

Φυσικοί Υπολογισμοί και Νευρωνικά Δίκτυα

ΤΕΧΝΗΤΑ ΝΕΥΡΩΝΙΚΑ ΔΙΚΤΥΑ

ΜΑΘΗΜΑ 5^ο

**ΑΝΤΑΓΩΝΙΣΤΙΚΗ ΜΑΘΗΣΗ ΚΑΙ
ΑΥΤΟΟΡΓΑΝΟΥΜΕΝΟΙ ΧΑΡΤΕΣ (SOM)**

Μάθηση χωρίς επίβλεψη (unsupervised learning)

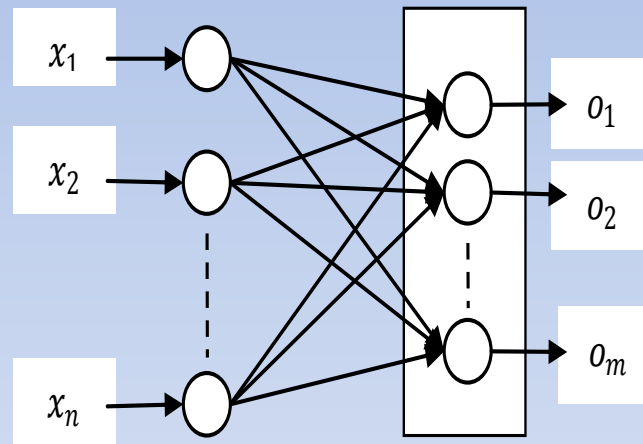
- Το σύνολο εκπαίδευσης αποτελείται μόνο από πρότυπα που χαρακτηρίζουν το πρόβλημα χωρίς τιμές στόχους.
- Άρα, $D = \{(\mathbf{x}^p)\}, p = 1, \dots, P$
- Τεχνική κατάλληλη για μια σειρά προβλημάτων όπως:
 - Ομαδοποίηση δεδομένων (clustering)
 - Κατασκευή χαρτών δεδομένων (data maps)
 - Μείωση της διάστασης των δεδομένων (dimensionality reduction)
 - Εκτίμηση πυκνότητας πιθανότητας (probability density estimation)
- Τεχνική που υλοποιείται από νευρωνικά δίκτυα ανταγωνιστικής μάθησης (competitive learning)

Ανταγωνιστική Μάθηση

- Η μέθοδος μαθησης σύμφωνα με την οποία οι νευρώνες ενός δικτύου ανταγωνίζονται μεταξύ τους κατά τη διαδικασία της μάθησης ως προς το ποιός νευρώνας εκπροσωπεί καλύτερα τα δεδομένα
- Ένα ΤΝΔ ανταγωνιστικής μάθησης συνήθως αποτελείται από
 - ένα επίπεδο εισόδου, και
 - ένα επίπεδο με ανταγωνιστικούς νευρώνες, που ονομάζεται ανταγωνιστικό επίπεδο (competitive layer).
- Τύποι ΤΝΔ ανταγωνιστικής μάθησης:
 - Learning Vector Quantization (LVQ),
 - Self Organizing Maps (SOM) ή Self-Organizing Feature Maps

ΤΝΔ Ανταγωνιστικής Μάθησης

- Παράδειγμα ΤΝΔ ανταγωνιστικής μάθησης



ΤΝΔ Ανταγωνιστικής Μάθησης

- Χαρακτηριστικά ενός ανταγωνιστικού νευρώνα i
- Έχει ένα σύνολο βαρών $\mathbf{w}_i = (w_{i,1}, w_{i,2}, \dots, w_{i,n})$ που αντιστοιχεί σε κάποιο σημείο του χώρου των προτύπων
- Υπολογίζει ένα μέτρο ομοιότητας (ή απόστασης) ανάμεσα στο διάνυσμα $\mathbf{w}_i$ και στο πρότυπο $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$
- Η σύγκριση της απόστασης του διανύσματος βαρών κάθε νευρώνα από το πρότυπο συνεπάγεται έναν ανταγωνισμό μεταξύ των νευρώνων για το ποιος είναι πλησιέστερα στο εν λόγω πρότυπο.
- Το αποτέλεσμα αυτού του ανταγωνισμού είναι η ανάδειξη ενός νευρώνα νικητή του οποίου διάνυσμα βαρών του είναι πλησιέστερα προς το διάνυσμα εισόδου $\mathbf{x}$.
- Ο νικητής νευρώνας θέτει την έξοδό του ίση με 1, ενώ οι υπόλοιποι νευρώνες δίνουν έξοδο ίση με 0

ΤΝΔ Ανταγωνιστικής Μάθησης

- Εκπαίδευση (τροποποίηση των βαρών των νευρώνων)
- Ο νικητής-νευρώνας είναι αυτός που συνήθως μεταβάλλει τις τιμές των βαρών του περισσότερο (ή και αποκλειστικά) σε σύγκριση με τους υπόλοιπους ανταγωνιστικούς νευρώνες. Αυτό αποτελεί βασική αρχή της ανταγωνιστικής μάθησης.
- Η έννοια της αυτο-οργάνωσης (self-organization): συγκεκριμένοι νευρώνες μαθαίνουν να ανταποκρίνονται σε συγκεκριμένα ερεθίσματα (διανύσματα εισόδου).
- Ως μέτρο απόστασης χρησιμοποιείται συνήθως η ευκλείδεια $\|\mathbf{x} - \mathbf{w}_i\|_2$
- Για ένα πρότυπο $\mathbf{x}$, ο νικητής-νευρώνας m είναι αυτός με τη μικρότερη απόσταση δηλ. $\mathbf{w}_m = \min_i \|\mathbf{x} - \mathbf{w}_i\|_2$
- Η εκπαίδευση επιτυγχάνεται “μετακινώντας” το διάνυσμα βαρών $\mathbf{w}_m$ του νικητή-νευρώνα προς το διάνυσμα εισόδου $\mathbf{x}$.

