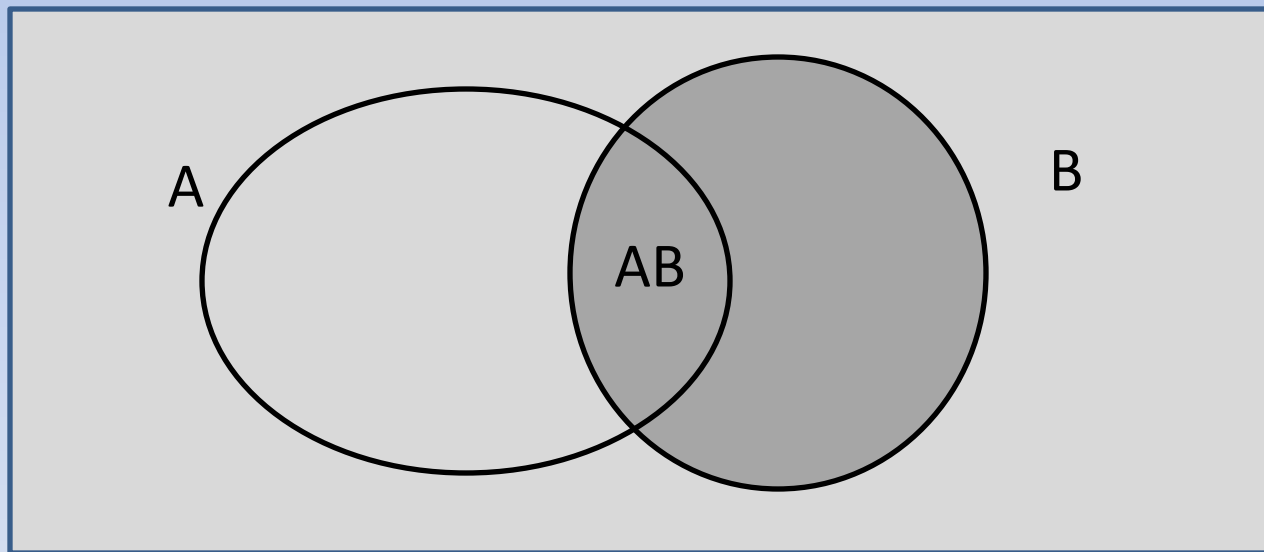


Θεώρημα ή Κανόνας του Bayes

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}$$



ΘΕΩΡΙΑ ΑΠΟΦΑΣΕΩΝ ΚΑΤΑ BAYES

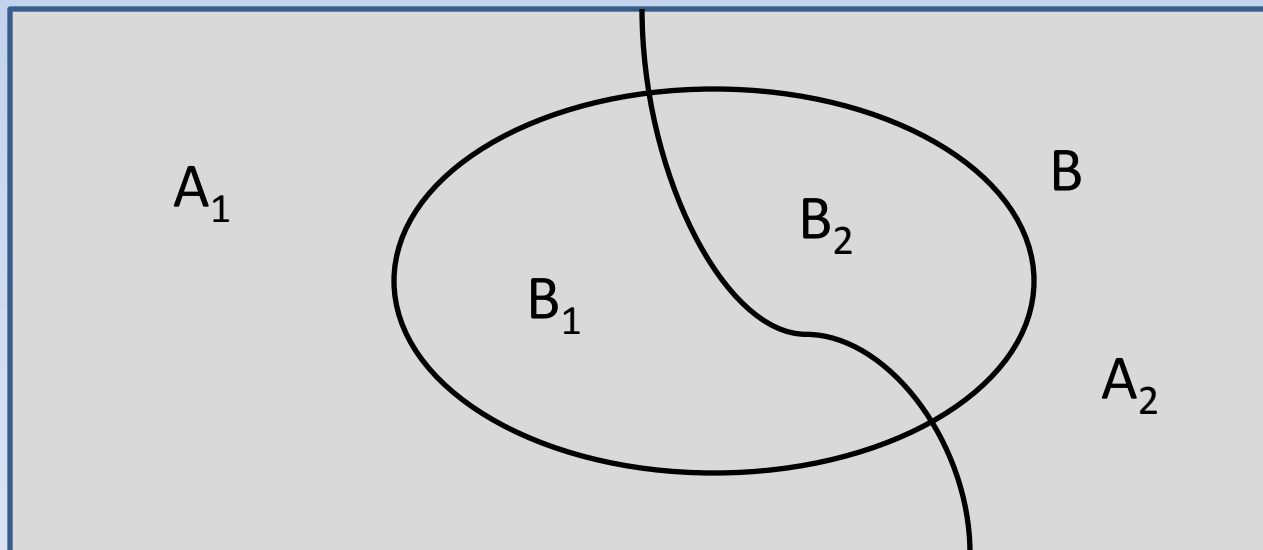
Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας

