Βελτιστοποίηση

Ιωάννης Γ. Τσούλος

Τμήμα Πληροφορικής και τηλεπικοινωνιών
Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

2022

Περίληψη

Κατηγορίες προβλημάτων

1. Προβλήματα συνεχών τιμών (πχ. εύρεση βαρών σε Τεχνητό Νευρωνικό δίκτυο).
2. Προβλήματα διακριτων τιμών (πχ. το πρόβλημα του Πλανώδιου Πωλητή.)
3. Μεικτά προβλήματα.

Τα περισσότερα προβλήματα ανήκουν στην πρώτη κατηγορία και με αυτά θα ασχοληθούμε κυρίως.

Ορισμός.

- Το πρόβλημα προς επίλυση είναι η ελαχιστοποίηση

$$\min_x f(x), \;\; x \in S \subset R^n$$

- Είναι πολυδιάστατες συναρτήσεις, δηλαδή συναρτήσεις όπου $n \geq 1$

Σύμβολα

- Η **παράγωγος** (κλίση): $g = \nabla f(x),\ \ g_i = \frac{\partial f(x)}{\partial x_i},\ \ i = 1, \ldots, n$
- Ο **Εσσιανός** πίνακας:
  $B = \nabla^2 f(x),\ \ B_{ij} = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j},\ \ i, j = 1, \ldots, n$

Παράδειγμα παραγώγου

1. Έστω η συνάρτηση: $f(x) = 2x_1^2 + x_2^3$
2. Το διάνυσμα παραγώγου είναι: $g = (4x_1, 3x_2^2)$

Παράδειγμα Εσσιανού πίνακα

1. Έστω η συνάρτηση:
   $f(x) = x_2^4 + x_1^3 + 3x_1^2 + 4x_2^2 - 4x_1x_2 - 5x_2 + 8$
2. Οι πρώτες παράγωγοι είναι:
   $\frac{\partial f(x)}{\partial x_1} = 3x_1^2 + 6x_1 - 4x_2,\ \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} = 4x_2^3 + 8x_2 - 4x_1 - 5$
3. Οι δεύτερες παράγωγοι είναι:
   $\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} = 6x_1 + 6,\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2^2} = 12x_2^2 + 8,\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_1} = -4$
4. Ο Εσσιανός δίδεται από:

$$B = \begin{pmatrix} 6x_1 + 6 & -4 \\ -4 & 12x_2^2 + 8 \end{pmatrix}$$

Αναπαράσταση ακεραίων αριθμών

- Κάθε θετικός ακέραιος N αναπαρίσταται σε οποιαδήποτε βάση b ως το ακόλουθο άθροισμα:

  $$N = a_k b^k + a_{k-1} b^{k-1} + \ldots + a_1 b^1 + a_0 b^0$$

  όπου k ένας θετικός ακέραιος αριθμός.
- Ο αριθμός 489 στο δεκαδικό αναπαρίσταται στο δεκαδικό ως: $4 \times 10^2 + 8 \times 10^1 + 9 \times 10^0$
- Στο δεκαεξαδικό σύστημα αναπαρίσταται ως: 1E9
- Στο δυαδικό σύστημα: 111101001
- Οι υπολογιστές φυσικά χρησιμοποιούν δυαδικό σύστημα.

Μετατροπή σε δυαδικό σύστημα ακέραιου αριθμού.

- Γίνονται διαδοχικές διαιρεσεις με το δυο και λαμβάνονται τα υπόλοιπα των διαιρέσεων.
- Τα υπόλοιπα πρέπει να ανιστραφούν

Παράδειγμα.