ΤΝΔ Ανταγωνιστικής Μάθησης

- Άσκηση: Έστω ένα ΤΝΔ ανταγωνιστικής μάθησης με τρεις ανταγωνιστικούς νευρώνες και αντίστοιχα διανύσματα βαρών:

$$\mathbf{w}_1 = (0,0,0)^T$$

$$\mathbf{w}_2 = (1,1,1)^T$$

$$\mathbf{w}_3 = (-1,-1,-1)^T$$

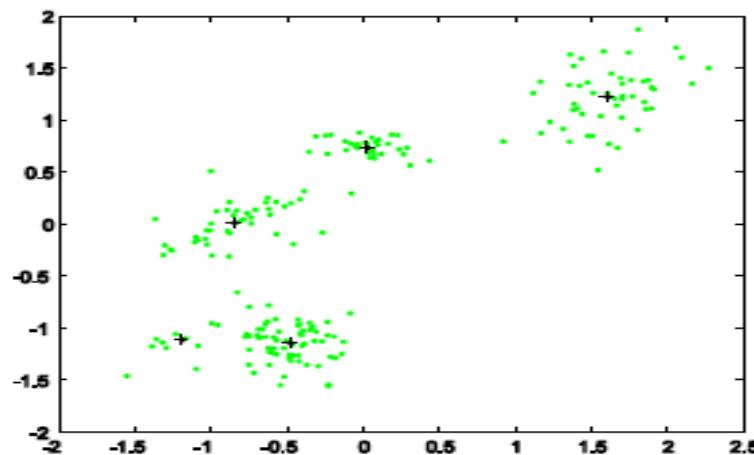
- Ποια είναι η διάσταση n των δεδομένων εισόδου;
- Αν η είσοδος στο ΤΝΔ είναι το πρότυπο (παράδειγμα)

$$\mathbf{x} = (-0.3, 0.1, 0.2)^T$$

- Ποιος θα είναι ο νικητής-νευρώνας με βάση την ευκλείδεια απόσταση;

Ομαδοποίηση (clustering)

- Διαμερισμός του συνόλου παραδειγμάτων σε υποσύνολα που ονομάζονται ομάδες (clusters): θέλουμε τα δεδομένα της ίδιας ομάδας να είναι 'κοντά' μεταξύ τους (σύμφωνα με κάποια νόρμα απόστασης) και μακριά από τα δεδομένα των άλλων ομάδων.
- Συνήθως ο αριθμός των ομάδων καθορίζεται από τον χρήστη.
- Κάθε ομάδα μπορεί περιγράφεται από ένα αντιπρόσωπο: συνήθως το κέντρο της ομάδας (κεντροειδές) δηλ. από τον μέσο όρο των προτύπων (παραδειγμάτων εκπαίδευσης) της ομάδας.



Αλγόριθμος k -μέσων (k -means)

- Δίνεται ένα σύνολο εκπαίδευσης

$$D = \{(\mathbf{x}^p)\}, \mathbf{x}^p = (x_{p,1}, x_{p,2}, \dots, x_{p,n})^T \quad p = 1, \dots, P$$

- Δίνεται ο αριθμός των ομάδων έστω M (καθορίζεται από τον χρήστη)
- Ο αλγόριθμος είναι κατάλληλος για την εύρεση ομάδων σε μορφή 'νεφών'.
- Χρησιμοποιεί ως αντιπρόσωπο για κάθε ομάδα έστω o_i ένα διάνυσμα $\mathbf{w}_i = (w_{i,1}, w_{i,2}, \dots, w_{i,n})^T$ που περιέχει τις συντεταγμένες του κέντρου της ομάδας.
- Ο αλγόριθμος k -μέσων είναι διαδομένος κυρίως λόγω της απλότητας και της ευκολίας στην υλοποίησή του.

Αλγόριθμος k -μέσων (k -means)

- Αρχικοποίηση του μετρητή επαναλήψεων $t=0$ και των M κέντρων $\mathbf{w}_i(0)$, $i = 1, \dots, M$
- Για κάθε t (σε κάθε επανάληψη)
 - Για κάθε πρότυπο εκπαίδευσης $\mathbf{x}^p = (x_{p,1}, x_{p,2}, \dots, x_{p,n})^T$
 - Υπολογισμός της ευκλείδειας απόστασης του $\mathbf{x}^p$ από όλα τα κέντρα $\mathbf{w}_i$
 - Τοποθέτηση του $\mathbf{x}^p$ στο σύνολο O_i με τη μικρότερη απόσταση από το κέντρο $\mathbf{w}_i$ της αντίστοιχης ομάδας, δηλαδή για την οποία ισχύει:

$$d(\mathbf{x}^p, \mathbf{w}_m) = \min_i d(\mathbf{x}^p, \mathbf{w}_i)$$
 - Για κάθε ομάδα i υπολογισμός των νέων κέντρων $\mathbf{w}_i(t+1)$ ως το μέσο όρο των στοιχείων του συνόλου O_i
 - Έλεγχος τερματισμού με κριτήριο αν έχουν τα διανύσματα $\mathbf{w}_i$ μεταβληθεί μεταξύ δύο επαναλήψεων. Εάν ναι, τότε $t=t+1$ και έναρξη νέας επανάληψης, αλλιώς τερματισμός.

