαφής εξαρτημένη σχέση (fuzzy conditional statement) περιγράφει μία σχέση μεταξύ γλωσσικών μεταβλητών. Υποθέτοντας δύο ασαφή σύνολα A, B στα υπερσύνολα αναφοράς X και Y αντίστοιχα, ορίζουμε μία ασαφή εξαρτημένη σχέση της μορφής ΕΑΝ A ΤΟΤΕ B ως

R : ΕΑΝ A ΤΟΤΕ B = A -> B = A*B

A*B δηλεί την σχέση A -> B στο Καρτεσιανό γινόμενο των δύο υπερσυνόλων αναφοράς X*Y, δηλ.

$$X*Y = \{\ (x,y)\ \} \qquad , x \in X,\ y \in Y.$$

Η συνάρτηση συμμετοχής $\mu_R(x,y)$ που ορίζει την σχέση συνεπαγωγής ορίζεται απο τις επιμέρους συναρτήσεις $\mu_A(x)$, $\mu_B(y)$ με διάφορους τρόπους. Ετσι ας υποθέσουμε

$$\mu_R(x,y) = f_0(\ \mu_A(x), \mu_B(y)\ ) \qquad , x \in X,\ y \in Y$$

και

$$R = \{\ \mu_R(x,y)/(x,y)\ \}$$

Γενικότερα, εαν $A^1, A^2, \ldots, A^n$ είναι ασαφή υποσύνολα του X και $B^1, B^2, \ldots, B^n$ ειναι ασαφή υποσύνολα του Y, τότε ο ασαφής αλγόριθμος είναι

R^N : ΕΑΝ A^1 ΤΟΤΕ B^1
ΕΙΤΕ
ΕΑΝ A^2 ΤΟΤΕ B^2
ΕΙΤΕ
....
ΕΑΝ A^n ΤΟΤΕ B^n

Το συνδετικό ΕΙΤΕ, σημειούμενο με f_e, εξαρτάται από την συνάρτηση f_a που χρησιμοποιήται στον ορισμό των επιμέρους συνεπαγωγών. Αρα, γιά τον ασαφή αλγόριθμο

$$\begin{aligned}\mu_R{}^N(x,y) &= f_e[\ \mu_R{}^1(x,y), \mu_R{}^2(x,y), \ldots, \mu_R{}^n(x,y)\ ] \\ &= f_e[\ f_a(\ \mu_A{}^1(x), \mu_B{}^1(y)\ ),\ f_a(\ \mu_A{}^2(x), \mu_B{}^2(y)\ ), \\ &\qquad \ldots, f_a(\ \mu_A{}^n(x), \mu_B{}^n(y)\ )\ ]\end{aligned}$$

Οι παραπάνω εξισώσεις αναπτύχθηκαν γιά απλές μεταβλητές Α και Β. Γενικά το μέρος της συνθήκης μίας σχέσης της μορφής ΕΑΝ...ΤΟΤΕ... περιέχει πάνω απο μία μεταβλητές. Μια τέτοια σχέση μπορεί να θεωρηθεί σαν μία σειρά ένθετων ασαφών εξαρτημένων σχέσεων

ΕΑΝ A_1 ΤΟΤΕ (ΕΑΝ A_2 ΤΟΤΕ (ΕΑΝ A_3 ΤΟΤΕ ... (ΕΑΝ A_m ΤΟΤΕ Β))...) ..(1)

ή σαν μία σχέση όπου οι μεταβλητές αιτίου (antecedents) συνδέονται με το συνδετικό ΚΑΙ

ΕΑΝ (A_1 ΚΑΙ A_2 ΚΑΙ A_3 ... ΚΑΙ A_m) ΤΟΤΕ Β ...(2)

έτσι

$$\begin{aligned}\mu_R(x_1,x_2,\ldots,x_m,y) &= f_a(\mu_{A1}(x_1),\ f_a(\mu_{A2}(x_2),\ f_a(\mu_{A3}(x_3),\ldots \\ &\qquad f_a(\mu_{Am}(x_m),\ \mu_B(y))\ldots), \\ &\qquad x_1,x_2,\ldots x_m \in X_1,X_2,\ldots X_m,\ y \in Y\end{aligned} \quad \ldots(1)$$

ή

$$\begin{aligned}\mu_R(x_1,x_2,\ldots,x_m,y) &= f_a(\ \mu_{A1}(x_1) \wedge \mu_{A2}(x_2) \wedge \mu_{A3}(x_3)\ldots \\ &\qquad \wedge \mu_{Am}(x_m),\ \mu_B(y)\ ) \\ &= f_a(\ \bigwedge_{k=1}^{m} \mu_{Ak}(x_k),\ \mu_B(y)\ ) \quad ;\ x_k \in X_k,\ y \in Y\end{aligned} \quad \ldots(2)$$

Γενικά, οι εξισώσεις (1) και (2) πραγματοποιούνται διαφορετικά αλλά γιά μερικούς από τους ορισμούς του f_a οι εξισώσεις (1) και (2) ειναι ισοδύναμες. Γιά παράδειγμα, με τον απλοποιημένο Max-Min ορισμό (βλ. μετά)

$$\text{Εάν } A \to B \triangleq A \wedge B\ ,\ A_1 \to A_2 \to B = A_1 \wedge (A_2 \wedge B) = (A_1 \wedge A_2) \wedge B = (A_1 \wedge A_2) \to B$$

ή με τον VSS ορισμό

$$\begin{aligned}\text{Εάν } A \to B \triangleq \bar{A} \vee B\ ,\ A_1 \to A_2 \to B &= A_1 \to (\bar{A}_2 \vee B) \\ &= \bar{A}_1 \vee (\bar{A}_2 \vee B) \\ &= (\bar{A}_1 \vee \bar{A}_2) \vee B \\ &= \overline{A_1 \wedge A_2} \vee B \\ &= (A_1 \wedge A_2) \to B\end{aligned}$$