- Έστω ο αριθμός 489 στο δεκαδικό σύστημα
- Για την μετατροπή στο δυαδικό έχουμε τις εξής πράξεις
-

ΠΡΑΞΗ	ΥΠΟΛΟΙΠΟ
489/2=244	1
244/2=122	0
122/2=61	0
61/2=30	1
30/2=15	0
15/2=7	1
7/2=3	1
3/2=1	1
1/2=0	1

- Ο δυαδικός που προκύπτει (με ανίστροφη σειρα) είναι ο 111101001

Μετατροπή δεκαδικού μέρους αριθμού

- Το δεκαδικό μέρος πολλαπλασιάζεται με το δύο.
- Σε κάθε επανάληψη το ακέραιος μέρος του πολλαπλασιασμού διατηρείται.
- Υπάρχει περίπτωση ένας αριθμός να μην μπορεί να αναπαρασταθεί ακριβώς στο δυαδικό σύστημα

Παράδειγμα μετατροπής δεκαδικής τιμής

- Έστω ο αριθμός 0.81252
- Πράξεις:

Πράξη	Ψηφίο
$0.8125 \times 2 = 1.625$	1
$0.625 \times 2 = 1.25$	1
$0.25 \times 2 = 0.5$	0
$0.5 \times 2 = 1$	1
$0 \times 2 = 0$	0

- Ο αριθμός είναι ο 0.11010

Ορισμοί

- Ένα διάνυσμα είναι μια σειρά αριθμών με διάταξη.
- Συμβολίζεται και ως $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$
- n είναι η διάσταση του διανύσματος
- Στα μαθηματικά υπάρχει το διάνυσμα - γραμμή και το διάνυσμα στήλη
- Στους υπολογιστές έχουν παρόμοια αντιμετώπιση.

Πράξεις διανυσμάτων

- Η **πρόσθεση** δύο διανυσμάτων $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ και $\overrightarrow{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ γίνεται στοιχείο προς στοιχείο.
- Για να γίνει πρόσθεση θα πρέπει και τα δύο διανύσματα να έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων.
- Αποτέλεσμα πρόσθεσης:
$\overrightarrow{z} = \overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$.
- Το **εσωτερικό γινόμενο** διανυσμάτων είναι αριθμός και είναι πολλαπλασιασμός στοιχείου με στοιχείο.
- Αποτέλεσμα εσωτερικού γινομένου:
$P = \overrightarrow{x}^T \overrightarrow{y} = (x_1 y_1, x_2 y_2, \ldots, x_n y_n)$.
- Ο πολλαπλασιασμός αριθμού με δίανυσμα γίνεται πολλαπλασιάζοντας κάθε στοιχείο του διανύσματος με αυτόν τον αριθμό. Το αποτέλεσμα είναι και πάλι διάνυσμα.

Νόρμες διανυσμάτων (ιδιότητες)

- Μια νόρμα $\|.\| : R^n \rightarrow R$ είναι μια συνάρτηση με τις εξής ιδιότητες
  - $\|x\| \geq 0$
  - $\|x\| \Leftrightarrow x = (0, 0, \ldots, 0)$
  - $\|ax\| = |a| \, \|x\| \,, \ \forall a \in R$
  - $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Παραδείγματα νόρμας

1. Η νόρμα l_1:

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

2. Η νόρμα l_2:

$$\|x\|_2 = \sqrt{x^T x} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

3. Η νόρμα l_∞:

$$\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$$

Ορισμοί

- Ένας πίνακας θεωρείται μια δίαταξη m γραμμών και n στηλών.
- Συμβολίζεται ως : $A = [a_{ij}]_{m \times n}$
- Αν $m = n$, ο πίνακας ονομάζεται **τετραγωνικός**.

Ειδικοί πίνακες

- Ενας τετραγωνικός πίνακας για τον οποίο έχει μη μηδενικά στοιχεία μόνο στην κύρια διαγώνιό του ονομάζεται **διαγώνιος** πίνακας.
- Ένας διαγώνιος πίνακας A για τον οποίο ισχύει $A_{ii} = 1$, ονομάζεται μοναδίαιος πίνακας και συμβολίζεται με I.
- Ένας διαγώνιος πίνακας με μη - μηδενικά στοιχεία πάνω από την κύρια διαγώνιο ονομάζεται **άνω τριγωνικός**.
- Ένας διαγώνιος πίνακας με μη - μηδενικά στοιχεία κάτω από την κύρια διαγώνιο ονομάζεται **κάτω τριγωνικός**.