$$B = B_1 \cup B_2$$

$$B = BA_1 \cup BA_2$$

$$P(B) = P(BA_1) + P(BA_2)$$

$$P(B) = P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2)$$

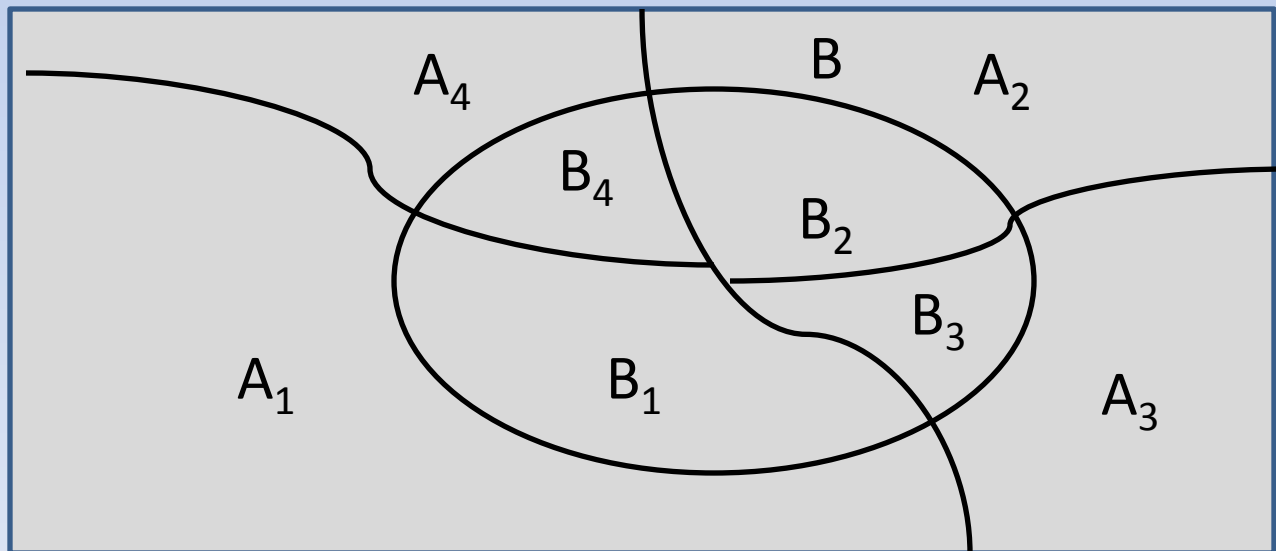


ΘΕΩΡΙΑ ΑΠΟΦΑΣΕΩΝ ΚΑΤΑ BAYES

Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας

Γενίκευση για διαμερίσεις με περισσότερα υποσύνολα

$$P(B) = P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) \\ + P(B|A_3)P(A_3) + P(B|A_4)P(A_4)$$