Αλγόριθμος k -μέσων (k -means)

- Έστω ότι για κάθε ομάδα i αθροίζουμε τις αποστάσεις όλων των προτύπων από το κέντρο $\mathbf{w}_i$ της εν λόγω ομάδας και ονομάζουμε το άθροισμα αυτό διασπορά των προτύπων από το κέντρο της ομάδας

$$S(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_M) = \sum_{i=1}^M \sum_{\mathbf{x}^p \in O_i} \|\mathbf{x}^p - \mathbf{w}_i\|^2$$

- Ο αλγόριθμος ελαχιστοποιεί τη συνολική διασπορά των ομάδων
- Ο αλγόριθμος k -means εξαρτάται από την αρχικοποίηση των κέντρων.
- Τα κέντρα συνήθως αρχικοποιούνται επιλέγοντας τυχαία M πρότυπα.
- Μία προσέγγιση: Πολλές επανεκτελέσεις και διατήρηση της καλύτερης λύσης (αυτής με την μικρότερη συνολική διασπορά).

Αλγόριθμος LVQ για ομαδοποίηση

- Learning Vector Quantization (LVQ)
(Εκπαιδευόμενος Διανυσματικός Κβαντιστής)
- Αποτελεί τη σειριακή (on-line) έκδοση του k -means
- Υλοποιείται με ΤΝΔ ανταγωνιστικής μάθησης
- Δίνεται ένα σύνολο εκπαίδευσης

$$D = \{(\mathbf{x}^p)\}, \mathbf{x}^p = (x_{p,1}, x_{p,2}, \dots, x_{p,n})^T \quad p = 1, \dots, P$$
- Δίνεται ο αριθμός των ομάδων έστω M (καθορίζεται από τον χρήστη)
- Άρα προκύπτει ένα ΤΝΔ ανταγωνιστικής μάθησης με M ανταγωνιστικούς νευρώνες.
- Το διάνυσμα βαρών $\mathbf{w}_i = (w_{i,1}, w_{i,2}, \dots, w_{i,n})^T$ του ανταγωνιστικού νευρώνα j περιέχει τις συντεταγμένες του κέντρου της ομάδας O_i

Αλγόριθμος LVQ για ομαδοποίηση

- Αρχικοποίηση του μετρητή επαναλήψεων $t=0$ και των M κέντρων $\mathbf{w}_i(0)$, $i = 1, \dots, M$
- Αρχικοποίηση του ρυθμού μάθησης, του μετρητή εποχών $t=0$ και του μετρητή επαναλήψεων $\tau=0$.
- Σε κάθε εποχή t , για κάθε πρότυπο $p=1, \dots, P$:
 - Εφαρμογή του προτύπου $\mathbf{x}^p$ ως εισόδου στο ΤΝΔ.
 - Εύρεση του νικητή-νευρώνα m : $d(\mathbf{x}^p, \mathbf{w}_m) = \min_i d(\mathbf{x}^p, \mathbf{w}_i)$
 - Ενημέρωση των βαρών μόνο του νικητή-νευρώνα m , ώστε το κέντρο $\mathbf{w}_m$ να πλησιάσει στο πρότυπο $\mathbf{x}^p$

$$w_{m,j}(\tau + 1) = w_{m,j}(\tau) + \eta(x_{p,j} - w_{m,j}), \quad j = 1, \dots, n$$

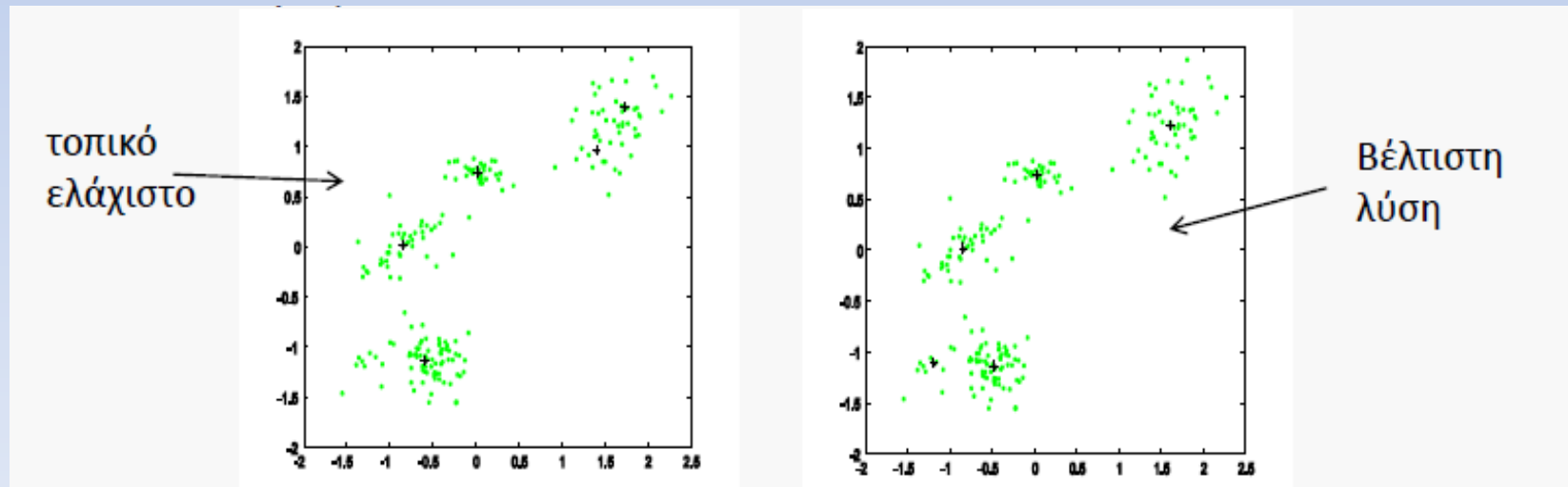
$$w_{i,j}(\tau + 1) = w_{i,j}(\tau), \quad i \neq m, \quad j = 1, \dots, n$$