Πρόσθεση πινάκων

- Για να γίνει πρόσθεση πινάκων A και B θα πρέπει να έχουν τον ίδιο αριθμό γραμμών και στηλών.
- Το αποτέλεσμα της πράξης:
  $C = A + B \Leftrightarrow C_{ij} = A_{ij} + B_{ij}, \;\; i = 1, .., n, \;\; j = 1, ..m$
- Ισχύουν τα εξής:
  - $A + B = B + A$
  - $(A + B) + C = A + (B + C)$
  - $A + 0 = A$ (0 είναι ο πίνακας με μηδέν σε κάθε στοιχείο του).
  - $A + (-A) = 0$

Πολλαπλασιασμός στοιχείου με πίνακα

- Γίνεται πολλαπλασιασμός κάθε στοιχείου με τον αριθμό και το αποτέλεσμα: $\lambda \cdot A = \lambda A_{ij}, \;\; i = 1, .., n, \;\; j = 1, ..m$
- Ισχύουν τα ακόλουθα:
  - $(k + l) \cdot A = k \cdot A + l \cdot A$
  - $k \cdot (A + B) = k \cdot A + k \cdot B$
  - $k \cdot (l \cdot A) = (kl) \cdot A$
  - $1 \cdot A = A$

Πολλαπλασιασμός πινάκων

- Το γινόμενο μεταξύ πινάκων A, B επιτρέπεται μόνο ο A είναι πίνακας $m \times n$ και ο B είναι πίνακας $n \times k$.
- Το αποτέλεσμα του γινομένου είναι πίνακας $m \times k$.
- Το αποτέλεσμα ορίζεται ως:

$$C = AB \Rightarrow [c_{ij}] = \left[\sum_{p=1}^{n} A_{ip} B_{pj} \right]$$

Αντίστροφος πίνακα

- Αν υπάρχει πίνακας B για τον τετραγωνικό πίνακα A για τον οποίο ισχύει: $AB = I$, τότε ο πίνακας B συμβολίζεται με A^{-1} και ονομάζεται αντίστροφος του A.
- Αν δεν υπάρχει αντίστροφος πίνακας για τον A, τότε ο A ονομάζεται ιδιάζων (singular).

Ορίζουσα πίνακα

1. Ορίζεται για τετραγωνικούς πίνακες.
2. Συμβολίζεται με det(A)
3. Είναι δεκαδικός αριθμός
4. Παρέχει σημαντικές πληροφορίες για ένα πίνακα και έχει πολλές εφαρμογές
5. Μπορεί να υπολογιστεί αναδρομικά.

Υπολογισμός ορίζουσας για 2X2 πίνακα

- Έστω ο πίνακας
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$
- $det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$
- Η ορίζουσα ορίζεται ως $det(A) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$

Υπολογισμός ορίζουσας για 3Χ3 πίνακα

- Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

- $det(A) = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$

Σύνοψη

- Παρουσιάστηκαν βασικές έννοιες μαθηματικών
- Παρουσιάστηκαν έννοιες μετατροπής αριθμών.

Βιβλιογραφία I

- Βελτιστοποίηση τεχνικών συστημάτων, Άγγελος Πρωτοπαπάς, 2015, Κάλλιπος, ISBN: 978-960-603-493-0
- Καθολική βελτιστοποίηση: μέθοδοι λογισμικό και εφαρμογές, Ιωάννης Γ. Τσούλος, διδακτορική διατριβή, εθνικό αρχείο διδακτορικών διατριβών.
- Αριθμητικές μέθοδοι βελτιστοποίησης, Ισαάκ Λαγαρής, ιστοσελίδα σημειώσεων διαθέσιμη από http://www.cs.uoi.gr/~lagaris/OPT_UNDER/
- Τεχνικές βελτιστοποίησης, Γεώργιος Α. Ροβιθάκης, 2007, εκδόσεις Τζιόλα, ISBN-13: 978-960-418-141-4 .

Βιβλιογραφία II

Μαθηματική θεωρία βελτιστοποίησης , DingZhu Du, Panos M. Pardalos, Weili Wu, 2005, Εκδόσεις Νέων Τεχνολογιών, ISBN 960-8105-79-X, ISBN-13 978-960-8105-79-9