Γιά άλλους ορισμούς της συνεπαγωγής f_a, όπως του Lukasiewicz, όπου η ισοδυναμία δεν ισχύει πρέπει να επιλέξουμε μία απο τις μορφές (1) ή (2) σε σημασιολογική βάση. Από την άποψη ευκολίας πραγματοποίησης η εξίσωση (2) είναι συνήθως καλλύτερη. Σαν εξαίρεση, και οι δύο σχέσεις πραγματοποιούνται εύκολα όταν χρησιμοποιούμε τον ορισμό Max-Product (βλ. μετά):

$$\mu_R(x_1,x_2,\ldots,x_m,y) = \mu_{A1}(x_1).\mu_{A2}(x_2).\mu_{A3}(x_3)\ldots\mu_{Am}(x_m).\mu_B(y) = \prod_{\kappa=1}^{m} \mu_{A\kappa}(x_\kappa).\mu_B(y) \quad \ldots(1)$$

$$\mu_R(x_1,x_2,\ldots,x_m,y) = \bigwedge_{\kappa=1}^{m} \mu_{A\kappa}(x_\kappa).\mu_B(y) \quad \ldots(2)$$

Δύο ασαφείς εξαρτημένες σχέσεις ενός ασαφούς αλγόριθμου μπορούν να συγχωνευθούν (merging) απλοποιόντας έτσι τον αλγόριθμο. Η συγχώνευση μπορεί να γίνει σε δύο σχέσεις εάν διαφέρουν κατά όχι περισσότερο από ένα αίτιο π.χ.

ΕΑΝ A_1 ΤΟΤΕ (ΕΑΝ Β ΤΟΤΕ C)
ΕΑΝ A_2 ΤΟΤΕ (ΕΑΝ Β ΤΟΤΕ C)

μπορούν να συγχωνευθούν ως

ΕΑΝ (A_1 Η A_2) ΤΟΤΕ (ΕΑΝ Β ΤΟΤΕ C)

και.

ΕΑΝ Α ΚΑΙ B_1 ΤΟΤΕ C
ΕΑΝ Α ΚΑΙ B_2 ΤΟΤΕ C

μπορούν να συγχωνευθούν ως

ΕΑΝ Α ΚΑΙ (B_1 Η B_2) ΤΟΤΕ C

Οι σύνθετοι όροι που προκύπτουν υπολογίζονται όπως στην παρ. 2.3.

Τώρα ας δούμε αναλυτικότερα μερικούς από τους ορισμούς της συνεπαγωγής f_a, στους οποίους αναφερθήκαμε παραπάνω, γιά την απλή σχέση ΕΑΝ Α ΤΟΤΕ Β.

(1) Η συνεπαγωγή **Max-Min** που προτάθηκε αρχικά από τον Zadeh (1973) ως

$$\mu_R(x,y) = (\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)) \vee (1-\mu_A(x))$$

και απλοποιήθηκε από τον Mamdani (1977) ως

$$\mu_R(x,y) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(y)$$

Ο συνδυασμός n ασαφών εξαρτημένων σχέσεων (f_a) γίνεται με το συνδετικό Η, δηλ.

$$R^N = \bigvee_{j=1}^{n} R^j, \text{ και}$$

$$\mu_R{}^N(x,y) = \bigvee_{j=1}^{n} (\mu_A{}^j(x) \wedge \mu_B{}^j(y))$$

(2) Η συνεπαγωγή VSS βασισμένη στην κλασσική λογική (Rescher (1969))

$$\mu_R(x,y) = (1-\mu_A(x)) \vee \mu_B(y)$$

Ο συνδυασμός n ασαφών εξαρτημένων σχέσεων γίνεται με το συνδετικό ΚΑΙ, δηλ.

$$R^N = \bigwedge_{j=1}^{n} R^j, \text{ και}$$

$$\mu_R{}^N(x,y) = \bigwedge_{j=1}^{n} [(1-\mu_A{}^j(x)) \vee \mu_B{}^j(y)]$$

(3) Η συνεπαγωγή βασισμένη στην "Λογική Πολλαπλών Τιμών" του Lukasiewicz (Zadeh (1975))

$$\mu_R(x,y) = 1 \wedge (1 - \mu_A(x) + \mu_B(y))$$

όπου το "+" εδώ παριστά αριθμητική πρόσθεση. Ο συνδυασμός n ασαφών εξαρτημένων σχέσεων γίνεται και εδώ με το συνδετικό ΚΑΙ, δηλ.

$$R^N = \bigwedge_{j=1}^{n} R^j, \text{ και}$$

$$\mu_R{}^N(x,y) = \bigwedge_{j=1}^{n} [1 \wedge (1 - \mu_A{}^j(x) + \mu_B{}^j(y))]$$

(4) Η συνεπαγωγή Max-Product είναι μία άλλη που χρησιμοποιεί αριθμητικούς τελεστές στον ορισμό της(π.χ. όπως χρησιμοποιήθηκε από τους Holmblad και Østergaard (1981))

$$\mu_R(x,y) = \mu_A(x) \,.\, \mu_B(y)$$

Ο συνδυασμός n ασαφών εξαρτημένων σχέσεων γίνεται όπως και στην Max-Min συνεπαγωγή, δηλ.