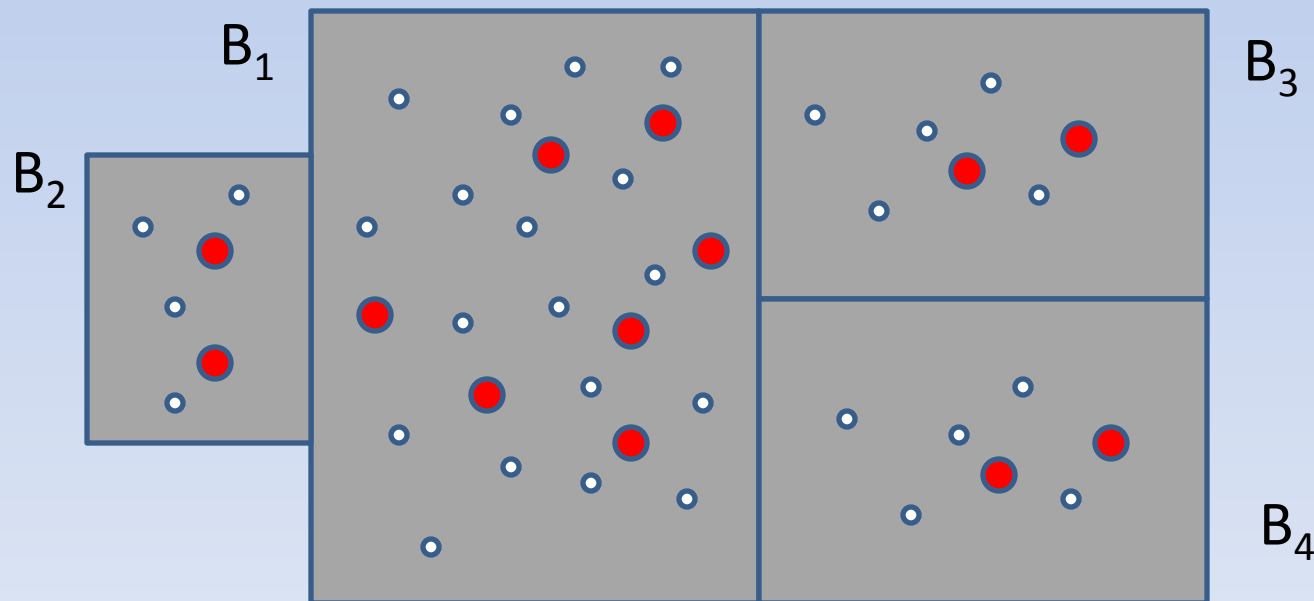


Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας

- Έστω ότι διαθέτουμε τέσσερα (4) με εξαρτήματα. Κάποια από τα εξαρτήματα είναι ελαττωματικά. Για κάθε κιβώτιο ισχύουν τα ακόλουθα:
 - Το 1^ο κιβώτιο περιέχει 2000 εξαρτήματα από τα οποία το 5% είναι ελαττωματικά
 - Το 2^ο κιβώτιο περιέχει 500 εξαρτήματα από τα οποία το 40% είναι ελαττωματικά
 - Το 3^ο κιβώτιο περιέχει 1000 εξαρτήματα από τα οποία το 10% είναι ελαττωματικά
 - Το 4^ο κιβώτιο περιέχει 2000 εξαρτήματα από τα οποία το 10% είναι ελαττωματικά

Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας

1. Αν επιλέξουμε τυχαία ένα κιβώτιο και τυχαία ένα εξάρτημα ποιά είναι η πιθανότητα το εξάρτημα να είναι ελαττωματικό.
2. Αν επιλέξουμε τυχαία ένα εξάρτημα και αυτό είναι ελαττωματικό τότε ποιά είναι η πιθανότητα να προέρχεται από συγκεκριμένο κιβώτιο; Π.χ. Το κιβώτιο 1 ή το κιβώτιο 2



Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας

1. Αν επιλέξουμε τυχαία ένα κιβώτιο και τυχαία ένα εξάρτημα ποιά είναι η πιθανότητα το εξάρτημα να είναι ελαττωματικό.

$$B_1, B_2, B_3, B_4$$

$$P(B_1) = P(B_2) = P(B_3) = P(B_4) = \frac{1}{4}$$

$$P(D) = P(D|B_1)P(B_1) + P(D|B_2)P(B_2) \\ + P(D|B_3)P(B_3) + P(D|B_4)P(B_4)$$

$$P(D) = \frac{100}{2000} \cdot \frac{1}{4} + \frac{200}{500} \cdot \frac{1}{4} + \frac{100}{1000} \cdot \frac{1}{4} + \frac{100}{1000} \cdot \frac{1}{4}$$

$$P(D) = 0.1625$$

Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας

2. Αν επιλέξουμε τυχαία ένα εξάρτημα και αυτό είναι ελαττωματικό τότε ποιά είναι η πιθανότητα να προέρχεται από συγκεκριμένο κιβώτιο;

Έστω ότι ενδιαφερόμαστε για το κιβώτιο 2.