Αλγόριθμος LVQ για ομαδοποίηση

- $\tau = \tau + 1$
- Έλεγχος τερματισμού.
Εάν όχι $t = t + 1$ και έναρξη νέας εποχής.

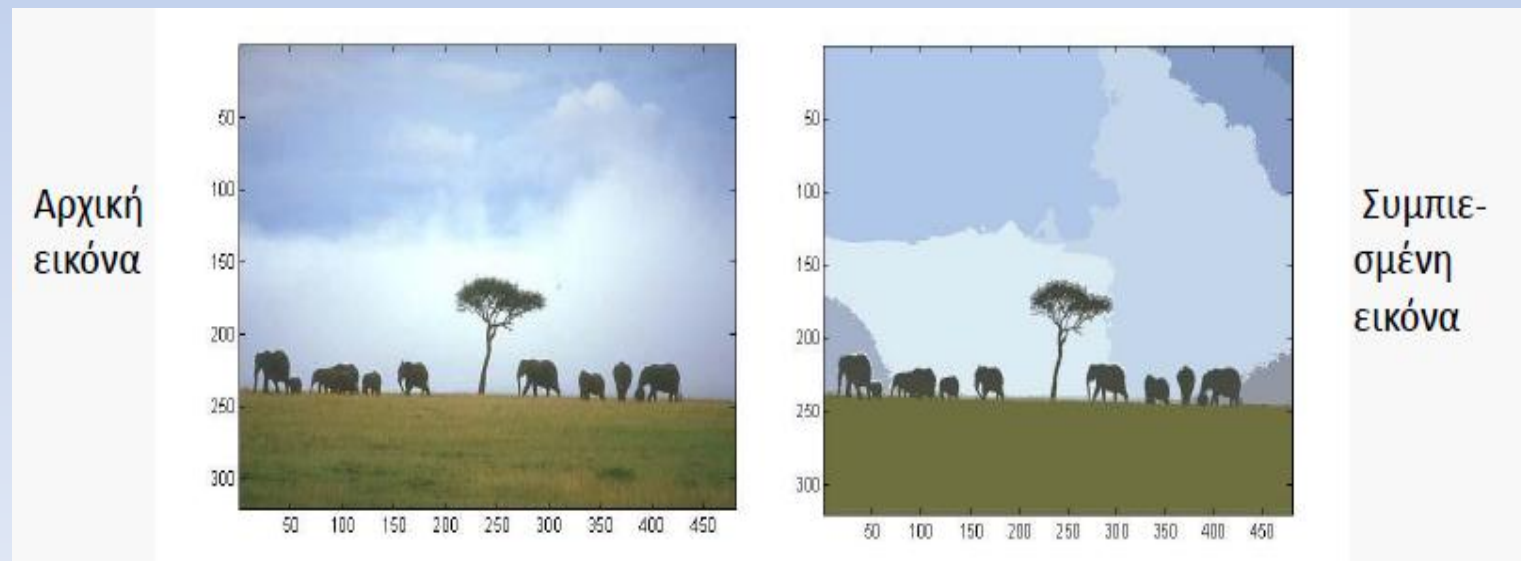
Αλγόριθμος LVQ για ομαδοποίηση

- Ελαχιστοποιείται η συνολική διασπορά των ομάδων (όπως και στον k -means).
- Εξαρτάται από την αρχικοποίηση των κέντρων: συνήθως αρχικοποιούνται επιλέγοντας τυχαία M πρότυπα.
- Μία προσέγγιση: Πολλές επανεκτελέσεις και διατήρηση της καλύτερης λύσης (αυτής με την μικρότερη συνολική διασπορά).



Αλγόριθμος LVQ για ομαδοποίηση

- Διανυσματικός Κβαντισμός Εικόνας
- Η εικόνα χωρίζεται σε παράθυρα (π.χ. 8x8). Οι τιμές των pixels σε κάθε παράθυρο συνιστούν ένα διάνυσμα διάστασης n .
- Τα διανύσματα των παραθύρων ομαδοποιούνται σε M ομάδες.
- Τελικά κάθε παράθυρο της εικόνας αναπαρίσταται από το κέντρο της ομάδας στην οποία ανήκει.