$$R^N = \bigvee_{j=1}^{n} R^j, \text{ και}$$

$$\mu_R{}^N(x,y) = \bigvee_{j=1}^{n} (\mu_A{}^j(x) \,.\, \mu_B{}^j(y))$$

2.5. Σύνθεση και ο Συνθετικός Συμπερασματικός Κανόνας

Θεωρήστε δύο ασαφείς σχέσεις

R^1 : ΕΑΝ A ΤΟΤΕ B
R^2 : ΕΑΝ B ΤΟΤΕ C

τότε αυτές μπορούν να συνθεθούν σε μία σχέση

R^{12} : ΕΑΝ A ΤΟΤΕ C

Η σύνθεση

$$R^{12} = R^1 \circ R^2$$

μπορεί να ορισθεί είτε με έναν κανόνα max-min

$$\mu_{R^{12}}(x,z) = \bigvee_y (\ \mu_{R^1}(x,y) \wedge \mu_{R^2}(y,z)\ )$$

είτε με έναν κανόνα max-product

$$\mu_{R^{12}}(x,z) = \bigvee_y (\ \mu_{R^1}(x,y) \ .\ \mu_{R^2}(y,z)\ )$$

Οταν χρησιμοποιούνται διακριτά ασαφή σύνολα οι παραπάνω πράξεις είναι ισοδύναμες με το εσωτερικό γινόμενο δύο μητρών εφ'όσον ο πολλαπλασιασμός αντικατασταθεί με min και η πρόσθεση με max τελεστές. Είναι λογικό να προτείνουμε την χρήση των δύο ορισμών σε σχέση με τον ορισμό της συνεπαγωγής $\mu_R(x,y)$. Ετσι με ορισμούς συνεπαγωγής που περιέχουν μόνο τελεστές max και min (π.χ. Max-Min, VSS) χρησιμοποιούμε τον συνθετικό κανόνα (composition rule) max-min. Με ορισμούς συνεπαγωγής που περιέχουν αριθμητικούς τελεστές (και ιδιαίτερα την συνεπαγωγή Max-Product) θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε τον συνθετικό κανόνα max-product.

Το πρόβλημα που θα εξετάσουμε τώρα είναι η ανεύρεση του επακόλουθου (consequent) για κάποιο αίτιο (antecedent) όταν έχουμε τη σχέση μεταξύ των δύο ασαφών μεταβλητών. Εαν

$A = \{ \mu_A(x)/x \}$, $x \in X$
$B = \{ \mu_B(y)/y \}$, $y \in Y$

και η σχέση μεταξύ των είναι

$R = \{ \mu_R(x,y)/(x,y) \}$, $x \in X,\ y \in Y$

τότε εαν το αίτιο A' είναι

$A' = \{ \mu_{A'}(x)/x \}$, $x \in X$

το επακόλουθο, B', συμπεραίνεται χρησιμοποιόντας τον συνθετικό συμπερασματικό κανόνα (compositional rule of inference, Zadeh(1973)), δηλ.

$$B' = A' \circ R$$
$$= \{ \bigvee_{x} (\mu_{A'}(x) \wedge \mu_R(x,y)) / y \} \qquad , x \in X,\ y \in Y$$

όπου χρησιμοποιήται ο συνθετικός κανόνας max-min. Γιά παράδειγμα, θεωρήστε

$$\{ \mu_A(x) \} = \{ 0, 0.2, 0.7, 1, 0.4, 0 \}$$
$$\{ \mu_B(y) \} = \{ 0.3, 0.8, 1, 0.5, 0 \}$$

Τότε ο πίνακας της σχέσης τους (χρησιμοποιώντας τον VSS ορισμό συνεπαγωγής) είναι

$$\mu_R(x,y) = \begin{array}{c} \\ x \end{array} \overset{y}{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0.8 & 0.8 & 1 & 0.8 & 0.8 \\ 0.3 & 0.8 & 1 & 0.5 & 0.3 \\ 0.3 & 0.8 & 1 & 0.5 & 0 \\ 0.6 & 0.8 & 1 & 0.6 & 0.6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}$$

Εάν τώρα το νέο αίτιο είναι

$$\{ \mu_{A'}(x) \} = \{ 0, 0.3, 0.8, 1, 0.7, 0.2 \}$$

το νέο επακόλουθο δίδεται από

$$\{ \mu_{B'}(y) \} = \{ \bigvee_{x} (\mu_{A'}(x) \wedge \mu_R(x,y)) \}$$
$$= \{ \bigvee_{x} (0\wedge 1, 0.3\wedge 0.8, 0.8\wedge 0.3, 1\wedge 0.3, 0.7\wedge 0.6, 0.2\wedge 1),$$
$$\bigvee_{x} (0\wedge 1, 0.3\wedge 0.8, 0.8\wedge 0.8, 1\wedge 0.8, 0.7\wedge 0.8, 0.2\wedge 1), \ldots \}$$
$$= \{ \bigvee_{x} (0, 0.3, 0.3, 0.3, 0.6, 0.2),$$
$$\bigvee_{x} (0, 0.3, 0.8, 0.8, 0.7, 0.2), \ldots \}$$
$$= \{ 0.6, 0.8, 1, 0.6, 0.6 \}$$

Γενικά, μας ενδιαφέρουν ασαφείς αλγόριθμοι αποτελούμενοι από n ασαφείς εξαρτημένες σχέσεις κάθε μία από τις οποίες έχει m αίτια και ένα επακόλουθο, τότε

$$R^N = \{ \mu_{R^N}(x_1, x_2, \ldots, x_m, y) / (x_1, x_2, \ldots, x_m, y) \} \qquad , x_k \in X_k,\ y \in Y$$

Εάν τώρα τα νέα αίτια είναι

$$A_k' = \{ \mu_{A_k'}(x_k) / x_k \} \qquad , x_k \in X_k,\ k=1,2,\ldots m$$

τότε το νέο επακόλουθο, B', δίδεται από

$$B' = (\bigwedge_{k=1}^{m} A_k') \circ R^N$$
$$= \{ \mu_{B'}(y) / y \} \qquad , y \in Y$$

όπου

$$\mu_{B'}(y) = \bigvee_{x_1}\bigvee_{x_2} \ldots \bigvee_{x_m} [\, \bigwedge_{\kappa=1}^{m} \mu_{A_\kappa'}(x_\kappa) \wedge \mu_R^N(x_1,x_2,\ldots,x_m,y) \,]$$

Στο παραπάνω, τα αίτια A_κ συνδιάστηκαν με το συνδετικό ΚΑΙ υποθέτοντας μία δομή γιά την εξαρτημένη σχέση όπως η εξίσωση (2) στην παρ. 2.4., $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots A_m \rightarrow B$. Εάν η δομή της εξαρτημένης σχέσης ήταν όπως στην εξίσωση (1), $A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow \ldots A_m \rightarrow B$, θα έπρεπε να συνδιάσουμε τα αίτια με την επιλεγμένη συνεπαγωγή f_a. Αυτό αποτελεί μία πιό περίπλοκη διαδικασία.