$$P(B_2|D)$$

Θεώρημα του Bayes.

$$P(B_2|D) = \frac{P(D|B_2)P(B_2)}{P(D)}$$

όπου
$$P(D) = P(D|B_1)P(B_1) + P(D|B_2)P(B_2) + P(D|B_3)P(B_3) + P(D|B_4)P(B_4)$$

Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας

2. Κατά συνέπεια για το κιβώτιο 2 έχουμε:

$$P(D|B_2) = 0.4$$

$$P(D) = 0.1625$$

$$P(B_2) = 0.25$$

$$P(B_2|D) = \frac{0.4 * 0.25}{0.1625}$$

$$P(B_2|D) = 0.615$$

Θεώρημα Bayes

Στην περίπτωση της αναγνώρισης προτύπων έχουμε:

- $\omega_j, j = 1 \dots K$ η κλάση j των προτύπων
- $X = [x_1, x_2, \dots x_n]^T$ το διάνυσμα των χαρακτηριστικών για κάθε πρότυπο.

$$P(\omega_j|X) = \frac{P(X|\omega_j)P(\omega_j)}{P(X)} = \frac{P(X|\omega_j)P(\omega_j)}{\sum_{k=1}^K P(X|\omega_k)P(\omega_k)}$$

- Ο τύπος αυτός υπολογίζεται K φορές, μία για κάθε κλάση.
- Τυπικά για ένα πρότυπο αποφασίζουμε σε ποιά κλάση ανήκει με βάση την πιθανότητα που υπολογίζει ο τύπος του Bayes

Θεώρημα Bayes

- Με βάση τον τύπο του Bayes έχουμε ως προς την απόφαση για δύο κλάσεις:

$$P(\omega_1|X) \underset{\omega_2}{\overset{\omega_1}{\geq}} P(\omega_2|X) \Rightarrow \frac{P(X|\omega_1)P(\omega_1)}{P(X)} \underset{\omega_2}{\overset{\omega_1}{\geq}} \frac{P(X|\omega_2)P(\omega_2)}{P(X)}$$

- Η $P(X)$ μπορεί να απλοποιηθεί και μετά από ανακατάταξη της σχέσης προκύπτει ο λόγος πιθανοφάνειας $\Lambda(X)$ και ο κανόνας απόφασης του Bayes:

$$\Lambda(X) = \frac{P(X|\omega_1)}{P(X|\omega_2)} \underset{\omega_2}{\overset{\omega_1}{\geq}} \frac{P(\omega_2)}{P(\omega_1)}$$

Άσκηση

- Έστω ένα πρόβλημα ταξινόμησης για το οποίο δίνονται οι επόμενες υπό συνθήκη πιθανότητες.

$$P(x|\omega_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x-4)^2} \quad P(x|\omega_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x-8)^2}$$

- Αν επί πλέον υποθέσουμε ίσες εκ των προτέρων πιθανότητες για τις δύο κλάσεις, δηλαδή,

$$P(\omega_1) = P(\omega_2) = \frac{1}{2}$$

- Πως μπορούμε από το λόγο πιθανοφάνειας να διατυπώσουμε τον κανόνα απόφασης για το πρόβλημα αυτό;

Άσκηση

- Αντικαθιστούμε τις προηγούμενες σχέσεις στη σχέση του λόγου πιθανοφάνειας και απλοποιούμε:

$$\Lambda(x) = \frac{e^{-\frac{1}{2}(x-4)^2} \omega_1}{e^{-\frac{1}{2}(x-8)^2} \omega_1} \gtrless 1$$