Αλγόριθμος LVQ για ταξινόμηση

- Υλοποιείται με ΤΝΔ ανταγωνιστικής μάθησης
- Δίνεται ένα σύνολο εκπαίδευσης

$$D = \{(\mathbf{x}^p)\}, \mathbf{x}^p = (x_{p,1}, x_{p,2}, \dots, x_{p,n})^T \quad p = 1, \dots, P$$
- Δίνεται ο αριθμός των ομάδων έστω M (καθορίζεται από τον χρήστη)
- Άρα προκύπτει ένα ΤΝΔ ανταγωνιστικής μάθησης με M ανταγωνιστικούς νευρώνες.
- Το διάνυσμα βαρών $\mathbf{w}_i = (w_{i,1}, w_{i,2}, \dots, w_{i,n})^T$ του ανταγωνιστικού νευρώνα j περιέχει τις συντεταγμένες του κέντρου της ομάδας O_i
- Κάθε ανταγωνιστικός νευρώνας i αντιστοιχεί σε μία κατηγορία C_i (την οποία αναθέτει ο χρήστης).
- Η αρχικοποίηση γίνεται θέτοντας το διάνυσμα βαρών ενός νευρώνα που τον αντιστοιχίζουμε στην κατηγορία C_i ίσο με κάποιο παράδειγμα εκπαίδευσης της κατηγορίας C_i .

Αλγόριθμος LVQ για ταξινόμηση

- Σε κάθε βήμα εφαρμόζουμε ως είσοδο το πρότυπο $\mathbf{x}^p$ και βρίσκουμε τον νικητή-νευρώνα m . Τα βάρη των υπόλοιπων νευρώνων δεν μεταβάλλονται. Τα βάρη του νικητή νευρώνα m μεταβάλλονται ως εξής:
 - Αν η κατηγορία του $\mathbf{x}^p$ και του νικητή νευρώνα m συμπίπτουν, το διάνυσμα βαρών $\mathbf{w}_m$ ‘μετακινείται’ προς το πρότυπο $\mathbf{x}^p$:

$$w_{m,j}(\tau + 1) = w_{m,j}(\tau) + \eta(x_{p,j} - w_{m,j}), \quad j = 1, \dots, n$$

- Αν η κατηγορία του $\mathbf{x}^p$ και του νικητή νευρώνα m διαφέρουν, το διάνυσμα βαρών $\mathbf{w}_m$ ‘απομακρύνεται’ από το πρότυπο $\mathbf{x}^p$:

$$w_{m,j}(\tau + 1) = w_{m,j}(\tau) - \eta(x_{p,j} - w_{m,j}), \quad j = 1, \dots, n$$

- Μετά το τέλος της εκπαίδευσης, ταξινόμηση νέου παραδείγματος στην κατηγορία του νικητή-νευρώνα.

Αλγόριθμος LVQ για ταξινόμηση

- Άσκηση: Έστω ένα LVQ για ταξινόμηση δύο κατηγοριών με τρεις ανταγωνιστικούς νευρώνες και αντίστοιχα διανύσματα βαρών:

$$\mathbf{w}_1 = (0,0,0)^T$$

$$\mathbf{w}_2 = (1,1,1)^T$$

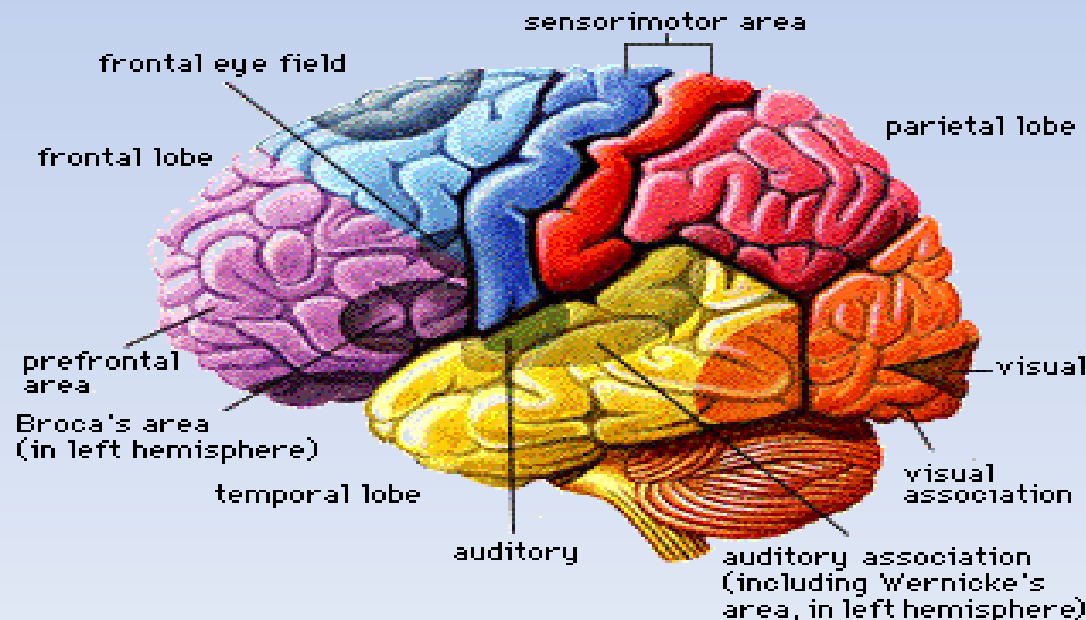
$$\mathbf{w}_3 = (-1,-1,-1)^T$$

- Ο νευρώνας 1 είναι κατηγορίας C_1 και οι υπόλοιποι κατηγορίας C_2
- Σε ποιά κατηγορία θα ταξινομηθούν τα παραδείγματα:

$$\mathbf{x}^1 = (0.2, 0.1, -0.3)^T \quad \mathbf{x}^2 = (1.2, 0.9, 0.7)^T$$

Το δίκτυο SOM

- Προτάθηκε από τον T. Kohonen στα μέσα της δεκαετίας του 1980, σε μια προσπάθεια μοντελοποίησης της διαδικασίας αυτο-οργάνωσης που παρατηρείται σε πολλές περιοχές του εγκεφαλικού ιστού και για διάφορες γνωστικές λειτουργίες.
- Οι νευρώνες στον φλοιό του εγκεφάλου είναι οργανωμένοι σε πολλές περιοχές σχηματίζοντας το χάρτη του εγκεφάλου