Σαν εναλλακτική λύση θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε τον συνθετικό κανόνα max-product για τον συνθετικό συμπερασματικό κανόνα. Αυτός είναι κατάλληλος σε συνδιασμό με τον ορισμό συνεπαγωγής Max-Product όπως αναφέρθηκε πριν. Επιπλέον μπορούμε να γράψουμε τις ασαφείς εξαρτημένες σχέσεις υπό την μορφή της εξίσωσης (1), $A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow \ldots A_m \rightarrow B$, οπότε καταλήγουμε σε μία σχέση που περιέχει κυρίως τελεστές πολλαπλασιασμού :

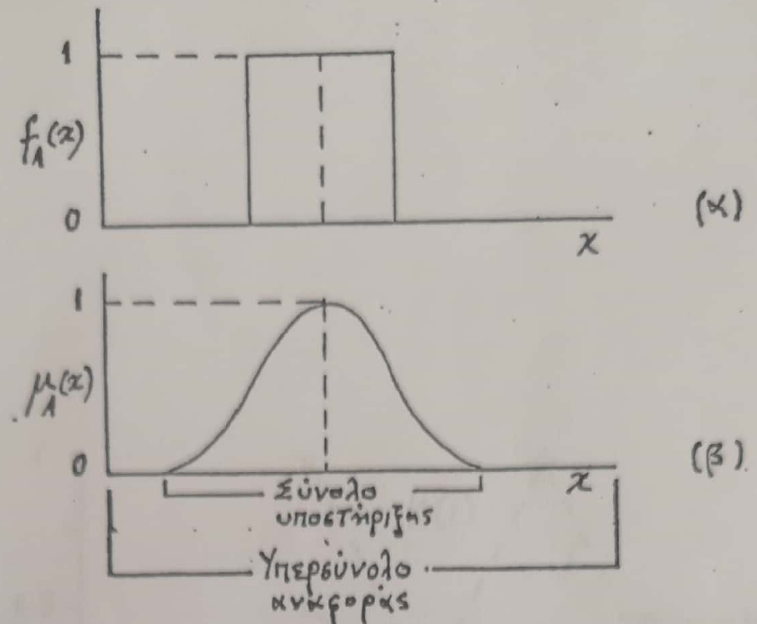
$$\mu_{B'}(y) = \bigvee_{x_1}\bigvee_{x_2} \ldots \bigvee_{x_m} [\, \prod_{\kappa=1}^{m} \mu_{A_\kappa'}(x_\kappa) . \mu_R^N(x_1,x_2,\ldots,x_m,y) \,]$$

όπου

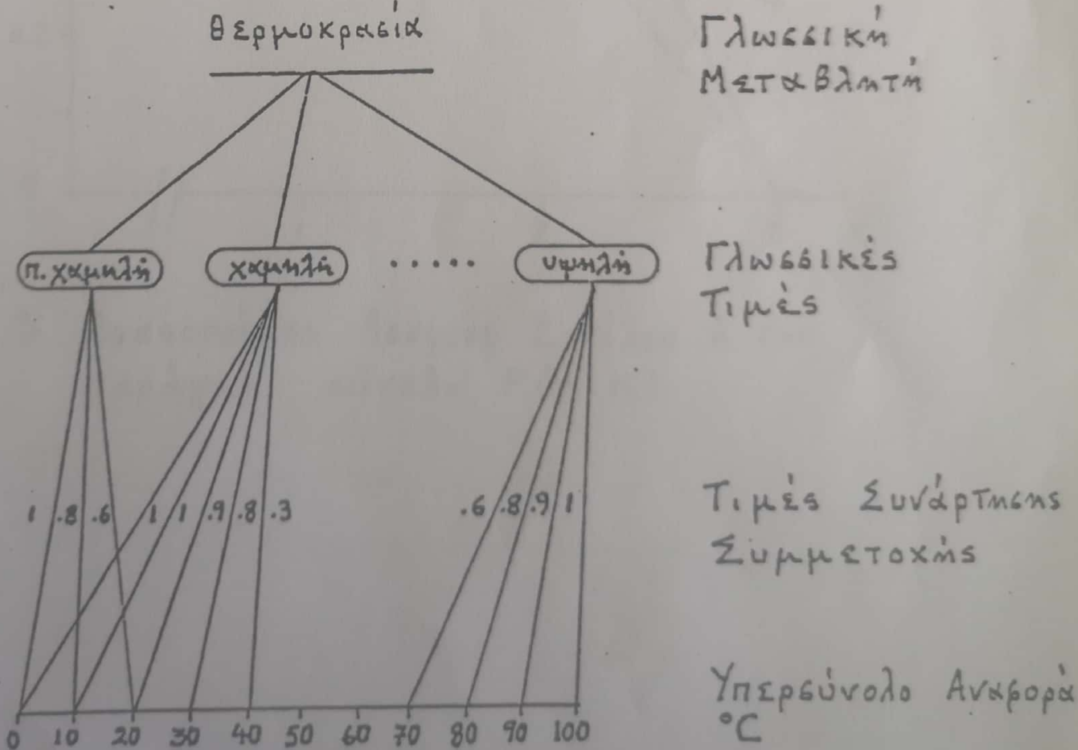
$$\mu_R^N(x_1,x_2,\ldots,x_m,y) = f_b[\, \prod_{\kappa=1}^{m} \mu_{A_\kappa^1}(x_\kappa) . \mu_{B^1}(y),\ \prod_{\kappa=1}^{m} \mu_{A_\kappa^2}(x_\kappa) . \mu_{B^2}(y), \ldots,\ \prod_{\kappa=1}^{m} \mu_{A_\kappa^n}(x_\kappa) . \mu_{B^n}(y) \,]$$