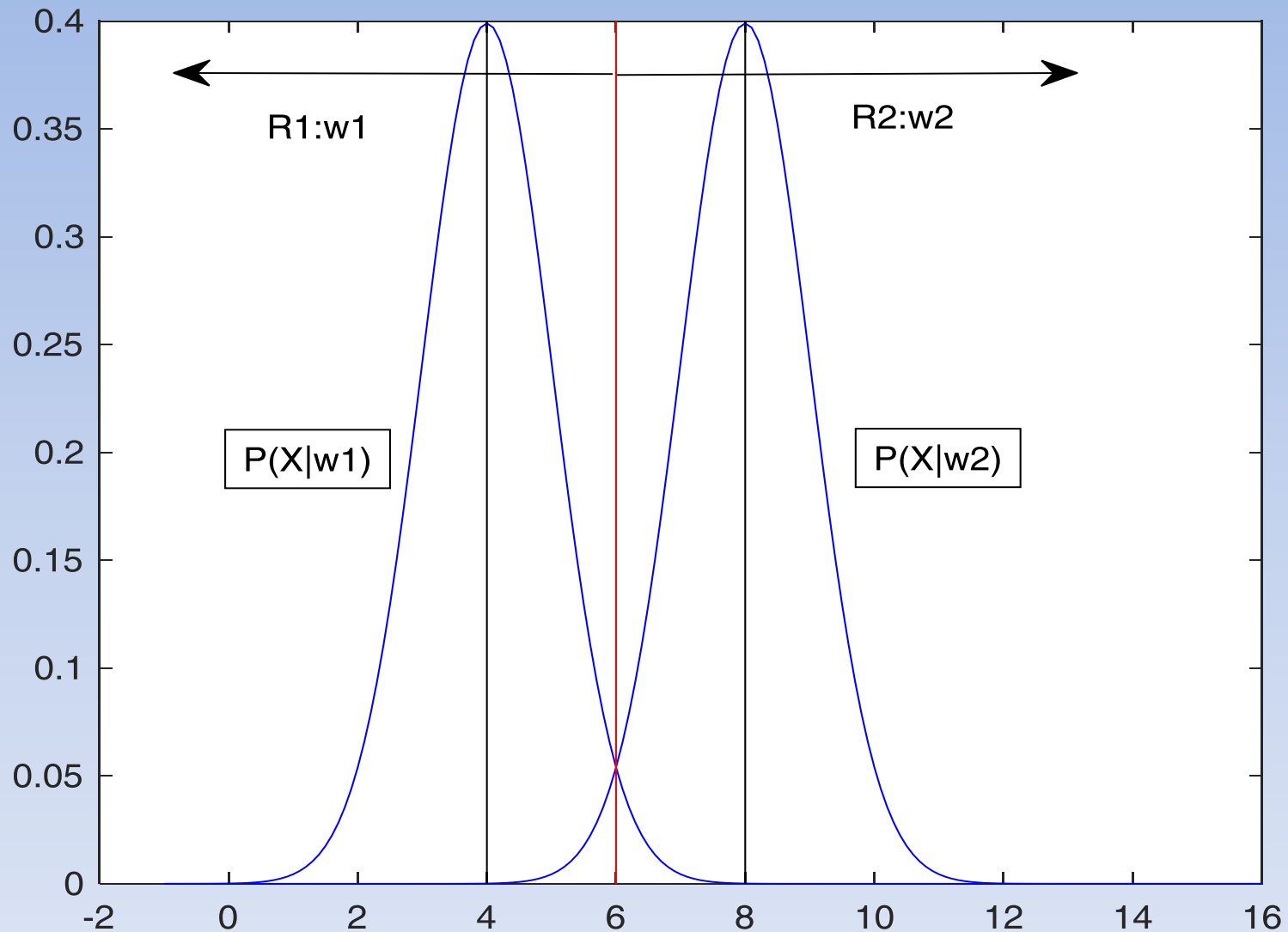
- Παίρνοντας το λογάριθμο των δύο μελών της ανισότητας έχουμε:

$$(x-4)^2 - (x-8)^2 \lessgtr 0$$

- Τελικά:

$$x \lessgtr 6$$

ΘΕΩΡΙΑ ΑΠΟΦΑΣΕΩΝ ΚΑΤΑ BAYES



Άσκηση

- Κατά συνέπεια μπορούμε να συμπεράνουμε ότι:

$$\text{Αν } x \in R_1 \Rightarrow x \text{ είναι } \omega_1 \quad \text{Αν } x \in R_2 \Rightarrow x \text{ είναι } \omega_2$$

- Στην περίπτωση που το x ανήκει στην περιοχή που επικαλύπτονται οι δύο κατανομές τότε υπάρχει σφάλμα.

$$P_{error} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{x_0} p(x|\omega_1) dx + \frac{1}{2} \int_{x_0}^{+\infty} p(x|\omega_2) dx$$

- όπου, $x_0 = 6$