Το δίκτυο SOM

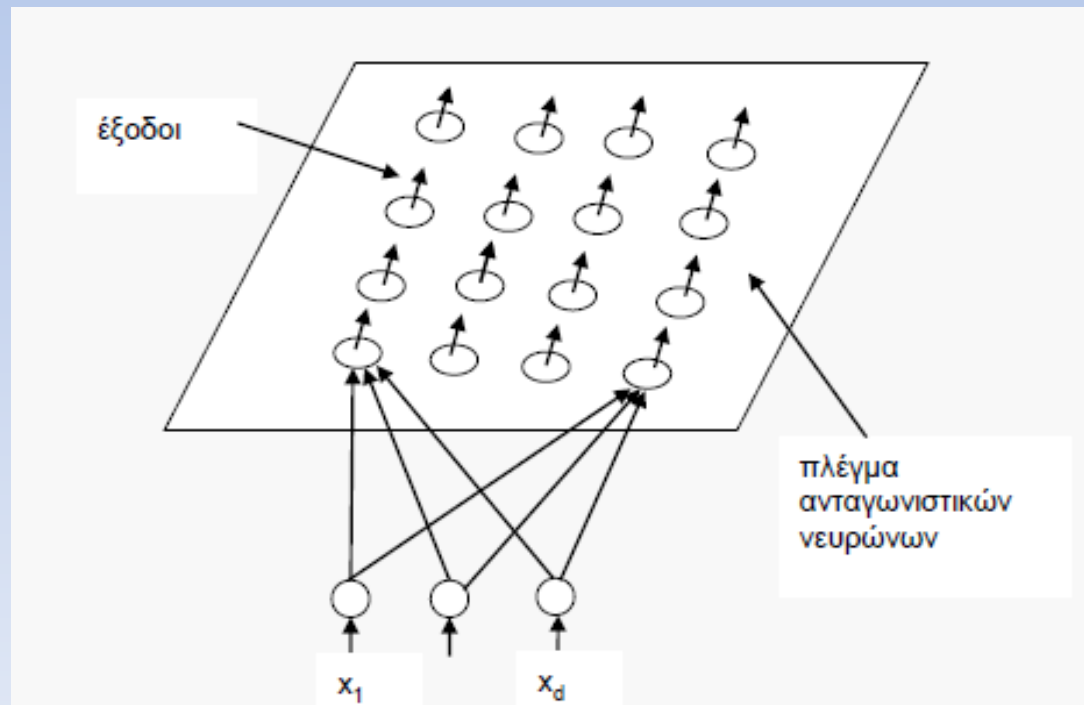
- Το χαρακτηριστικό της οργάνωσης σε περιοχές είναι ότι διαφορετικά εξωτερικά ερεθίσματα (από τα αισθητήρια όργανα) διεγείρουν τους νευρώνες σε διαφορετικές περιοχές στον εγκέφαλο.
- Συγκεκριμένα, αισθήσεις όπως της αφής, της όρασης και της ακοής, απεικονίζονται σε διαφορετικές περιοχές του εγκεφαλικού φλοιού.
- Στην ουσία ο χάρτης ορίζεται από έναν πλέγμα νευρώνων οι οποίοι είναι συντονισμένοι με τέτοιο τρόπο ώστε γειτονικοί νευρώνες να αντιδρούν σε παρόμοια ερεθίσματα.
- Τα σήματα εισόδου απεικονίζονται στα σημεία του χάρτη, ανάλογα με τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά τους.

Το δίκτυο SOM

- Δίκτυο SOM: τεχνητό ανάλογο του βιολογικού χάρτη.
- Είναι ΤΝΔ ανταγωνιστικής μάθησης με ένα επί πλέον χαρακτηριστικό: θεωρούμε ότι οι ανταγωνιστικοί νευρώνες είναι τοποθετημένοι στους κόμβους ενός πλέγματος μιας ή δύο (συνήθως) διαστάσεων.
- Κάθε ανταγωνιστικός νευρώνας χαρακτηρίζεται από δύο ποσότητες:
 - α) το διάνυσμα βαρών (σημείο στο χώρο των προτύπων R^n)
 - β) τις συντεταγμένες της θέσης του στο πλέγμα.
- Οι νευρώνες εκπαιδεύονται ώστε η θέση τους στο πλέγμα να συσχετίζεται με συγκεκριμένα χαρακτηριστικά των προτύπων εισόδου.