και επειδή το f_b πραγματοποιήται με τον τελεστή max,

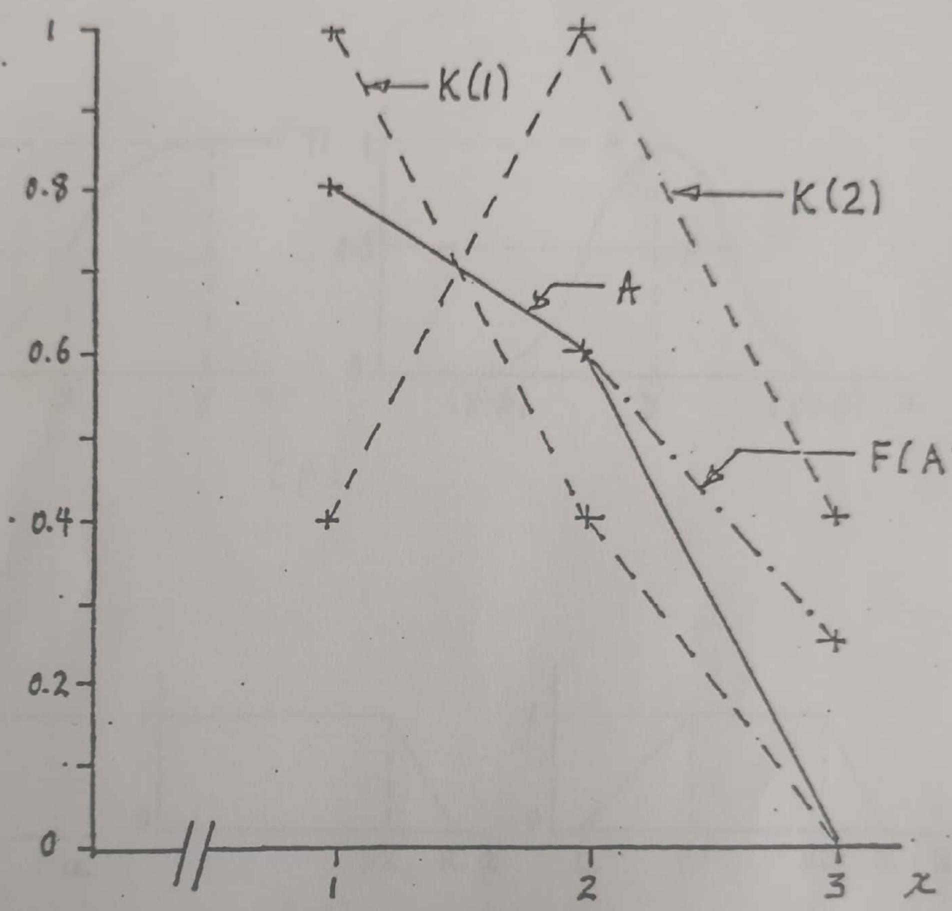
$$\mu_R^N(x_1,x_2,\ldots,x_m,y) = \bigvee_{j=1}^{n} [\, \prod_{\kappa=1}^{m} \mu_{A_\kappa^j}(x_\kappa) . \mu_{B^j}(y) \,].$$



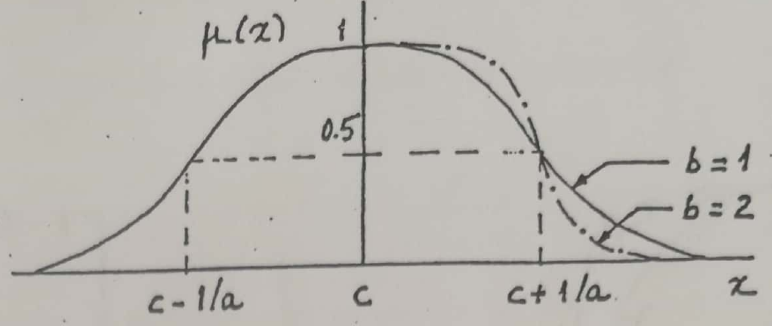
Σχ. 2.1 (α) Κλασσικό και (β) Ασαφές Σύνολο



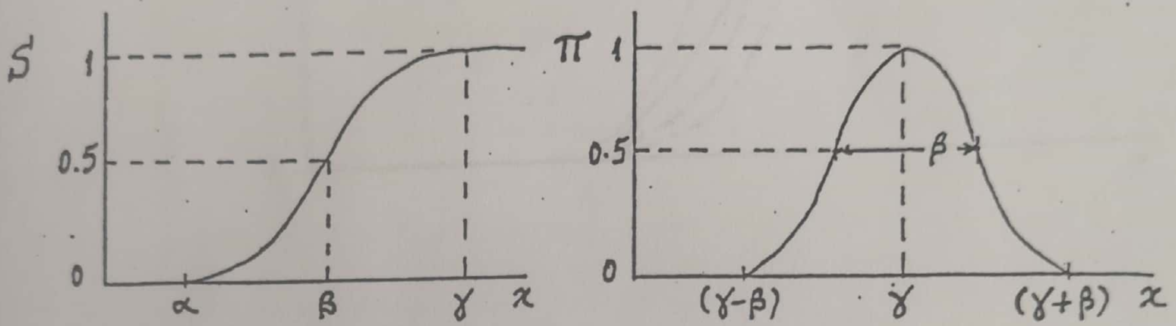
Σχ. 2.2 Γλωσσική Μεταβλητή "Θερμοκρασία" και οι τιμές της.



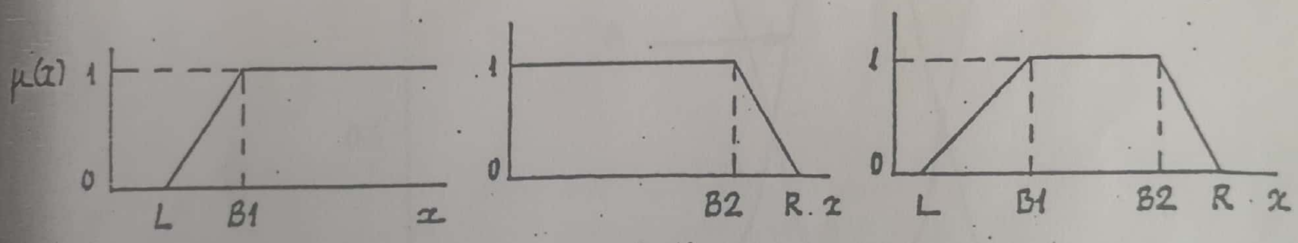
Σχ. 2.3 Ασαφοποίηση Ασαφούς Συνόλου Α που παράγει σύνολο F(A;K)



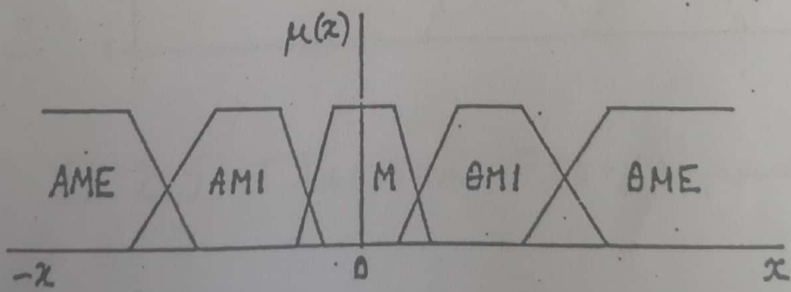
(α)



(β)



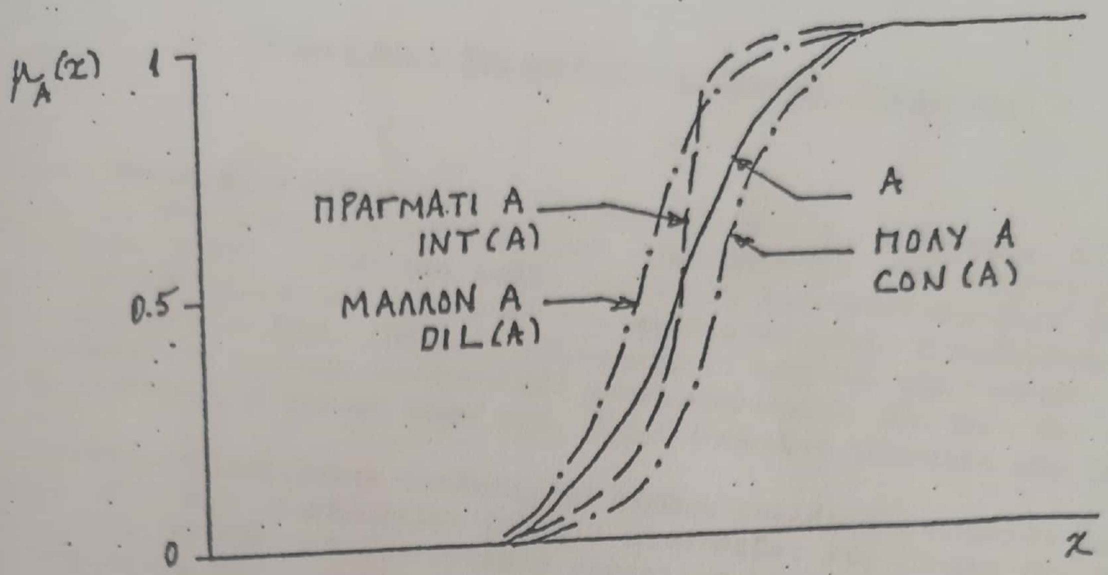
(γ)

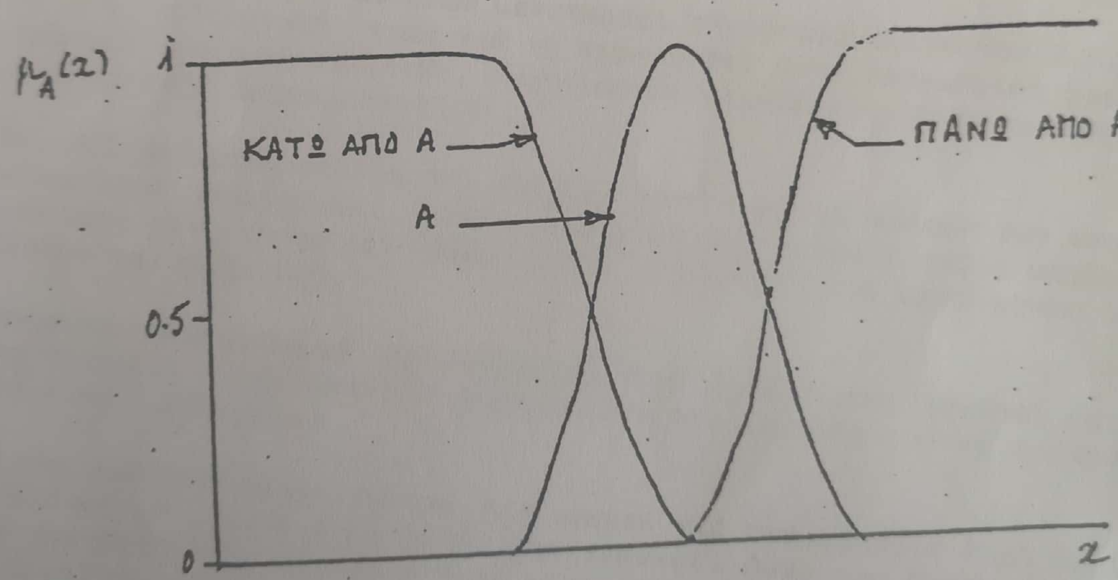


AME, AMI = Αρνητικό Μεγάλο, Μικρό
ΘΜΕ, ΘΜΙ = Θετικό Μεγάλο, Μικρό
M = Περίπου Μηδέν

(δ)