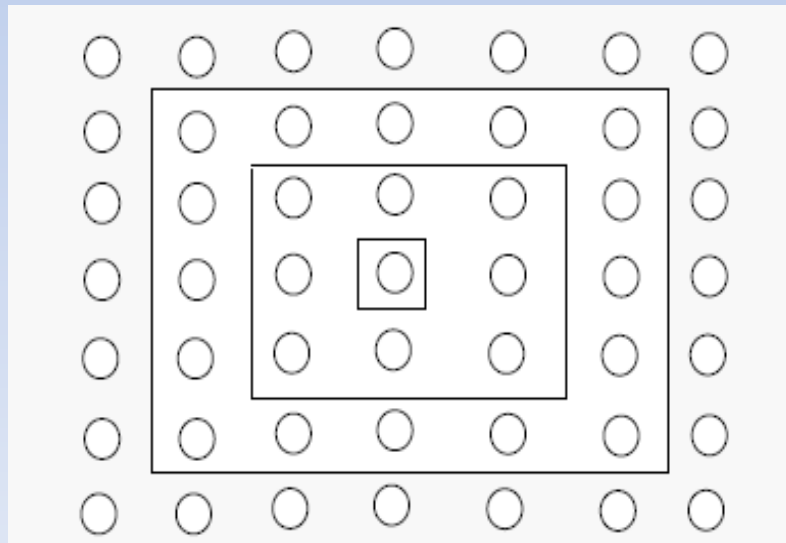
Το δίκτυο SOM

- Υλοποιείται ένας τοπογραφικός χάρτης (topographic map) των δεδομένων εισόδου: οι θέσεις στο πλέγμα των νευρώνων που είναι νικητές κατά τον ανταγωνισμό για κάποιο παράδειγμα εισόδου είναι ενδεικτικές των χαρακτηριστικών αυτού του παραδείγματος.



Εκπαίδευση του δικτύου SOM

- Αρχικά για κάθε νευρώνα i στο πλέγμα ορίζεται η γειτονιά του N_i (στο πλέγμα). Δηλαδή το σύνολο των νευρώνων που περιβάλλουν τον νευρώνα i .
- Μπορεί να έχει οποιαδήποτε μορφή (τετραγωνική, σφαιρική, εξαγωνική κλπ). Συνήθως η γειτονιά N_i είναι συμμετρική γύρω από τον νευρώνα i και περιλαμβάνει τον νευρώνα αυτό.



Εκπαίδευση του δικτύου SOM

- Εκπαίδευση με διακριτή γειτονιά
- Δίνεται σύνολο εκπαίδευσης

$$D = \{(\mathbf{x}^p)\}, \mathbf{x}^p = (x_{p,1}, x_{p,2}, \dots, x_{p,n})^T \quad p = 1, \dots, P$$
- Καθορίζεται το πλήθος $M = M_1 \times M_2$ των ανταγωνιστικών νευρώνων των διαστάσεων M_1 και M_2 του διδιάστατου πλέγματος.
- Αρχικοποίηση των M κέντρων $\mathbf{w}_i(0)$, $i = 1, \dots, M$
 του ρυθμού μάθησης, της έκτασης της γειτονιάς, του μετρητή εποχών $t=0$ και του μετρητή επαναλήψεων $\tau=0$.

Εκπαίδευση του δικτύου SOM

- Εκπαίδευση με διακριτή γειτονιά (συνέχεια αλγορίθμου)
- Σε κάθε εποχή t εφαρμογή των παρακάτω βημάτων για όλα τα πρότυπα $p=1,...,P$
 - Εφαρμογή του $\mathbf{x}^p$ ως εισόδου στο ΤΝΔ, εύρεση του νικητή νευρώνα m .
 - Ενημέρωση των βαρών μόνο του νικητή-νευρώνα m και των γειτονικών του, δηλαδή των νευρώνων του συνόλου του $N_m(\tau)$:

$$w_{i,j}(\tau + 1) = w_{i,j}(\tau) + \eta(x_{p,j} - w_{i,j}), \quad i \in N_m(\tau), \quad j = 1, \dots, n$$

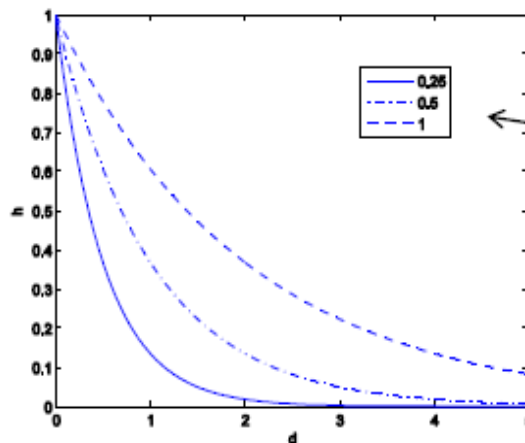
$$w_{i,j}(\tau + 1) = w_{i,j}(\tau), \quad i \notin N_m(\tau), \quad j = 1, \dots, n$$

Εκπαίδευση του δικτύου SOM

- Εκπαίδευση με διακριτή γειτονιά (συνέχεια αλγορίθμου)
 - $\tau = \tau + 1$
 - Σταδιακή αργή μείωση του ρυθμού μάθησης και του εύρους της γειτονιάς $N_m(\tau)$:
- Έλεγχος τερματισμού.
Εάν όχι $t = t + 1$ και έναρξη νέας εποχής.