Σχ. 2.4 Ορισμοί Συναρτήσεων Συμμετοχής





Σχ. 2.5 Γλωσσικά Περιγράμματα

3. Γενική Δομή Βασισμένων-σε-Κανόνες Ρυθμιστών

Ενας βασισμένος-σε-κανόνες (rule-based), Β.σ.Κ, ρυθμιστής είναι ένας του οποίου όλη η στρατηγική ελέγχου περιγράφεται μέσω γλωσσικών κανόνων. Οι κανόνες αυτοί συνδέουν, χωρίς ακρίβεια, διάφορες συνθήκες του συστήματος με τις απαιτούμενες ενέργειες που πρέπει να κάνει ο ρυθμιστής. Οι κανόνες εκφράζονται ως ΕΑΝ...ΤΟΤΕ... εξαρτημένες σχέσεις και μπορούν να πραγματοποιηθούν σαν λογικές συνεπαγωγές χρησιμοποιόντας τεχνικές της θεωρίας ασαφών συνόλων. Η γενική δομή ενός Β.σ.Κ ρυθμιστή φαίνεται στο Σχ. 3.1.

Το σύστημα διασύνδεσης (interface) εξόδου συλλέγει αιτιοκρατικές πληροφορίες περί της διαδικασίας και τις μεταφράζει στη γλώσσα των ασαφών συνόλων. Αυτό το σύστημα διασύνδεσης μπορεί να περιέχει αναλογικούς/ψηφιακούς μετατροπείς, συντελεστές κλιμάκωσης και κβαντιστές, υπολογιστές σφάλματος και του ρυθμού μεταβολής των ελεγχομένων μεταβλητών, εξομαλυντές των τιμών των μεταβλητών, κτλ. Εδώ επίσης υπεισέρχονται και οι διάφορες ονομαστικές τιμές (setpoints) που πρέπει να ακολουθήσει ο Β.σ.Κ ρυθμιστής.

Το σύστημα διασύνδεσης εισόδου μετατρέπει την ασαφή έξοδο του Β.σ.Κ ρυθμιστή σε μία πραγματική τιμή γιά να εφαρμοσθεί στην πραγματική διαδικασία. Θα περιέχει απο-ασαφοποιητές, συντελεστές κλιμάκωσης, ολοκληρωτές, ψηφιακούς/αναλογικούς μετατροπείς κτλ.

Στο Σχ. 3.1 φαίνεται επίσης ότι υπάρχει θέση γιά τον ορισμό των ασαφών συνόλων που χρησιμοποιούνται στην απεικόνιση των κανόνων στους υπολογισμούς του ρυθμιστή και επίσης των υπερσυνόλων αναφοράς των μεταβλητών εισόδου και εξόδου του ρυθμιστή.

Ο μηχανισμός συμπερασμού χρησιμοποιεί τους διαθέσιμους κανόνες και δίδει γιά την τρέχουσα κατάσταση της διαδικασίας την απόφαση γιά το επόμενο σήμα εισόδου στην διαδικασία.

Η δομή του ρυθμιστή είναι γενική και ισχύει γιά οποιαδήποτε διαδικασία που είναι δυνατόν να ελεγχθεί με αυτήν την τεχνική. Αυτό που δίδει στον ρυθμιστή την ταυτότητα του και τον κάνει εφαρμόσιμο γιά την συγκεκριμένη διαδικασία είναι το σύνολο των κανόνων που του δίδονται. Οι κανόνες περιέχουν τις απαιτούμενες πληροφορίες γιά την επίτευξη του συγκεκριμένου έργου ελέγχου με την συγκεκριμένη διαδικασία. Αυτό είναι σημαντικό να τονισθεί επειδή είναι η βασισμένη-σε-κανόνες φύση του ρυθμιστή που τον κάνουν επιτυχή. Η θεωρία της ασαφούς λογικής χρησιμοποιήται μόνο σαν μέσο γιά την μετατροπή των κανόνων ελέγχου σε μία μαθηματική μορφή και γιά να συμπαιραίνουμε αποφάσεις από αυτούς. Θεωρήστε ένα σύνολο κανόνων

$$
\begin{aligned}
R^N &= \{ R^1, R^2, \dots, R^n \} \\
&= \{ s^1 \rightarrow a^1, s^2 \rightarrow a^2, \dots, s^n \rightarrow a^n \} \\
&= \bigcup_{j=1}^{n} s^j \rightarrow a^j
\end{aligned}
$$

οι οποίοι περιέχουν πληροφορίες περί του τι ενέργεια να κάνουμε, a^j, κάτω από ένα σύνολο υποθετικών συνθηκών, s^j (χρησιμοποιούμε επιγράμματα γιά να

3. Γενική Δομή Βασισμένων-σε-Κανόνες Ρυθμιστών

Ενας βασισμένος-σε-κανόνες (rule-based), Β.σ.Κ, ρυθμιστής είναι ένας του οποίου όλη η στρατηγική ελέγχου περιγράφεται μέσω γλωσσικών κανόνων. Οι κανόνες αυτοί συνδέουν, χωρίς ακρίβεια, διάφορες συνθήκες του συστήματος με τις απαιτούμενες ενέργειες που πρέπει να κάνει ο ρυθμιστής. Οι κανόνες εκφράζονται ως ΕΑΝ...ΤΟΤΕ... εξαρτημένες σχέσεις και μπορούν να πραγματοποιηθούν σαν λογικές συνεπαγωγές χρησιμοποιόντας τεχνικές της θεωρίας ασαφών συνόλων. Η γενική δομή ενός Β.σ.Κ ρυθμιστή φαίνεται στο Σχ. 3.1.

Το σύστημα διασύνδεσης (interface) εξόδου συλλέγει αιτιοκρατικές πληροφορίες περί της διαδικασίας και τις μεταφράζει στη γλώσσα των ασαφών συνόλων. Αυτό το σύστημα διασύνδεσης μπορεί να περιέχει αναλογικούς/ψηφιακούς μετατροπείς, συντελεστές κλιμάκωσης και κβαντιστές, υπολογιστές σφάλματος και του ρυθμού μεταβολής των ελεγχομένων μεταβλητών, εξομαλυντές των τιμών των μεταβλητών, κτλ. Εδώ επίσης υπεισέρχονται και οι διάφορες ονομαστικές τιμές (setpoints) που πρέπει να ακολουθήσει ο Β.σ.Κ ρυθμιστής.