Εκπαίδευση του δικτύου SOM

- Εκπαίδευση με συνεχή γειτονιά
- Συνεχής γειτονιά: οποιοσδήποτε νευρώνας l ανήκει στη γειτονιά N_i του νευρώνα i με κάποιο βαθμό συμμετοχής h_{il} που είναι αντιστρόφως ανάλογος απόστασης στο πλέγμα μεταξύ των δύο νευρώνων.
- Όπου,
$$h_{il}(\tau) = \exp\left(-\frac{d_{il}}{2\sigma_h^2(\tau)}\right) \quad \text{και} \quad d_{il} = \|r_i - r_l\|^2$$



$$h_{ij}(\tau) = \exp\left(-\frac{d_{ij}}{2\sigma_h^2(\tau)}\right)$$

Εκπαίδευση του δικτύου SOM

- Εκπαίδευση με συνεχή γειτονιά (συνέχεια)
- Σε κάθε εποχή t εφαρμογή των παρακάτω βημάτων για όλα τα πρότυπα $p=1,...,P$
 - Εφαρμογή του $\mathbf{x}^p$ ως εισόδου στο ΤΝΔ, εύρεση του νικητή νευρώνα m .
 - Ενημέρωση των βαρών όλων των νευρώνων με συντελεστή βαρύτητας το βαθμό συμμετοχής h_{mi} στη γειτονιά του νικητή-νευρώνα m ως εξής:

$$h_{mi}(\tau) = \exp\left(-\frac{\|r_m - r_i\|^2}{2\sigma_h^2(\tau)}\right), \quad i = 1, \dots, M$$

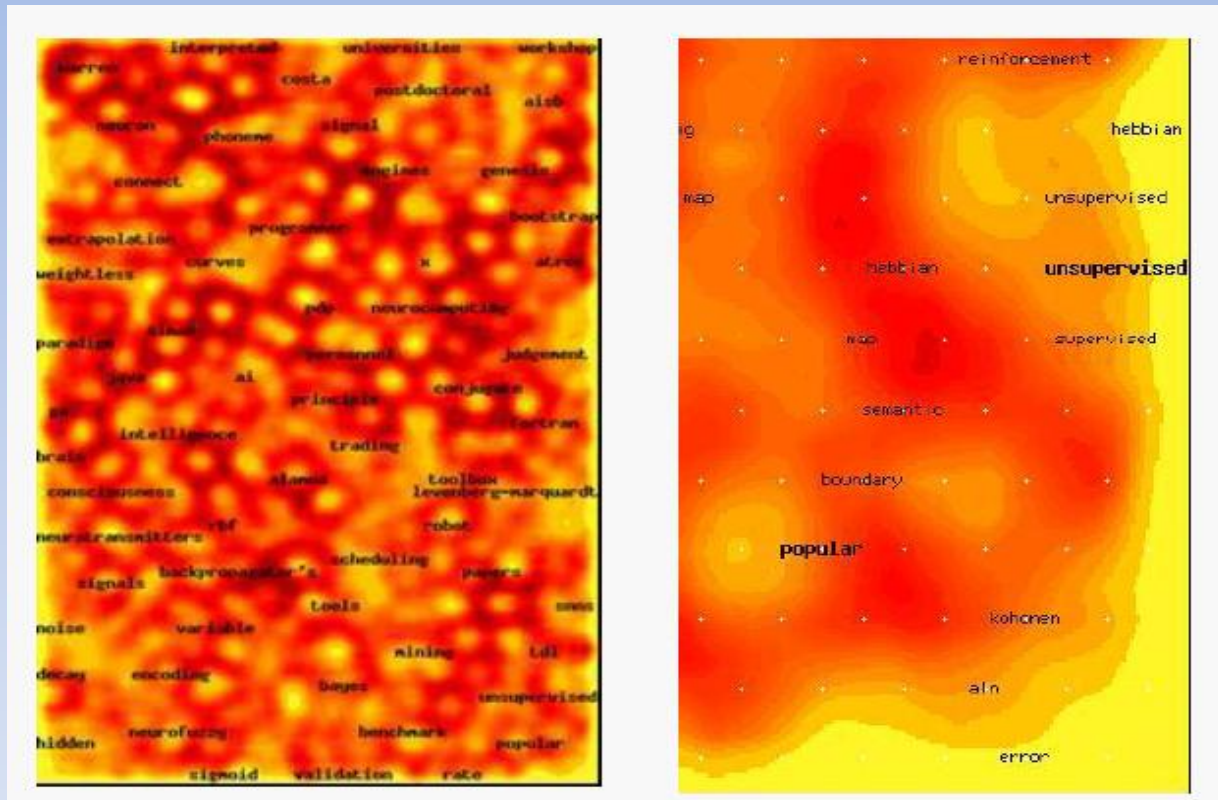
$$w_{i,j}(\tau + 1) = w_{i,j}(\tau) + \eta(\tau)h_{mi}(\tau)(x_{p,j} - w_{i,j}), \quad j = 1, \dots, n$$

Εκπαίδευση του δικτύου SOM

- Εκπαίδευση με συνεχή γειτονιά (συνέχεια)
 - $\tau = \tau + 1$
- Σταδιακή μείωση του $\eta(\tau)$ και του $\sigma_h(\tau)$
- Έλεγχος τερματισμού.
Εάν όχι $t = t + 1$ και έναρξη νέας εποχής.

Παραδείγματα εφαρμογών του δικτύου SOM

- WebSOM και ο χάρτης κειμένων (Text mining with the WebSOM)
<https://aaltodoc.aalto.fi/handle/123455789/2312>



- SOM applications and properties
<https://users.ics.aalto.fi/mikkok/thesis/book/node16.html>