Το σύστημα διασύνδεσης εισόδου μετατρέπει την ασαφή έξοδο του Β.σ.Κ ρυθμιστή σε μία πραγματική τιμή γιά να εφαρμοσθεί στην πραγματική διαδικασία. Θα περιέχει απο-ασαφοποιητές, συντελεστές κλιμάκωσης, ολοκληρωτές, ψηφιακούς/αναλογικούς μετατροπείς κτλ.

Στο Σχ. 3.1 φαίνεται επίσης ότι υπάρχει θέση γιά τον ορισμό των ασαφών συνόλων που χρησιμοποιούνται στην απεικόνιση των κανόνων στους υπολογισμούς του ρυθμιστή και επίσης των υπερσυνόλων αναφοράς των μεταβλητών εισόδου και εξόδου του ρυθμιστή.

Ο μηχανισμός συμπερασμού χρησιμοποιεί τους διαθέσιμους κανόνες και δίδει γιά την τρέχουσα κατάσταση της διαδικασίας την απόφαση γιά το επόμενο σήμα εισόδου στην διαδικασία.

Η δομή του ρυθμιστή είναι γενική και ισχύει γιά οποιαδήποτε διαδικασία που είναι δυνατόν να ελεγχθεί με αυτήν την τεχνική. Αυτό που δίδει στον ρυθμιστή την ταυτότητα του και τον κάνει εφαρμόσιμο γιά την συγκεκριμένη διαδικασία είναι το σύνολο των κανόνων που του δίδονται. Οι κανόνες περιέχουν τις απαιτούμενες πληροφορίες γιά την επίτευξη του συγκεκριμένου έργου ελέγχου με την συγκεκριμένη διαδικασία. Αυτό είναι σημαντικό να τονισθεί επειδή είναι η βασισμένη-σε-κανόνες φύση του ρυθμιστή που τον κάνουν επιτυχή. Η θεωρία της ασαφούς λογικής χρησιμοποιήται μόνο σαν μέσο γιά την μετατροπή των κανόνων ελέγχου σε μία μαθηματική μορφή και γιά να συμπαιραίνουμε αποφάσεις από αυτούς. Θεωρήστε ένα σύνολο κανόνων

$$
\begin{aligned}
R^N &= \{ R^1, R^2, \ldots, R^n \} \\
&= \{ s^1 \rightarrow a^1, s^2 \rightarrow a^2, \ldots, s^n \rightarrow a^n \} \\
&= \bigcup_{j=1}^{n} s^j \rightarrow a^j
\end{aligned}
$$

οι οποίοι περιέχουν πληροφορίες περί του τι ενέργεια να κάνουμε, a^j, κάτω από ένα σύνολο υποθετικών συνθηκών, s^j (χρησιμοποιούμε επιγράμματα γιά να ξεχωρίζουμε τους κανόνες σε μία συλλογή). Γενικά, η συνθήκη s^j και η ενέργεια α^j αποτελούνται από ένα ορισμένο αριθμό μεταβλητών. Ετσι η συνθήκη s^j μπορεί να θεωρηθεί ως ένα λογικό γινόμενο m μεταβλητών :

$$s^{j1} \times s^{j2} \times \dots \times s^{jm}$$

και το μέρος της ενέργειας ενός κανόνα α^j μπορεί να θεωρηθεί ως η ένωση r μεταβλητών :

$$c^{j1} + \alpha^{j2} + \dots + \alpha^{jr}$$

Ετσι το σύνολο των κανόνων γράφεται

$$R^N = \mathop{f_e}_{j=1}^{n} s^{j1} \times s^{j2} \times \dots \times s^{jm} \rightarrow \alpha^{j1} + \alpha^{j2} + \dots + \alpha^{jr}$$

και χρησιμοποιόντας την ιδιότητα της επιμεριστικότητας,

$$\begin{aligned} R^N &= \{ \mathop{f_e}_{j=1}^{n} s^{j1} \times s^{j2} \times \dots \times s^{jm} \rightarrow \alpha^{j1}, \\ &\quad \mathop{f_e}_{j=1}^{n} s^{j1} \times s^{j2} \times \dots \times s^{jm} \rightarrow \alpha^{j2}, \dots, \\ &\quad \mathop{f_e}_{j=1}^{n} s^{j1} \times s^{j2} \times \dots \times s^{jm} \rightarrow \alpha^{jr} \} \\ &= \bigcup_{p=1}^{r} \mathop{f_e}_{j=1}^{n} s^{j1} \times s^{j2} \times \dots \times s^{jm} \rightarrow \alpha^{jp} \\ &= \bigcup_{p=1}^{r} RB^p \end{aligned}$$

δηλ.

$$R^N = \underbrace{\underbrace{\boxed{RB^1}}_{m \text{ αιτια} + 1 \text{ επακόλουθο}} + \boxed{RB^2} \; \dots \; \boxed{RB^r}}_{r \text{ επακόλουθα}} \Big\} \; n \text{ κανόνες}$$

Το παραπάνω αντιπροσωπεύει την δομή των κανόνων γιά την γενική περίπτωση ενός ρυθμιστή πολλαπλών εισόδων/εξόδων. Το σύνολο R^N περιέχει r υποσύνολα κανόνων (rule blocks, RB), ένα γιά κάθε μεταβλητή εξόδου. Κάθε υποσύνολο κανόνων περιέχει n κανόνες στους οποίους το μέρος της συνθήκης έχει m μεταβλητές (αίτια) και το μέρος της ενέργειας μία μόνο μεταβλητή (επακόλουθο). Ετσι ένας ρυθμιστής πολλαπλών εισόδων/εξόδων μπορεί να θεωρηθεί σαν ένας αριθμός ρυθμιστών πολλαπλών εισόδων και μίας εξόδου.